Diffusion en mode commutation de circuits dans les tores de dimension k

Olivier Delmas et Stéphane Perennes

Projet SLOOP *
Laboratoire I3S - CNRS URA 1376
930 Route des Colles, B.P. 145
06903 Sophia Antipolis Cedex
Courrier électronique : `{delmas, sp}@unice.fr`.

* SLOOP (Simulation, Langages Orientés Objets et Parallélisme) est un projet commun entre le CNRS, l'INRIA et l'Université de Nice - Sophia Antipolis.

RÉSUMÉ. *Dans cet article, nous étudions la diffusion en mode commutation de circuits dans le tore de dimension k en supposant qu'un nœud peut envoyer des messages simultanément sur tous ses canaux de sortie. Nous considérons le protocole de diffusion comme une succession d'étapes et durant chacune d'elles les communications se font selon des chemins arc-disjoints. Nous donnons des protocoles de diffusion optimaux en nombre d'étapes et quasi-optimaux pour les longueurs des chemins. Ceci généralise le résultat de Peters et Syska [PET 96] obtenu pour $k = 2$. Pour ce faire, nous utilisons des codes linéaires. Nous détaillons en particulier les cas des tores de dimension 3 et 4.*

ABSTRACT. *This paper deals with broadcasting in $k-$dimensional torus network under the circuit-switched routing model. We suppose that a node can send a message simultaneously on all its out-links. Here, we consider a broadcast protocol as a succession of rounds ; during each round, the communication dipaths used by the algorithm must be arc-disjoint. We give optimal protocols for the number of rounds and near of the optimal for the length of communication dipaths. This work generalizes that of Peters and Syska [PET 96] concerning the case $k = 2$. We use tools of linear coding theory and describe in details the cases $k = 3$ and $k = 4$.*

MOTS-CLÉS : *diffusion, commutation de circuits, tore, théorie des codes.*

KEY WORDS : *broadcasting, circuit-switching, torus network, coding theory.*

1. Introduction

En algorithmique parallèle et distribuée il est important de disposer d'une part d'un protocole de routage efficace (fonction de routage) [FRA 95] et d'autre part d'algorithmes de communications globales [PER 96]. L'étude d'algorithmes classiques montre qu'il existe un certain nombre de communications globales qui apparaissent très souvent, par exemple en algèbre linéaire ou non-linéaire, ou en traitement d'images. Un problème classique de communications généralisées ou globales couramment rencontré [MCK 94, RUM 94] est **la diffusion** (un processeur envoie son message à destination de tous les autres processeurs). Mais les algorithmes dépendent fortement du mécanisme de routage des messages utilisés. Dans cet article nous nous intéressons à la diffusion sur les réseaux toriques qui utilisent un routage de type commutation de circuits. En effet, ce routage, déjà bien connu dans les réseaux de télécommunications est désormais utilisé sur des machines parallèles les plus récentes telles que l'IBM SP2, la Paragon d'Intel ou les deux dernières générations de Cray (T3D et T3E). De plus les réseaux toriques, par leur simplicité et leur importance dans de nombreuses applications numériques, constituent une architecture souvent utilisée (par exemple, les Cray T3D et T3E utilisent une topologie en tore de dimension 3).

1.1. *Modélisation du problème*

1.1.1. *Le modèle de type commutation de circuits*

Nous regrouperons sous le terme **« routage de type commutation de circuits »**, les routages par *commutation de circuits*, *wormhole* [SEI 90], *virtual cut-through* [KER 79] ou *direct connect* [NUG 88]. Bien qu'il existe des différences entre ces diverses techniques (par exemple: présence ou non d'un accusé de réception, faible ou grande taille des tampons d'entrée et de sortie des liens, etc), pour l'étude des communications globales, les différences entre ces modes de routage apparaissent comme trop fines et en tout état de cause difficilement modélisables pour être prises en compte dans une étude théorique.

Dans le but de pouvoir comparer les divers protocoles proposés et d'évaluer leur qualité, il est nécessaire d'adopter un modèle commun. Ceci a déterminé la plupart des auteurs à se placer dans le cadre du « modèle de type commutation de circuits » qui est désormais le plus communément adopté. Celui-ci consiste à dire que les **protocoles de communications globales s'effectuent comme une succession d'étapes**. Une étape comporte généralement plusieurs communications entre divers couples de sommets. Ces communications, pour éviter des blocages ou des pertes, devront s'effectuer le long de **chemins arc-disjoints**. Notons que certains auteurs imposent une contrainte plus forte, en considérant des chemins sommet-disjoints [FEL 93]. Le coût d'une étape est le maximum du coût des communications ayant lieu au cours de cette étape. Souvent, il est pratique de considérer qu'**une étape ne peut commencer que si toutes les communications de l'étape précédente sont achevées**. Dans ce cas, on dit que les protocoles sont « synchrones ».

Dans la suite, nous regrouperons les routages du « type commutation de circuits synchrone » sous le terme `mode commutation de circuits`.

1.1.2. *Temps de communication d'un processeur à un autre*

Dans le mode commutation de circuits, lorsqu'un processeur envoie un message à un autre processeur, la modélisation du temps de transmission s'exprime comme la somme de trois termes : le premier tient compte d'un délai constant, aussi appelé délai d'initialisation, induit par le processus qui envoie le message, le second est associé au temps de commutation des commutateurs par lesquels transite le message et le troisième mesure le débit de l'information. Ainsi, pour un message de longueur L allant d'un processeur x à un processeur y, le long d'un chemin de longueur l, le temps de communication sera modélisé par $T_{x \to y} = \alpha + l\delta + L\tau$ (modèle linéaire complet), où α est le délai d'initialisation, δ le temps de commutation d'un commutateur intermédiaire et $\frac{1}{\tau}$ la bande passante des liens.

Il existe diverses simplifications de ce modèle de temps (justifiées par la réalité). Celle que nous adopterons dans cette étude consiste à considérer un message de petite longueur pour lequel $\alpha >> L\tau$ et $l\delta >> L\tau$. Le modèle de temps peut alors se réduire à $T_{x \to y} = \alpha + l\delta$. Le cas des messages longs se traite généralement avec des techniques très différentes du type *"pipe-line"* (arbres couvrants arc-disjoints, ...) [RUM 94] ; nous ne les aborderons pas ici.

1.1.3. *Contraintes du réseau*

Les résultats dépendent aussi de la modélisation de la topologie du réseau et des contraintes technologiques qui lui sont associées. Le réseau sera modélisé ici par un graphe orienté $G = (V, A)$ qui sera supposé symétrique et dont l'ensemble V des sommets représentent les commutateurs et l'ensemble A des arcs les liaisons entre les "tampons d'entrée et sortie" de ces commutateurs.

Suivant la conception du réseau modélisé, il peut exister des restrictions sur les capacités d'émission et de réception de chaque processeur. Le cas où l'on autorise au maximum une émission et une réception a été étudié dans la littérature [BAR 96]. Comme cette étude s'inscrit en continuité des travaux de [PET 96], nous utiliserons les mêmes hypothèses de modélisation des contraintes des réseaux qu'eux. Ainsi, nous supposerons que l'on peut émettre sur tous les canaux de sortie (mode appelé $\Delta-$ports). Notons que dans un protocole de diffusion lorsque l'on ne s'autorise pas le découpage du message, il n'y a pas de contrainte sur la réception, car il suffit que le message arrive une et une seule fois sur un processeur.

1.1.4. *Protocole de diffusion*

Soit G un graphe orienté symétrique et sommet transitif. Alors dans le mode commutation de circuits, nous pouvons définir le coût d'un protocole de diffusion ainsi.

Notation 1 Le temps (ou coût) d'un algorithme de diffusion dans un graphe G, *noté $b(G)$, est le temps nécessaire induit par l'algorithme pour effectuer la diffusion* *dans G à partir d'un sommet quelconque. Dans le modèle linéaire complet, ce temps s'exprime comme la somme de trois termes : $b(G) = b_\alpha(G)\alpha + b_\delta(G)\delta + b_\tau(G)L\tau$, où $b_\alpha(G)$ représente le nombre d'étapes de l'algorithme, $b_\delta(G)$ la somme du maximum des distances des communications entre processeurs impliqués à chaque étape de l'algorithme et $b_\tau(G)$ mesure le flot d'information.*

Conformément à notre modèle de temps, nous ne prendrons en compte que les cœfficients $b_\alpha(G)$ et $b_\delta(G)$. Dans [DEL 97] il est montré, sous certaines conditions, que l'optimum en nombre d'étapes ne peut être atteint que si l'on ne découpe pas le message, auquel cas $b_\alpha(G) = b_\tau(G)$.

1.2. *Définitions et notations*

Nous utiliserons les définitions et notations suivantes :

• $\mathbb{Z}_q$ représente le groupe additif des **entiers modulo q**. Les représentants de $\mathbb{Z}_q$ seront notés $\{0, 1, \ldots, q-1\}$ dans le cas général. Mais dans le cas qui se révèlera ici le plus étudié, c'est-à-dire lorsque $q = 2k+1$, nous prendrons comme représentants canoniques les nombres $\{-k, \ldots, 0, \ldots, k\}$ (ceci pour des raisons de représentation géométrique, de manière à avoir le 0 au centre des figures, voir figure 1).
• G représente un graphe orienté symétrique. $V(G)$ et $A(G)$ représentent respectivement l'**ensemble des sommets** et l'**ensemble des arcs** de G.
• N représente le **nombre de sommets de** G : $N = |V(G)|$.
• $d_G(x, y)$ représente la **distance** d'un sommet $x \in V(G)$ à un sommet $y \in V(G)$ définie comme étant la longueur du plus court chemin allant de x à y.
• $D(G)$ représente le **diamètre** du graphe G, c'est-à-dire le maximum des distances pris entre chaque couple de sommets : $D(G) = max_{(x,y)\in V^2(G)} d_G(x, y)$.
• Dans un graphe orienté symétrique G, $\Delta(G)$ (aussi noté Δ) représente le **degré entrant (ou sortant) maximum** dans G, c'est-à-dire le maximum des degrés entrants (ou sortants) de tous les sommets de G.
• C_N représente le **circuit symétrique** d'ordre N (voir figure 1-a et 1-b).

Définition 1 [RUM 94] *La* **somme cartésienne** *de deux graphes orientés G et G', que nous noterons $G\square G'$, est le graphe orienté dont tous les sommets sont tous les couples (x, x') où x est un sommet de G et x' est un sommet de G'. Le sommet (y, y') est un successeur du sommet (x, x') dans $G\square G'$ si et seulement si $x = y$ et (x', y') est un arc de G' ou si $x' = y'$ et (x, y) est un arc de G.*

Définition 2 *Un* **tore de dimension** k *est la somme cartésienne de k circuits symétriques d'ordre $l_1, l_2, \ldots, l_k$ et sera noté par $TM(l_1, l_2, \ldots, l_k) = C_{l_1}\square C_{l_2}\square\cdots\square C_{l_k}$.*

Remarque 1 Si pour $1 \leq i \leq k$, $l_i \geq 3$, le tore est alors un graphe orienté régulier de degré $\Delta = 2k$. Son ordre est $l_1 \times l_2 \times \cdots \times l_k$, le nombre d'arcs est $2kN$ et son diamètre est $\sum_{i=1}^{i=k} \lfloor \frac{l_i}{2} \rfloor$.

Notation 2 *Lorsque $l_1 = l_2 = \cdots = l_k = l$, nous utiliserons la notation condensée $TM(l)^k$ et supposerons dans ce qui suit que $l \geq 3$ (voir figure 1). Nous appelerons ces graphes des* **tores carrés de coté l et de dimension k**.

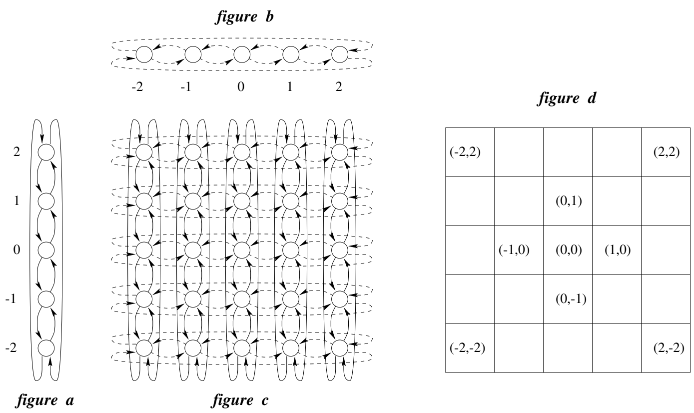

Fig 1 - *Les* `figures-a` *et* `b` *représentent deux circuits symétriques d'ordre 5 notés* C_5*. La* `figure-c` *représente le tore carré de dimension 2 et de coté 5. Ce tore est la somme cartésienne des 2 circuits symétriques* C_5*, soit* $TM(5)^2 = TM(5,5) = C_5 \square C_5$*. Par souci de clarté, nous pourrons choisir de représenter les tores en omettant de dessiner les arcs et en assimilant les sommets à des carrés. Un exemple d'une telle représentation est donné pour le tore* $TM(5)^2$ *en* `figure-d`*, avec les éléments de* $\mathbb{Z}_5$ *noté* $\{-2,-1,0,1,2\}$.

Remarque 2 Chaque sommet x du tore $TM(l_1, l_2, \cdots, l_k)$ peut être vu comme un vecteur de dimension k noté $(x_1, x_2, \cdots, x_k) \in \mathbb{Z}_{l_1} \times \mathbb{Z}_{l_2} \times \cdots \times \mathbb{Z}_{l_k}$. Chaque sommet $(x_1, x_2, \cdots, x_k)$ est joint par un arc aux $2k$ sommets $(x_1, x_2, \cdots, x_i \pm 1, \cdots, x_k)$ pour $1 \leq i \leq k$.

Remarque 3 Comme le tore $TM(l)^k$ est un graphe sommet-transitif, nous considérerons dans la suite, que dans tout protocole de diffusion le sommet émetteur est le vecteur nul que nous noterons 0.

1.3. *Etat de l'art pour le modèle Δ-ports en commutation de circuits*

Pour un nombre fixé d'étapes T dans un protocole de diffusion, le nombre maximum potentiel de sommets susceptible de recevoir le message est majoré par $(\Delta+1)^T$. On a donc $b_\alpha(G) \geq \lceil \log_{\Delta+1} N \rceil$. Une borne inférieure sur la longueur des chemins est $b_\delta(G) \geq D(G)$.

La détermination de la valeur $b_\alpha(G)$ optimale est un problème parfois ardu. La minimisation simultanée des deux paramètres $b_\alpha(G)$ et $b_\delta(G)$ est encore plus difficile et ce problème a été peu étudié. Jusqu'à présent, seuls certains cas particuliers ont été examinés. Pour le circuit symétrique C_N, on obtient facilement que $b_\alpha(C_N) = \lceil \log_3 N \rceil$ avec une longueur totale de chemin optimale. La diffusion dans l'hypercube a été étudiée dans [HO 95]. Leurs auteurs donnent un algorithme asymptotiquement optimal en nombre d'étapes. Il semble difficile d'obtenir sur tout hypercube de dimension quelconque un algorithme de diffusion optimal pour le nombre d'étapes. Néanmoins, Kodate [KOD 96] a obtenu des algorithmes optimaux en nombre d'étapes sur des hypercubes dont les dimensions sont de la forme 2^k+1, en utilisant des codes cycliques. Le lecteur pourra trouver une synthèse plus complète de ces problèmes dans [DEL 97, FLE 96] et dans le papier [CAS] en préparation. Dans le cas des tores de dimension k, le nombre maximum de sommets que l'on peut atteindre en T étapes est $(2k+1)^T$. Nous nous limiterons donc dans la suite à l'étude du cas critique de la diffusion dans les tores carrés de coté $(2k+1)^i$ et de dimension k. En ce qui concerne les tores de dimension 2, Peters et Syska ont exhibé [PET 96] un algorithme optimal à la fois pour le nombre d'étapes et la longueur des chemins pour les tores carrés de coté $l=5^i$, i.e. $b_\alpha(TM(l)^2)=2\log_5(l)=2i$ et $b_\delta(TM(l)^2)=D(TM(l)^2)=l-1$. Dans le cas général, Park et Choi [PAR 94, PAR 96] proposent un algorithme optimal en nombre d'étapes sur le tore $TM((2k+1)^i)^k$, mais sans tenir compte de la longueur des chemins. Pour notre part, nous avons étudié de façon indépendante le même problème et nous montrons que l'on peut exhiber des algorithmes optimaux en nombre d'étapes, à savoir $b_\alpha(G)=ki$, pour $G=TM((2k+1)^i)^k$, mais pour un $b_\alpha(G)$ optimal nous essayons de minimiser le paramètre $b_\delta(G)$.

2. Principe général de la diffusion dans les tores carrés de dimension k

Nous donnons ici une manière de construire un protocole dans le tore carré de coté $l_1\times l_2$ et de dimension k, connaissant un protocole dans le tore carré de coté l_1 et de dimension k et dans le tore carré de coté l_2 et de dimension k.

Lemme 1 – Notons par $G_l^k=TM(l)^k$ le tore carré de coté l et de dimension k. Alors il existe un algorithme de diffusion dans $G^k_{l_1\times l_2}$ vérifiant :

i) nombre d'étapes $\quad b_\alpha(G^k_{l_1\times l_2}) \leq b_\alpha(G^k_{l_1}) + b_\alpha(G^k_{l_2})$,
ii) longueur des chemins $\quad b_\delta(G^k_{l_1\times l_2}) \leq l_2\cdot b_\delta(G^k_{l_1}) + b_\delta(G^k_{l_2})$.

Preuve. De manière intuitive, on va décomposer le tore $G^k_{l_1\times l_2}$ en l_1^k sous-grilles ayant l_2^k sommets. Le sommet initiateur informera dans une première phase un élément de chaque sous-grille en suivant un protocole analogue à celui de $G^k_{l_1}$. Puis dans une seconde phase, les sommets connaissant l'information informeront en parallèle leur "voisinage local" suivant un protocole analogue à celui de $G^k_{l_2}$.

Plus formellement, considérons la bijection de $\mathbb{Z}_{l_1\times l_2}$ dans $\mathbb{Z}_{l_1}\times\mathbb{Z}_{l_2}$ qui à l'élément $z\in\{0,\ldots,l_1\times l_2-1\}$ associe le couple (x,y) avec $x\in\{0,\ldots,l_1-1\}$ et $y\in\{0,\ldots,l_2-1\}$ défini par $z=x\cdot l_2+y$. Par exemple avec $l_1=2$ et $l_2=3$, la bijection de $\mathbb{Z}_6$ dans $\mathbb{Z}_2\times\mathbb{Z}_3$ associe à $0\to(0,0)$; $1\to(0,1)$; $2\to(0,2)$; $3\to(1,0)$; $4\to(1,1)$; $5\to(1,2)$. Avec cette bijection, un arc de z à $z+1$ dans $C_{l_1\times l_2}$ devient l'arc de (x,y) à $(x,y+1)$ si $0\le y<l_2-1$ ou bien de (x,l_2-1) à $(x+1,0)$ si $y=l_2-1$. De même, un arc de z à $z-1$ dans $C_{l_1\times l_2}$ devient l'arc de (x,y) à $(x,y-1)$ si $0<y\le l_2-1$ ou bien de $(x,0)$ à $(x-1,l_2-1)$ si $y=0$. Avec l'exemple précédent dans C_6, l'arc allant de 5 à 0 dans $\mathbb{Z}_6$ devient l'arc allant de $(1,2)$ à $(0,0)$ dans $\mathbb{Z}_2\times\mathbb{Z}_3$. Plus généralement à l'élément $(z_1,z_2,\ldots,z_k)$ de $\mathbb{Z}^k_{l_1\times l_2}$, nous associerons l'élément $(x_1,y_1),\ldots,(x_i,y_i),\ldots,(x_k,y_k)$ avec $(x_1,\ldots,x_i,\ldots,x_k)\in\mathbb{Z}^k_{l_1}$ et

$(y_1, \ldots, y_i, \ldots, y_k) \in \mathbb{Z}_{l_2}^k$. Le graphe induit par les sommets de la forme $(x_1, 0), \ldots, (x_k, 0)$ pour tout $(x_1, \ldots, x_k) \in \mathbb{Z}_{l_1}^k$ forme un tore dilaté, c'est-à-dire qu'il est obtenu à partir de $G_{l_1}^k$ en remplaçant chaque arc par un chemin de longueur l_2. Plus exactement, l'arc allant de $(x_1, \ldots, x_i, \ldots, x_k)$ à $(x_1, \ldots, x_i + 1, \ldots, x_k)$ dans $G_{l_1}^k$ correspond à un chemin de longueur l_2 dans $G_{l_1 \times l_2}^k$ reliant $(x_1, 0), \ldots, (x_i, 0), \ldots, (x_k, 0)$ à $(x_1, 0), \ldots, (x_i + 1, 0), \ldots, (x_k, 0)$ via les sommets intermédiaires $(x_1, 0), \ldots, (x_{i-1}, 0), (x_i, y_i), (x_{i+1}, 0), \ldots (x_k, 0)$ en utilisant tout les y_i allant de 1 à $l_2 - 1$.

Dans une première phase on va appliquer un protocole identique au protocole de diffusion dans $G_{l_1}^k$ de manière à ce que le sommet $(0,0), \ldots, (0,0), \ldots, (0,0)$ informe tous les sommets $(x_1, 0), \ldots, (x_i, 0), \ldots, (x_k, 0)$ pour tout $(x_1, \ldots, x_k) \in \mathbb{Z}_{l_1}^k$. Pour cela, si dans $G_{l_1}^k$ à l'étape t le sommet $(x_1, \ldots, x_k)$ informe le sommet $(x'_1, \ldots, x'_k)$ via un chemin de longueur d ; alors dans $G_{l_1 \times l_2}^k$ à l'étape t le sommet $(x_1, 0), \ldots, (x_k, 0)$ informera le sommet $(x'_1, 0), \ldots, (x'_k, 0)$ via un chemin de longueur $d \cdot l_2$. Cette phase s'effectue donc en $b_\alpha(G_{l_1}^k)$ étapes avec un cœfficient en longueur de chemins égal à $l_2 \cdot b_\delta(G_{l_1}^k)$. Dans l'exemple avec $l_1 = 2$ et $l_2 = 3$ supposons que dans G_2^2 le sommet $(0,0)$ informe $(1,0)$ et $(1,1)$ par le chemin de longueur 2 utilisant le sommet intermédiaire $(0,1)$ (Cf. figure 2-a), alors dans G_6^2 le sommet $(0,0), (0,0)$ informera $(1,0), (0,0)$ via un chemin de longeur 3 et $(1,0), (1,0)$ via un chemin de longueur 6 (Cf. figure 2-b).

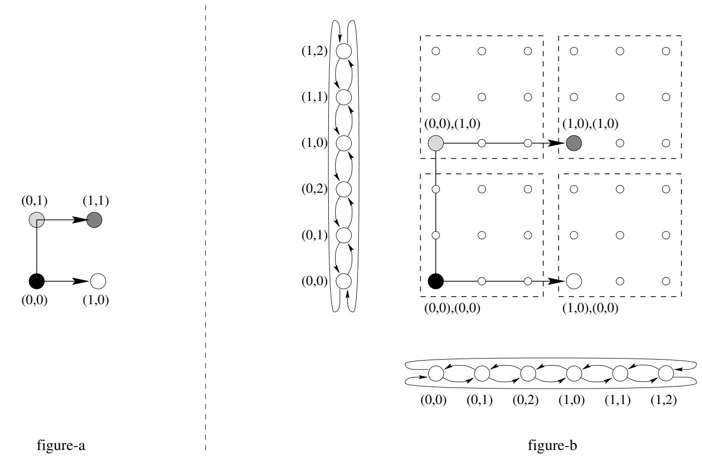

Fig 2 - *Exemple de première phase. La* `figure-a` *représente les chemins de communications issus du sommet* $(0,0)$ *dans* G_2^2*. La* `figure-b` *montre que les chemins de communications dans* G_6^2 *issus du sommet* $(0,0), (0,0)$ *correspondent aux schémas induits par ceux dans* G_2^2*, mais avec un facteur de dilatation de 3.*

Dans une seconde phase, les sommets informés $(x_1, 0), \ldots, (x_k, 0)$ vont diffuser en parallèle le message à leurs "voisins" en utilisant le protocole dans $G_{l_2}^k$. Intuitivement on voudrait que le sommet $(x_1, 0), \ldots, (x_k, 0)$ informe les l_2^k sommets $(x_1, y_1), \ldots,$

(x_k, y_k) pour tout $(y_1, \ldots, y_k) \in \mathbb{Z}_{l_2}^k$ de la même manière que le sommet $(0, \ldots, 0)$ informait les sommets $(y_1, \ldots, y_k)$ dans $G_{l_2}^k$. Ceci n'est pas possible tel quel car le graphe engendré par les sommets $(x_1, y_1), \ldots, (x_k, y_k)$ est une sous-grille non torique, et on ne peut pas appliquer strictement le protocole de $G_{l_2}^k$ si un chemin de la diffusion utilise un arc de "rebouclement" de la forme $(y_1, \ldots, y_i, \ldots, y_k), (y_1, \ldots, y_i + 1, \ldots, y_k)$ avec $y_i = l_2 - 1$ et $y_i + 1 = 0$ (ou un arc opposé). Néanmoins, on peut utiliser un arc aboutissant dans une sous-grille voisine et chaque sommet informera alors l_2^k sommets même si ceux-ci n'appartiennent pas tous à la même sous-grille. Formellement, supposons que dans $G_{l_2}^k$ à l'étape t, le sommet $(y_1, \ldots, y_k)$ informe le sommet $(y'_1, \ldots, y'_k)$ alors dans $G_{l_1 \times l_2}^k$ le sommet $(x_1, y_1), \ldots, (x_i, y_i), \ldots, (x_k, y_k)$ informera le sommet $(x_1^*, y'_1), \ldots, (x_i^*, y'_i), \ldots, (x_k^*, y'_k)$ avec $x_i^* = x_i$ si dans $G_{l_2}^k$ le chemin utilise seulement des arcs de la forme $(y_1, \ldots, y_i, \ldots, y_k)$ à $(y_1, \ldots, y_i \pm 1, \ldots, y_k)$ avec $0 < y_i < l_2 - 1$, ou bien $x_i^* = x_i + 1$ si le chemin utilise un arc de la forme $(y_1, \ldots, y_i, \ldots, y_k)$ à $(y_1, \ldots, y_i + 1, \ldots, y_k)$ avec $y_i = l_2 - 1$ et $y_i + 1 = 0$, ou enfin $x_i^* = x_i - 1$ si le chemin utilise un arc de la forme $(y_1, \ldots, y_i, \ldots, y_k)$ à $(y_1, \ldots, y_i - 1, \ldots, y_k)$ avec $y_i = 0$ et $y_i - 1 = l_2 - 1$. Dans notre exemple, supposons que dans G_3^2 le sommet $(0, 0)$ informe $(0, 1)$; $(1, 1)$ via le sommet $(1, 0)$; $(1, 2)$ via le sommet $(0, 2)$ et $(2, 1)$ via les sommets $(2, 0)$ et $(2, 2)$ (Cf. figure 3-a), alors dans G_6^2, le sommet $(0, 0), (0, 0)$ informera le sommet $(0, 0), (0, 1)$; $(0, 1), (0, 1)$ via le sommet $(0, 1), (0, 0)$, mais il informera le sommet $(0, 1), (1, 2)$ (ici $x_2^* = x_2 - 1$) via le sommet $(0, 0), (1, 2)$ et il informera le sommet $(1, 2), (1, 1)$ (ici $x_1^* = x_1 - 1$ et $x_2^* = x_2 - 1$) via les sommets $(1, 2), (0, 0)$ et $(1, 2), (1, 2)$ (Cf. figure 3-b).

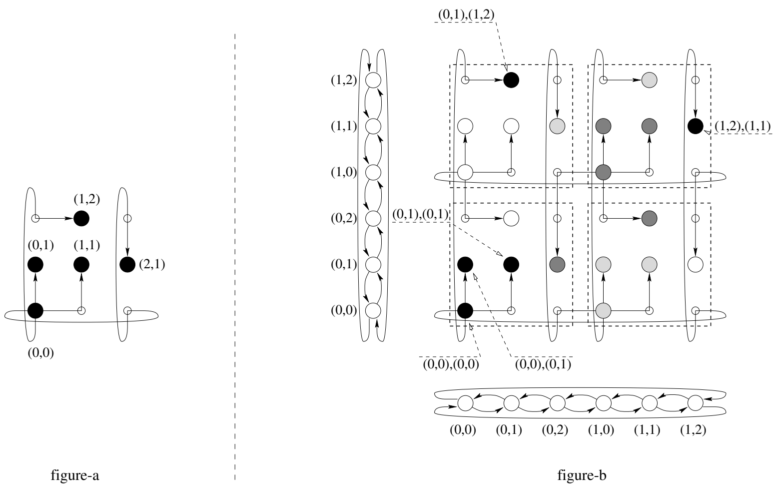

Fig 3 - *Exemple d'une étape de la seconde phase. La* `figure-a` *représente les chemins de communications issus du sommet* $(0, 0)$ *dans* G_3^2 *(en une étape). La* `figure-b` *montre que les chemins de communications dans* G_6^2 *(en une étape) qui sont issus des sommets* $(x_1, 0), (x_2, 0)$ *avec* $(x_1, x_2) \in \mathbb{Z}_2^2$ *correspondent aux schémas induits par ceux dans* G_3^2. *Au cours de cette étape, ces chemins sont tous arc-disjoints.*

De la même manière le sommet $(x_1, 0), (x_2, 0)$ informera les 4 sommets $(x_1, 0), (x_2, 1)$; $(x_1, 1), (x_2, 1)$; $(x_1, 1), (x_2 - 1, 2)$ et $(x_1 - 1, 2), (x_2 - 1, 1)$ (Cf. figure 3-b). A une étape t les chemins issus du sommet $(0, 0), \ldots, (0, 0)$ sont deux à deux disjoints, car les chemins dans $G^k_{l_2}$ étaient deux à deux disjoints. Les chemins issus d'un autre sommet $(x_1, 0), \ldots, (x_k, 0)$ sont obtenus par translation des chemins issus de $(0, 0), \ldots, (0, 0)$ et tous ces chemins sont bien deux à deux arc-disjoints. □

Cette première propriété nous permet de concevoir une méthode de diffusion récursive sur les tores carrés de coté l^i et de dimension k.

Proposition 1 – Soit $G^k_{l^i} = TM(l^i)^k$. Il existe un protocole de diffusion dans $G^k_{l^i}$ tel que $b_\alpha(G^k_{l^i}) \leq i \cdot b_\alpha(G^k_l)$ et $b_\delta(G^k_{l^i}) \leq \frac{l^i - 1}{l - 1} \cdot b_\delta(G^k_l)$.

Preuve. La preuve découle directement des équations de récurrences du lemme 1. Pour le nombre d'étapes, nous obtenons

$$\begin{aligned} b_\alpha(G^k_{l^i}) &\leq b_\alpha(G^k_l) + b_\alpha(G^k_{l^{i-1}}) \\ &\leq i \cdot b_\alpha(G^k_l) \end{aligned}$$

Pour la longueur des chemins, nous obtenons

$$\begin{aligned} b_\delta(G^k_{l^i}) &\leq l \cdot b_\delta(G^k_{l^{i-1}}) + b_\delta(G^k_l) \\ &\leq \frac{l^i - 1}{l - 1} \cdot b_\delta(G^k_l) \end{aligned}$$

□

Remarque 4 Lorsque l est impair, il est remarquable que du fait des équations de récurrence le rapport $\frac{b_\delta(G^k_{l^i})}{D(G^k_{l^i})}$ reste majoré par un rapport fixe égal à celui obtenu pour le premier tore, c'est-à-dire $\frac{b_\delta(G^k_l)}{D(G^k_l)}$.

Il ne reste plus qu'à initier correctement la récurrence. Pour cela il est nécessaire de trouver un bon protocole de diffusion dans les tores $TM(2k + 1)^k$.

3. Diffusion dans le tore $TM(2k + 1)^k$

3.1. *Propriétés requises*

Nous étudions dans cette partie les propriétés requises afin de diffuser en un nombre d'étapes optimal sur le tore $TM(2k + 1)^k$. Nous supposons dorénavant que les éléments représentatifs de $\mathbb{Z}_{2k+1}$ sont $\{-k, \ldots, -1, 0, 1, \ldots, k\}$.

Notation 3 S_t *représente l'ensemble des sommets qui connaissent l'information* **après l'étape** t.

Dans le tore $TM(2k+1)^k$ le nombre potentiel minimum d'étapes est $\log_{2k+1}(2k+1)^k = k$. Effectuer une diffusion optimale en k étapes revient à chercher des ensembles S_t ayant les propriétés suivantes.

Propriétés 1

- $S_0 = \{0\}$ est le sommet émetteur,
- $S_k = \mathbb{Z}_{2k+1}^k$ est l'ensemble de tous les sommets du graphe,
- S_{t-1} peut prévenir S_t en une étape le long de chemins arc-disjoints.
- $|S_t| = (2k+1) \cdot |S_{t-1}|$,
- $S_{t-1} \subset S_t$,

Ces propriétés sont nécessaires et suffisantes. Notons que les deux dernières sont impliquées par les deux premières car le tore est de degré $2k+1$.

Nous introduisons à ce niveau une définition importante que nous détaillerons dans les sections suivantes.

Définition 3 *Les sommets S_{k-1} sont dit être les éléments d'un* **code parfait de rayon 1**, *s'ils vérifient la propriété suivante : chaque sommet de S_k est soit un élément de S_{k-1} soit un voisin direct (i.e. à distance 1) d'exactement un et un seul élément de S_{k-1}.*

Avant de décrire le protocole général de diffusion sur les tores de dimension k, nous redonnons brièvement le protocole optimal de Peters et Syska [PET 96], sur le tore de dimension 2, sous une forme nouvelle qui nous a permis de le généraliser. Nous appliquerons également cette méthode aux tores de dimension 3.

3.2. *Diffusion dans* $TM(5)^2$

Proposition 2 − (Peters, Syska [PET 96]) Il existe un protocole de diffusion dans le tore $TM(5)^2$ tel que $b_\alpha(TM(5)^2) = \log_5(5^2) = 2$ et $b_\delta(TM(5)^2) = D(TM(5)^2) = 4$.

Nous redonnons brièvement la preuve de cette proposition avec l'approche qui nous permettra de généraliser par la suite. Pour cela, nous définissons les ensembles S_t comme suit.

$$\left\{ \begin{array}{lcl} S_2 & = & \mathbb{Z}_5^2, \\ S_1 & = & \{x \in S_2 \mid x_1 + 2x_2 = 0 \bmod 5\}, \\ S_0 & = & \{0\}. \end{array} \right.$$

A partir de ces ensembles S_t il est facile de vérifier sur la figure 4 que les propriétés 1 sont vérifiées.

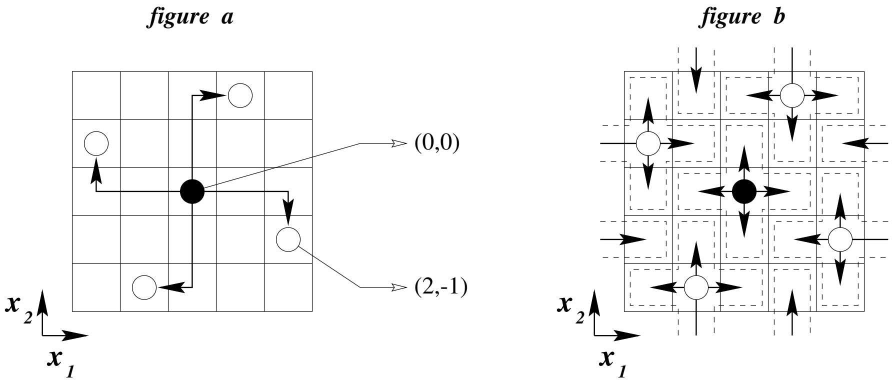

Fig 4 - *Les* `figures-a` *et* `b` *représentent le tore* $TM(5)^2$. *Le point central noir est le sommet émetteur* S_0, *c'est-à-dire le vecteur* 0. *L'ensemble des sommets noirs et du sommet blanc représente* S_1. *La* `figure-a` *montre que* S_0 *peut prévenir* S_1 *en une étape, le long de chemins arc-disjoints de longueur 3. La* `figure-b` *montre comment* S_1 *peut prévenir* S_2 *en une étape le long de chemins arc-disjoints de longueur 1.*

L'une des principales idées de cette méthode de diffusion est de remarquer que c'est à la dernière étape que rentre en jeu le plus grand nombre de communications. C'est donc à cette étape que la propriété "S_1 *informe* S_2 *le long de chemins arc-disjoints*" pourrait être la plus difficile à garantir. Mais cette propriété devient très facile à vérifier lorsque les sommets de S_1 sont pertinemment choisis de telle sorte que l'ensemble des sommets de S_1 et de leurs voisins directs forment l'ensemble des sommets de S_2 sans redondance. Cette propriété est vérifiée sur S_1 (Cf. figure 4-b). En fait, S_1 vérifie la définition 3 et est donc un code parfait.

3.3. *Diffusion dans* $TM(7)^3$

Proposition 3 – Il existe un protocole de diffusion dans le tore $TM(7)^3$ tel que $b_\alpha(TM(7)^3) = \log_7(7^3) = 3$ et $b_\delta(TM(7)^3) = \frac{10}{9}D(TM(7)^3)$.

Preuve. Comme sur le tore de dimension 2, nous commençons par définir les ensembles S_t.

$$\left\{\begin{array}{lcl} S_3 & = & \mathbb{Z}_7^3, \\ S_2 & = & \{x \in S_3 \mid x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 0 \bmod 7\}, \\ S_1 & = & \{x \in S_2 \mid x_1 + 3x_3 = 0 \bmod 7\}, \\ S_0 & = & \{0\}. \end{array}\right.$$

A partir de ces définitions et des chemins indiqués sur la figure 5, on vérifie que les propriétés 1 sont satisfaites pour les deux premières étapes avec des chemins de longueur 5 et 4 respectivement.

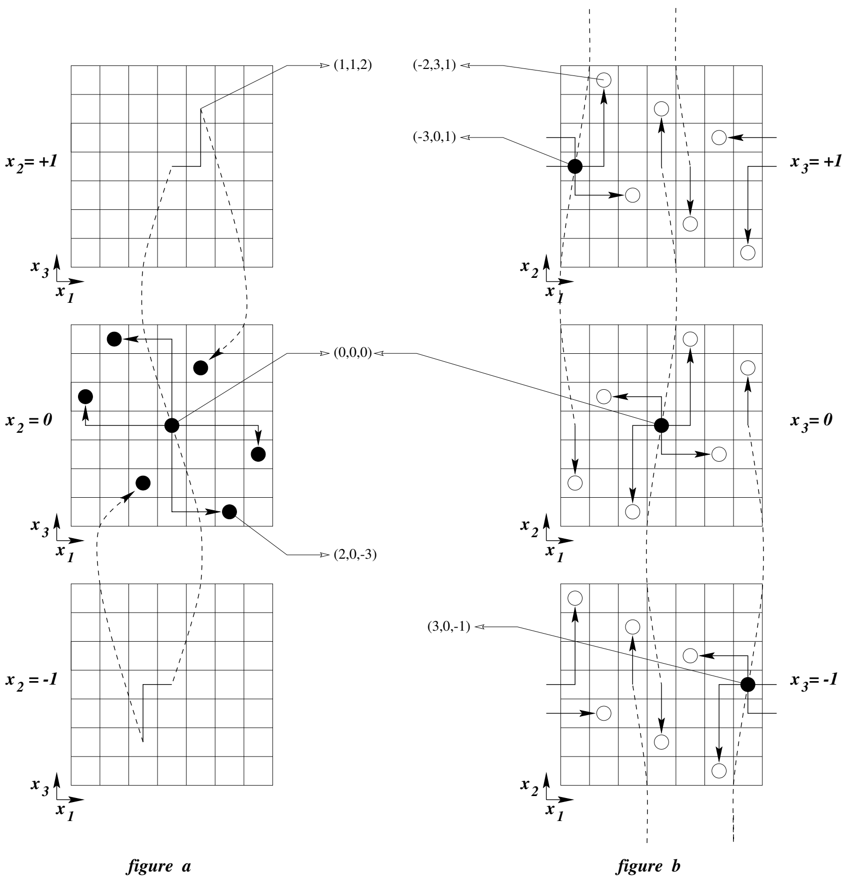

Fig 5 - *Schéma de diffusion dans le tore $TM(7)^3$. La* `figure-a` *représente la première étape de la diffusion. Le sommet central est le vecteur nul S_0. L'ensemble S_1 est représenté par les sommets noirs. Cette figure montre comment S_0 peut envoyer son information aux éléments de S_1 en utilisant des chemins arc-disjoints de longueur au plus 5. La* `figure-b` *décrit la deuxième étape de la diffusion. Les sommets blancs et noirs représentent les éléments de S_2. Cette figure montre le schéma de communication utilisé par les éléments de S_1 pour envoyer leur information sur les éléments de S_2. Chacun des 7 éléments de S_1 utilise les mêmes schémas de communications. Sur cette figure, seuls 3 des 7 éléments de S_1 sont représentés (en noir), néanmoins cela suffit pour remarquer que S_1 peut informer les éléments de S_2 le long de chemins arc-disjoints de longueur au plus 4.*

Ainsi, après cette deuxième étape, tous les sommets de S_2 ont été informés. Pour conclure le protocole par une dernière étape, il suffit de remarquer que S_2 est un code parfait. Ceci revient à dire que l'ensemble formé de chaque sommet de S_2 avec leurs voisins directs pave parfaitement le tore. La figure 6 représente un point de S_2 avec ses 6 voisins directs.

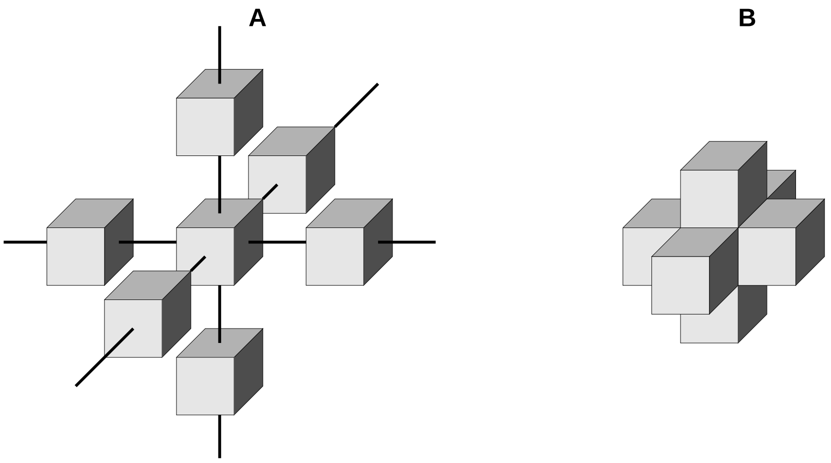

Fig 6 - *La* `figure-A` *représente un sommet de S_2 (ici au centre de la figure) relié à chacun de ses 6 voisins directs par un lien. Il en est de même pour la* `figure-B` *mais en omettant les liens. On peut voir cette* `figure-B`*, comme une structure de base en 3 dimensions. Il est possible d'emboîter 49 de ces structures pour former le tore $TM(7)^3$.*

Ainsi, la dernière étape s'effectue sans problème, puisque les sommets de S_2 n'ont plus qu'à envoyer leur information à chacun de leurs 6 voisins directs le long de chemins arc-disjoints de longueur 1. Le cœfficient $b_\delta(TM(7)^3)$ est donc égal à $5+4+1 = 10$. $\square$

4. Généralisation de la diffusion dans $TM(2k+1)^k$

Afin de diffuser dans le tore $TM(2k+1)^k$, nous commençons comme précédemment par définir les ensembles S_t. Pour obtenir une diffusion en un nombre optimum d'étapes, il est nécessaire que $S_k = \mathbb{Z}^k_{2k+1}$. Nous chercherons ensuite à définir l'ensemble S_{k-1} à partir de la remarque suivante.

Dans un protocole de diffusion utilisant les ensembles S_t, l'étape dans laquelle est impliqué le plus grand nombre de communications est la dernière, c'est-à-dire lorsque les sommets de S_{k-1} informent ceux de S_k. Il est alors intéressant de choisir un ensemble S_{k-1} réparti de telle sorte que l'on sache réaliser aisément les communications de cette étape. C'est le cas si l'ensemble S_{k-1} vérifie la définition 3. En effet, si S_{k-1} est un code parfait de rayon 1, alors l'union des éléments de S_{k-1} et de tous leurs voisins directs correspond à S_k. La dernière étape se réduit alors à l'envoi par chaque sommets de S_{k-1} du message à chacun de ses voisins, les chemins sont alors tous de longueur 1 et clairement arc-disjoints.

Remarque 5 La distance dans le tore correspond à la distance de Lee sur $\mathbb{Z}^k_{2k+1}$ (voir [MCW 77]). La propriété que nous recherchons sur S_{k-1} se traduit en théorie des codes ainsi : "S_{k-1} *est un code de Lee de rayon de recouvrement 1 de cardinalité* $(2k+1)^{k-1}$*, c'est donc un code parfait de rayon 1*".

De tels codes parfaits de rayon 1 sont bien connus, nous choisirons d'utiliser $S_{k-1} = \{x \in S_k \mid x_1 + 2x_2 + \cdots + kx_k = 0 \bmod (2k+1)\}$. Nous définissons alors les ensembles S_t inductivement comme suit : pour $k-1 \geq t \geq 1$, $S_{t-1} = \{x \in S_t \mid x_{t+1} = 0\}$. Les définitions des ensembles S_t se résument par :

$$\begin{cases} S_k & = & \mathbb{Z}_{2k+1}^k, \\ S_{k-1} & = & \{x \in S_k \mid \sum_{j=1}^{j=k} jx_j = 0 \bmod (2k+1)\}, \\ S_{t-1} & = & \{x \in S_t \mid x_{t+1} = 0\}, \text{ pour } k-1 \geq t \geq 1. \end{cases}$$

On peut facilement vérifier que les propriétés suivantes sont alors vraies : $S_0 = \{0\}$, $|S_t| = (2k+1) \cdot |S_{t-1}|$, et $S_{t-1} \subset S_t$. Pour que les ensembles S_t vérifient toutes les propriétés 1, il reste désormais à prouver que S_{t-1} peut informer S_t en une étape le long de chemins arc-disjoints. Nous le prouvons dans la proposition suivante et donnons en outre une borne supérieure relativement fine sur la longueur des chemins utilisés.

Proposition 4 – Pour $1 \leq t \leq k-1$, S_{t-1} peut informer S_t en une étape le long de chemins arc-disjoints de longueur au plus $k + 2 + \lceil \frac{k}{t} \rceil$.

Preuve. Tout d'abord, nous pouvons remarquer que S_t se partitionne en $2k+1$ classes que nous noterons $S_t(\alpha)$ avec $\alpha \in \mathbb{Z}_{2k+1}$ (les représentants étant pris là aussi dans $\{-k, \ldots, 0, \ldots, k\}$) définies par $S_t(\alpha) = \{x \in S_t \mid x_{t+1} = \alpha\}$. De fait, $S_t(\alpha)$ est l'intersection de S_t avec l'hyperplan défini par la condition $\{x_{t+1} = \alpha\}$. En particulier nous avons $S_t(0) = S_{t-1}$. Dans une première phase, $S_{t-1} = S_t(0)$ va informer, pour tout α, par une translation un ensemble de même cardinalité noté $U_t(\alpha)$ situé dans l'hyperplan $\{x_{t+1} = \alpha\}$. La deuxième phase consistera à translater en parallèle chaque $U_t(\alpha)$ sur $S_t(\alpha)$ au sein de l'hyperplan $\{x_{t+1} = \alpha\}$. A ce niveau, nous aurons besoin d'utiliser les $2k$ générateurs du tore. Ceux-ci sont définis comme les vecteurs e_i de dimension k tels que pour $1 \leq i \leq k$, $e_i = (0, \cdots, 0, +1, 0, \cdots, 0)$ a un $+1$ en $i^{ième}$ position, et $e_{-i} = -e_i$.

Pour réaliser la première phase nous utiliserons pour $\alpha \in \mathbb{Z}_{2k+1}$ les translations,

$$\begin{cases} x & \rightarrow & x + e_\alpha + \alpha e_{t+1} & \text{pour } \alpha \neq t+1 \text{ et } \alpha \neq -(t+1), \\ x & \rightarrow & x + (t+1)e_{t+1} & \text{pour } \alpha = t+1, \\ x & \rightarrow & x - (t+1)e_{t+1} & \text{pour } \alpha = -(t+1). \end{cases}$$

Les chemins associés sont 2 à 2 arc-disjoints, car pour un x donné on utilise des e_α distincts et que 2 sommets de S_{k-1} et donc a fortiori de $S_t(0)$, ne sont jamais adjacents.

Dans la seconde phase, rappelons que pour un α donné on travaille dans l'hyperplan satisfaisant la condition $\{x_{t+1} = \alpha\}$ et par conséquent il ne peut y avoir d'arcs en commun pour deux valeurs différentes de α. Pour un α fixé, il faut envoyer $U_t(\alpha)$ sur $S_t(\alpha)$. Comme $S_t(\alpha)$ est un translaté de $S_t(0)$, c'est aussi un translaté de $U_t(\alpha)$. Soit $w(\alpha)$ le vecteur de longueur minimale tel qu'il existe $z \in U_t(\alpha)$ et $x \in S_t(\alpha)$

avec $z + w(\alpha) = x$. Par linéarité nous avons donc $U_t(\alpha) + w(\alpha) = S_t(\alpha)$. On établit alors, depuis tout sommet de $U_t(\alpha)$ un chemin correspondant au vecteur $w(\alpha)$ obtenu par un routage utilisant les dimensions de $w(\alpha)$ dans un ordre fixé. Les chemins ainsi obtenus à partir de deux points distincts z et $y \in U_t(\alpha)$ respectivement vers $z + w(\alpha)$ et $y + w(\alpha)$, avec $z \neq y$, sont alors arc-disjoints. En effet, si un conflit apparaissait sur un arc uv, l'un des chemins zu ou yu serait strictement plus court que l'autre (dans le cas contraire, le routage étant fixé nous aurions $z = y$). Supposons qu'il s'agisse du chemin zu, alors le chemin $(zu), (uv), (v(y + w(\alpha)))$ serait strictement plus court que le chemin associé à $w(\alpha)$, ce qui contredirait la minimalité de $w(\alpha)$.

Afin de terminer la preuve, il nous reste à estimer la longueur des chemins utilisés. Dans la première phase, la longueur est au plus $|\alpha| + 1 \leq k + 1$. Dans la seconde phase, il faut majorer la longueur de $w(\alpha)$. Pour cela, nous allons exhiber une translation de $U_t(\alpha)$ vers $S_t(\alpha)$ tel que le chemin associé à la translation soit de longueur au plus $1 + \lceil \frac{k}{t} \rceil$, ce qui prouvera la proposition. Posons $f(x) = \sum_{j=1}^{j=k} jx_j$. Tout d'abord nous pouvons remarquer que si $x \in S_t(\alpha)$, alors $x_{t+1} = \alpha$, $x_{t+2} = \ldots = x_k = 0$ et $f(x) = 0$. Posons $V_t(\alpha) = U_t(\alpha) - e_\alpha$ pour $\alpha \neq \pm(t+1)$ et $V_t(\alpha) = U_t(\alpha)$ pour $\alpha = \pm(t + 1)$. Alors si $x \in V_t(\alpha)$, on a aussi $x_{t+1} = \alpha$, $x_{t+2} = \ldots = x_k = 0$, mais cette fois-ci $f(x) = \alpha(t+1)$. Nous allons donc chercher une translation de $V_t(\alpha)$ sur $S_t(\alpha)$ qui n'utilise seulement que les t premières dimensions. Comme $-k \leq \alpha(t + 1) \leq k$, posons $\alpha(t + 1) = \epsilon p$, avec $0 \leq p \leq k$ et $\epsilon = +1$ si $0 < \alpha(t + 1) \leq k$ et -1 sinon. Soit q et r tels que $p = qt + r$ avec $0 \leq r < t$. Alors $S_t(\alpha)$ peut être obtenu à partir de $V_t(\alpha)$ par la translation de vecteur $-(qe_{\epsilon t} + e_{\epsilon r})$. En effet, si $x \in V_t(\alpha)$, alors $f(x - (qe_{\epsilon t} + e_{\epsilon r})) = f(x) - (q\epsilon t + \epsilon r) = \epsilon p - (q\epsilon t + \epsilon r) = 0$. De plus comme $r < t$, les coordonnées en $t+1, t+2, \ldots, k$ n'ont pas changé. Donc le translaté de $x \in V_t(\alpha)$ est bien dans $S_t(\alpha)$. La longueur du chemin associé à la translation $-(qe_{\epsilon t} + e_{\epsilon r})$ est au plus $\lceil \frac{k}{t} \rceil$, car ou bien $r = 0$ et $q = \frac{p}{t} \leq \frac{k}{t}$ ou bien $r \neq 0$ et $q + 1 \leq \lceil \frac{p}{t} \rceil \leq \lceil \frac{k}{t} \rceil$. Donc la longueur du chemin entre $U_t(\alpha)$ et $S_t(\alpha)$ est majoré par $1 + \lceil \frac{k}{t} \rceil$ (le 1 correspond à la translation $-e_\alpha$ de $U_t(\alpha)$ sur $V_t(\alpha)$ lorsque $\alpha \neq \pm(t + 1)$). □

Ainsi, nous sommes en mesure d'énoncer le corollaire suivant.

Corollaire 2 – Il existe un protocole de diffusion sur le tore $TM(2k + 1)^k$ tel que $b_\alpha(TM(2k + 1)^k) = \log_{2k+1}(2k + 1)^k = k$ et $b_\delta(TM(2k + 1)^k) < k(k + 3 + \ln(k - 1)) - 2$.

Preuve. Il suffit de sommer, sur les $k - 1$ premières étapes du protocole de diffusion, la majoration de la longueur des chemins obtenue en proposition 4 et de rajouter 1 pour la dernière étape (car S_{k-1} est un code parfait de rayon1). Ainsi, $b_\delta(TM(2k + 1)^k) \leq k^2 + k - 2 + \sum_{t=1}^{t=k-1} \lceil \frac{k}{t} \rceil + 1$. Or, $\sum_{t=1}^{t=k-1} \lceil \frac{k}{t} \rceil \leq \sum_{t=1}^{t=k-1} (\frac{k}{t} + 1)$. Comme $\sum_{t=1}^{t=k-1} (\frac{k}{t} + 1) = 2k - 1 + k \sum_{t=2}^{t=k-1} \frac{1}{t} < 2k - 1 + k \int_1^{k-1} \frac{du}{u}$, alors, nous avons bien $2k - 1 + k \sum_{t=2}^{t=k-1} \frac{1}{t} < 2k - 1 + k \ln(k - 1)$. □

Remarque 6 On peut améliorer la longueur des chemins dans la proposition 4 en définissant les translations de $S_t(0)$ dans $U_t(\alpha)$ pour $\alpha \neq \pm(t + 1)$ par $x \to x + e_{\phi(\alpha)} +$

αe_{t+1} où $\phi(x)$ est une bijection de $\mathbb{Z}_{2k+1} - \{\pm(t+1)\}$ dans $\mathbb{Z}_{2k+1} - \{\pm(t+1)\}$. On peut alors choisir $\phi(\alpha)$ de manière à mieux minimiser la longueur d'un majorant de $w(\alpha)$. Une étude détaillée permet de ramener le cœfficient $b_\delta(TM(2k+1)^k)$ à $D(TM(2k+1)^k) + \sqrt{D(TM(2k+1)^k)}$.

5. Généralisation de la diffusion dans $TM((2k+1)^i)^k$

Dans les sections précédentes nous avons initié la récurrence en donnant des protocoles efficaces pour les tores $TM(2k+1)^k$. Il nous est désormais possible de fournir des protocoles efficaces pour les tores $TM((2k+1)^i)^k$. Nous pouvons ainsi établir le corollaire suivant.

Corollaire 3 – Il existe un protocole de diffusion dans le tore $TM((2k+1)^i)^k$ tel que $b_\alpha(TM((2k+1)^i)^k) = \log_{2k+1}((2k+1)^{i^k}) = ki$ et $b_\delta(TM((2k+1)^i)^k) \leq \frac{1}{k}(k+3+\ln(k-1) - \frac{2}{k}) \cdot D(TM((2k+1)^i)^k)$. En particulier pour le tore de dimension 3 il existe un protocole de diffusion tel que $b_\alpha(TM(7^i)^3) = \log_7(7^{i^3}) = 3i$ et $b_\delta(TM(7^i)^3) = \frac{10}{9}D(TM(7^i)^3)$.

Preuve. La preuve découle directement des équations de récurrence de la proposition 1 et des valeurs particulières obtenues pour les tores $TM(2k+1)^k$ (notamment lorsque k=3) permettant d'initier la récurrence. $\square$

6. Etude particulière pour le tore carré de dimension 4

Bien que l'étude précédente fournisse également un résultat pour le tore de dimension 4, nous montrons dans cette section, qu' il est possible d'obtenir, pour cette dimension, un algorithme optimal à la fois pour le nombre d'étapes et la longueurs des chemins.

L'étude de la diffusion sur le tore de dimension 4 devrait nous conduire à utiliser le tore $TM(9)^4$ contenant 6561 sommets. L'étude particulière de la diffusion sur ce tore apparaît bien entendu comme trop fastidieuse sur un si grand nombre de sommet, car il serait nécessaire d'exhiber les chemins arc-disjoints nécessaires à la réalisation de chacune des 4 étapes du protocole. Mais suite à une remarque de C. Delorme, l'étude devient triviale si l'on utilise le tore $TM(3)^4$ ne contenant lui que 81 sommets.

6.1. *Diffusion pour le tore* $TM(3)^4$

Ainsi, nous pouvons établir la proposition suivante.

Proposition 5 – Il existe un protocole de diffusion sur le tore $TM(3)^4$ tel que $b_\alpha(TM(3)^4) = \log_9(3^4) = 2$ et $b_\delta(TM(3)^4) = D(TM(3)^4)$.

Preuve. Nous commençons par définir la matrice M composée de 4 vecteurs colonnes appartenant chacun à $\mathbb{Z}_3^4$.

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Comme précédemment nous commençons par définir les ensembles S_t.

$$\begin{cases} S_2 & = & \mathbb{Z}_3^4, \\ S_1 & = & M \cup -M \cup \{0\}, \\ S_0 & = & \{0\}. \end{cases}$$

Les vecteurs du code S_1 sont les vecteurs colonnes des matrices M, $-M$ et du vecteur nul. Le lecteur pourra aisément vérifier que S_0 peut informer les 8 sommets de S_1 en une étape, le long de chemins arc-disjoints de longueur 3. La dernière étape ne pose pas de problème, car là encore il est facile de vérifier que S_1 forme un code parfait. Ainsi si chaque sommet de S_1 envoie son message à chacun de ces 8 voisins directs, alors S_1 informe S_2 le long de chemins arc-disjoints de longueur 1. □

Ce résultat résulte du fait que $M^2 = 0$ mod 3. Ainsi, la diffusion est optimale pour le nombre d'étapes et pour les longueurs des chemins.

6.2. *Généralisation de la diffusion pour le tore* $TM(9^i)^4$

En appliquant le résultat précédent à la proposition 1, nous sommes en mesure d'obtenir un protocole de diffusion optimum pour le nombre d'étapes et pour les longueurs des chemins sur les tore $TM(9^i)^4$.

Corollaire 4 – Il existe un protocole de diffusion dans le tore $TM(3^i)^4$ tel que $b_\alpha(TM(3^i)^4) = 2i$ et $b_\delta(TM(3^i)^k) = D(TM(3^i)^k)$.

Remarque 7 Comme le tore $TM(3^i)^4$ contient $3^{4i} = 9^{2i}$ sommets, alors le corollaire 4 implique l'optimalité de la diffusion sur le tore $TM(9^i)^4$.

Remerciements

Nous tenons à remercier J-C. Bermond, J. G. Peters ainsi que les arbitres pour leurs nombreux conseils et remarques utiles.

7. Références

[BAR 96] M. Barnett, D.G. Payne, R.A. van de Geijn, and J. Watts. « Broadcasting on Meshes with Wormhole Routing ». *Journal of Parallel and Distributed Computing*, 35(2): 111–122, June 1996.

[CAS] Jean de Casanice. « An overview of wormhole routing ». Laboratoire d'Informatique, Signaux et Systèmes de Sophia Antipolis CNRS URA 1376 - Equipe : *"Communication Algorithms at Sophia Antipolis - Nice"* (J-C. Bermond, E. Darrot, O. Delmas, E. Fleury, S. Perennes, M. Syska), En préparation.

[DEL 97] O. Delmas. « *Communications par commutation de circuits dans les réseaux d'interconnexion* ». Thèse de doctorat, Université de Nice - Sophia Antipolis, Laboratoire I3S-CNRS URA 1376, 1997.

[FEL 93] R. Feldmann, J. Hromkovic, S. Madhavapeddy, B. Monien, and P. Mysliwietz. « Optimal algorithms for dissemination of information in generalized communication modes ». Technical Report No. 115, Universität-Gesamthochschule-Paderborn, February 1993.

[FLE 96] E. Fleury. « *Communications, routage et architectures des machines à mémoire distribuée - Autour du routage wormhole* ». Thèse de doctorat, Université de Lyon, Ecole Normale Supérieure de Lyon, 1996.

[FRA 95] P. Fraigniaud. « *Vers un principe de localité pour les communications dans les réseaux d'interconnexion* ». Thèse d'habilitation, Université de Lyon, Laboratoire de l'Informatique du Parallèlisme - CNRS Ecole Normale Supérieure de Lyon, 1995.

[HO 95] C.T. Ho and M.Y. Kao. « Optimal broadcast in all-port wormhole-routed hypercube ». *IEEE Trans. on Parallel and Distributed Systems*, 6(2): 200–204, February 1995.

[KER 79] P. Kermani and L. Kleinrock. « Virtual cut-through: a new computer communication switching technique ». *Computers Networks*, 3: 267–286, 1979.

[KOD 96] T. Kodate. « *Communications stucturées dans les réseaux d'interconnexion* ». Thèse de doctorat, Université de Nice - Sophia Antipolis, Laboratoire d'Informatique, Signaux et Systèmes de Sophia Antipolis CNRS URA 1376, 1996.

[MCK 94] P. K. McKinley, Y-J. Tsai, and D. F Robinson. « A Survey of Collective Communication in Wormhole-Routed Massively Parallel Computers ». Technical Report MSU-CPS-95-35, Michigan State University, East Lansing, Michigan 48824, June 1994.

[MCW 77] F.J. McWilliams and N.J.A. Sloane. *The theory of Error-Correcting Codes*. North-Holland, 1977.

[NUG 88] S.F. Nugent. « The iPSC/2 direct-connect technology ». In G.C. Fox, editor, *Proceedings of 3rd Conference on Hypercube Concurrent Computers and Applications*, pages 51–60. ACM, 1988.

[PAR 94] J-Y. L. Park, S-K. Lee, and H-A. Choi. « Circuit-switched broadcasting in $d-$dimensional tori and meshes ». In *Proceedings Eighth Int'l Parallel Processing Symposium*, Cancun, Mexico, April 26-29 1994.

[PAR 96] J-Y. L. Park and H-A. Choi. « Circuit-switched broadcasting in torus and mesh networks ». *IEEE Trans. on parallel and distributed systems*, 7(2): 184–190, February 1996.

[PER 96] S. Perennes. « *Communications dans les réseaux d'interconnexion* ». Thèse de doctorat, Université de Nice - Sophia Antipolis, Laboratoire I3S-CNRS URA 1376, 1996.

[PET 96] J.G. Peters and M. Syska. « Circuit-Switched Broadcasting in Torus Networks ». *IEEE Trans. on Parallel and Distributed Systems*, 7(3), March 1996.

[RUM 94] Jean de Rumeur. *Communication dans les réseaux de processeurs*. Collection Etudes et Recherches en Informatique. Masson, Paris, 1994.

[SEI 90] C.L. Seitz. « Concurrent architectures ». In R. Suaya and G. Birtwist, editors, *VLSI and Parallel Computation*, pages 1–84. Morgan Kaufmann, 1990.