

Examen de graphes et applications, 2012-2013

Sujet de P. Dorbec

On note C_n le cycle à n sommets, P_n , le chemin à n sommets, K_n le graphe complet à n sommets. Pour un graphe G , on note $\Delta(G)$ le degré maximum du graphe.

1 Domination dans les produits de graphes

Question 1.1 *Donnez le nombre de domination des produits suivants de K_2 et C_n :*

- le produit cartésien $K_2 \square C_n$,
- le produit direct $K_2 \times C_n$,
- le produit fort $K_2 \boxtimes C_n$,
- le produit lexicographique $K_2 \circ C_n$,
- le produit lexicographique $C_n \circ K_2$.

Question 1.2 *Soit G un graphe quelconque d'ordre n . Quel est le degré maximum de $G \square C_m$? En déduire que*

$$\gamma(G \square C_m) \geq \frac{mn}{\Delta(G) + 3}.$$

Question 1.3 (plus difficile, à garder pour la fin) *Montrez que pour tous graphes G et H avec $|V(G)| = n$,*

$$\gamma(G \square H) \geq \frac{n}{\Delta(G) + 1} \gamma(H).$$

2 Retrait d'arêtes

Soit G un graphe, $e \in E(G)$ une arête de G . On note $G - e$ le graphe $G' = (V(G), E(G) \setminus \{e\})$.

Question 2.1 *Donnez un encadrement de $\gamma(G - e)$ en fonction de $\gamma(G)$. Justifiez chaque inégalité.*

Soit $b(G)$ le plus petit nombre d'arêtes qu'il faut retirer à un graphe G pour accroître son nombre de domination (parfois appelé *edge stability number* ou *bondage number* du graphe).

Question 2.2 *Calculez $b(P_n)$. Vous justifierez soigneusement votre réponse.*

Question 2.3 *Calculez $b(K_n)$. Vous justifierez soigneusement votre réponse.*

Question 2.4 *Montrez que $b(G) \leq \min\{\deg(u) + \deg(v) - 1 \mid uv \in E(G)\}$.*

Question 2.5 *Soit T un arbre. Montrez que $b(T) \leq 2$.*