THÈSE DE DOCTORAT DE MATHÉMATIQUES / INFORMATIQUE
DE L'UNIVERSITÉ JOSEPH FOURIER (GRENOBLE I)

préparée à l'Institut Fourier
Laboratoire de mathématiques
UMR 5582 CNRS - UJF

EMPILEMENTS ET RECOUVREMENTS DANS LES GRAPHES

Paul Dorbec

Soutenue à Grenoble le 19 novembre 2007 devant le jury :

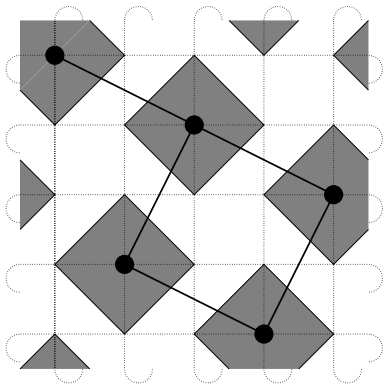
Nadia BRAUNER (Présidente)
Sylvain GRAVIER (Directeur de thèse)
Pranava K. JHA (Rapporteur)
Michel MOLLARD (Examinateur)
André RASPAUD (Rapporteur)
Stéphan THOMASSÉ (Examinateur)

Au vu des rapports de Pranava K. JHA et André RASPAUD.

Empilements et recouvrements dans les graphes

Paul Dorbec
Directeur : **Sylvain Gravier**

Équipe "Maths à Modeler",



Institut Fourier, BP 74
100 rue des Maths, 38402 Saint Martin d'Hères

RÉSUMÉ

Dans cette thèse, nous étudions deux problèmes de théorie des graphes largement étudiés ces trois dernières décennies : les codes correcteurs d'erreur et la domination.
Nous étudions d'abord deux généralisations des codes correcteurs d'erreurs : les codes parfaits sur des alphabets mixtes et les codes pondérés de rayon un. Ces problèmes ont beaucoup été étudiés sur la métrique de Hamming. Nous les étudions dans la métrique de Lee, et nous montrons des résultats aussi bien d'existence que d'inexistence. Nous montrons aussi que le rapport de dualité entre la domination et les codes est fort pour la grille carrée lorsque l'on considère des boules sans le centre.
Puis, nous étudions la domination dans les produits de graphes. Depuis que Vizing a conjecturé en 1968 que la domination est surmultiplicative pour le produit cartésien de graphes, les relations entre des variantes du nombre de domination d'un produit de graphes et ses facteurs ont attiré beaucoup d'attention. Après avoir donné quelques bornes sur le nombre de domination totale du produit direct de graphes, nous déterminons le nombre de domination de puissance des produits de chemins. Puis, nous montrons une conjecture "à la Vizing" pour le nombre de domination totale supérieure du produit cartésien.
Ensuite, nous étudions la domination avec une approche structurelle. En continuation de l'étude de Favaron et Henning, nous fournissons plusieurs bornes supérieures sur le nombre de paire-domination des graphes sans étoiles, pour chaque nombre de branches, et des graphes sans P_5. Nous proposons aussi des familles infinies de graphes pour lesquels ces bornes sont atteintes.
Enfin, nous comparons la domination totale supérieure et la paire-domination supérieure, deux variantes de la domination qui ont attiré l'attention récemment, et nous donnons des bornes précises pour les arbres.

MOTS-CLÉS

Domination, codes correcteurs, théorie des graphes, combinatoire

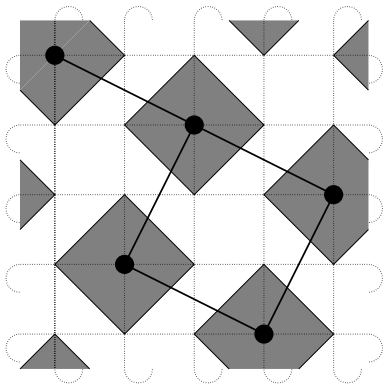
CLASSIFICATION MATHÉMATIQUE

05B40, 05C69, 05C70, 94B05.

Packings ang coverings in graphs

Paul Dorbec
Supervisor : **Sylvain Gravier**

Team "Maths à Modeler",



Institut Fourier, BP 74
100 rue des Maths, 38402 Saint Martin d'Hères

ABSTRACT

In this thesis, we study two problems largely studied in graph theory over the last three decades : error correcting codes and domination.
First, we study two generalizations of error correcting codes : perfect codes on mixed alphabets and weighted perfect codes of radius one. These problems have been largely studied in the Hamming metric. We study them in the Lee metric and prove both existence and inexistence results. We also show that domination and codes satisfy strong duality on the square grid for balls without center.
Then, we study domination in products of graphs. Since Vizing conjectured in 1968 that domination is supermultiplicative on the cartesian product, relations between variants of the domination number of some product of graphs and of its factors drew much attention. After giving new bounds on the total domination number of the direct product of graphs, we determine the power domination number of products of paths. Then, we prove a Vizing like conjecture for upper total domination in cartesian product.
Next, we study domination on a structural point of view. Carrying on a study from Favaron and Henning, we give upper bounds on the paired-domination number of star-free graphs for any number of branches and of P_5-free graphs. We also give infinite families of graphs for which these bounds are sharp. We finally compare upper total and upper paired-domination, two variations on domination which attracted quite some attention recently, and we give precise bounds for trees.

KEY-WORDS

Domination, error correcting codes, graph theory, combinatorics

MATHEMATICAL CLASSIFICATION

05B40, 05C69, 05C70, 94B05.

Remerciements

Avant tout, je remercie les membres de mon jury qui ont pris le temps de lire ma thèse et d'assister à la soutenance, en ce début d'année toujours chargé pour les enseignants-chercheurs. En particulier, je tiens à remercier Pranava K. Jha, Stéphan Thomassé et André Raspaud qui sont venus de loin au risque de ne pas pouvoir s'en retourner, vu la grève des transports. Je remercie aussi Nadia Brauner qui a accepté la fonction de présidente du jury, et qui a su gérer une situation d'autorité ambigüe (même si la soutenance est passée, je suis toujours d'accord pour répondre à ses questions sur les règles du rugby). Merci aussi à Michel Mollard, avec qui nous avons essayé tous les restaurants de Maribor au cours de semaines néanmoins très studieuses. Je vois aujourd'hui notre collaboration sur la poutre comme mon tutorial pour la rédaction d'article.

Je tiens à remercier très chaleureusement Sylvain Gravier, mon directeur de thèse. Avec son ton toujours railleur, il m'a accompagné dans ma découverte du monde de la recherche, autant du point de vue de la démarche de recherche que pour les autres tâches du chercheur, comme l'organisation de rencontres ou les moins avouables recherches de financements, si présente dans le quotidien du chercheur. J'ai beaucoup de chance de l'avoir eu comme directeur de thèse et il est aujourd'hui tout autant un ami à mes yeux. J'espère que nous aurons encore souvent l'occasion de travailler ensemble, même s'il est peu probable que je revienne à Grenoble tout de suite.

Je souhaite remercier aussi tous mes coauteurs, qui m'ont souvent donné l'occasion de découvrir leur pays. Je remercie en particulier Sandi Klavžar, Simon Špacapan et Boštjan Brešar, mais aussi Michael A. Henning et sa famille, pour l'accueil qu'ils m'ont réservé.

Je tiens à remercier mes deux cobureaux, Eric et Laurent, et tous mes amis dans les différents laboratoires où je suis passé (je ne citerai pas la trop longue liste de ceux de l'ancien laboratoire Leibniz et des midi-jeux, soirées-jeux, foots, etc...). Je remercie aussi les "sud-africains", notamment Kyle, Gaëtan, Pennine et Petrovius. Ce sont eux tous qui ont fait de mon lieu de travail un endroit convivial et détendu.

Je souhaite aussi remercier les anciens Grenoblois qui sont (presque tous) par monts et par vaux, comme Beegee et Gaëlle, Manu, Bibi, Lionel et Coralie, Miguel et Solenne ; ils sont un peu devenus ma "family's" pendant

mes premières années à Grenoble. Je remercie aussi les membres du Water-Polo, en particulier Pierre, Remy et Aude qui ont si souvent été nos hôtes, et Etienne et Anne-Lyse, pour une collocation inhabituelle !

Enfin, je souhaite remercier mes parents, frère et soeurs pour leur soutien (dont mes relecteurs), mais aussi mes beaux-parents qui m'ont tant soutenu, et enfin Émilie, sans doute celle qui a le plus de mérite.

Introduction

Les problèmes étudiés dans cette thèse portent sur les notions de codes et de domination. Fréquemment, pour vulgariser le problème, j'ai eu recours à l'image suivante. Considérons un ensemble de villages dans une région donnée. On les représente par des points (sommets), et s'il existe une route pas trop longue entre deux villages, on les relie par un trait symbolisant cette route (arête). On obtient ainsi une carte routière très simplifiée, c'est un graphe.

Maintenant, il nous faut organiser la défense contre les incendies dans cette région. Pour cela, nous allons placer des casernes de pompiers dans certains villages. On ne peut pas placer une caserne dans chaque village, cela coûterait trop cher, et il n'y a pas assez de pompiers. Néanmoins, il faut que chaque village soit relativement proche d'une caserne, par exemple, à un seul trait de distance. Nous allons donc choisir un ensemble de villages le plus petit possible, où nous allons placer des casernes. Voici le problème de la domination, le nombre minimum de casernes nécessaires est appelé le *nombre de domination* ou nombre de *recouvrement* du graphe.

De façon très similaire, sur la même région, il nous faut organiser le retraitement des déchets. Compte-tenu de la quantité de déchets que chacun produit, il est important de placer autant de déchetteries que possible. Mais ces usines ont une mauvaise côte, et les habitants d'un village n'accepteront jamais d'avoir plus d'une déchetterie dans leur voisinage. Par conséquent, pour un village donné, le nombre de déchetteries que contient ce village et ses voisins doit être au plus un. Ce problème est exactement le problème de construction de codes correcteurs d'une erreur, quand le graphe a une forme appropriée. Le nombre maximum de déchetteries que l'on peut placer est le nombre d'*empilement* du graphe.

Le problème consistant à maximiser le nombre de villages où on place une déchetterie est le problème dual du problème des pompiers. Comparons les solutions de chaque problème : dans le voisinage de chaque caserne de pompiers que l'on a placée, il ne peut y avoir qu'une déchetterie. Autrement, les villageois de ce village seraient mécontents. De plus, tout village est dans le voisinage d'une caserne. Par conséquent, on peut en déduire que le nombre de déchetteries que l'on a réussi à placer ne dépasse pas le nombre de casernes de pompiers qui ont été nécessaires. Ceci est du à la dualité

des deux problèmes. En particulier, ce résultat est vrai pour les ensembles optimaux, et on obtient le lemme de dualité suivant :

Lemme (Dualité) *Pour un graphe donné G,*

$$\min_{C \text{ recouvrement de } G} |C| \geq \max_{P \text{ empilement de } G} |P|$$

Ce premier lemme que l'on vient de donner est un peu l'idée initiatrice de ce sujet de thèse. Les deux problèmes, de codes (empilement) et de domination (recouvrement) sont proches, et l'étude de l'un peut donner des idées pour l'autre.

Ces problèmes ont de nombreuses applications, bien au delà des histoires de pompiers et de déchetteries. Pour la domination, on peut trouver de nombreuses applications dans le domaine des réseaux (par exemple, choisir des relais radio où placer des liaisons satellite) ou dans les problèmes d'affectations et d'emplois du temps (sur un graphe biparti reliant d'un côté des candidats à leurs compétences de l'autre côté, choisir un minimum d'employés qui couvrent toutes les compétences). Pour les problèmes d'empilements, l'application principale correspond aux codes correcteurs d'erreur : imaginons que les sommets du graphe soient des signaux que l'on peut émettre. On relie deux signaux si une erreur de transmission pourrait transformer le premier signal en le second, et vice-versa. Ensuite, on choisit de n'émettre que des signaux parmi ceux d'un empilement (code) dans le graphe. Si une erreur se produit, le recepteur recevra un signal qui n'a pas été choisi dans le code, et saura qu'une erreur s'est produite. Mais un seul signal du code sera voisin du signal reçu ; il pourra donc *deviner* le signal que l'émetteur avait l'intention de transmettre.

Après avoir fourni les définitions essentielles dans le chapitre 1, nous commencerons par fournir des résultats pour les problèmes de codes (chapitre 2). Puis, après un court chapitre 3 reliant les codes à la domination, nous proposerons des résultats de domination liés à la conjecture de Vizing (chapitre 4), nous proposerons des bornes pour la domination plus liées à la structure des graphes dans le chapitre 5. Enfin, avant de conclure cette thèse, nous évoquerons une approche plus ludique, *la chasse à la bête* (chapitre 6).

Table des matières

Chapitre 1

Définitions

Ce premier chapitre est consacré aux définitions des principales notions utilisées dans cette thèse. Pour chacune d'entre elles, nous essayerons de donner une définition formelle ainsi qu'une définition intuitive.

La théorie des graphes est très liée à la théorie des ensembles, comme toute discipline combinatoire. Nous en donnerons quelques définitions et notations spécifiques à cette thèse dans la partie 1.1. La partie 1.2 rappelle les définitions de la théorie des graphes. La partie 1.3 donne les définitions relatives aux codes, et la partie 1.4 celles relatives à la domination.

1.1 Quelques notations dans les ensembles

Notations des opérations usuelles

- On note $\triangle$ la *différence symétrique* de deux ensembles, c'est à dire que $S \triangle S' = (S \setminus S') \cup (S' \setminus S) = (S \cup S') \setminus (S \cap S')$.
- Soit S un ensemble, X un sous-ensemble de S, on note $\overline{X}$ le complémentaire de X dans S, c'est à dire $S \setminus X$.

Partition

Soit S un ensemble. Une *partition* de S est un ensemble de sous-ensembles de S, notés $S_1, S_2, \ldots, S_n$ tels que

- tout élément de S est dans un sous-ensemble S_i, c'est à dire $\bigcup S_i = S$.
- les sous-ensembles sont disjoints : $\forall i, j, S_i \cap S_j = \emptyset$
- chacun des S_i est non vide : $\forall i, S_i \neq \emptyset$

On appelle *partition faible* un ensemble qui vérifie les deux premières conditions mais pas nécessairement la troisième, certains sous-ensembles peuvent donc être vides.

Ensemble minimal/maximal et ensemble minimum/maximum

Soit une propriété P. On dit qu'un ensemble S est *minimal* pour la propriété P si aucun sous-ensemble strict de S ne vérifie cette propriété. Un ensemble est dit *minimum* pour la propriété P si aucun ensemble plus petit (pas nécessairement un sous-ensemble) ne vérifie la propriété. Ainsi, un ensemble minimum est nécessairement minimal, mais l'inverse n'est pas vrai en général.

De même, on dit qu'un ensemble S est maximal pour la propriété P si aucun ensemble contenant S et différent de S ne vérifie la propriété P. Il est *maximum* si aucun ensemble plus grand que S (sans nécessairement le contenir) ne vérifie P.

Poids d'une fonction

Soit une fonction d'un ensemble fini S dans l'ensemble des entiers naturels $\mathbb{N}$, $f\colon S \to \mathbb{N}$. Le *poids* de la fonction f est $w(f) = \sum_{x \in S} f(x)$. Pour un sous-ensemble $S' \subseteq S$, on définit le poids de la fonction sur ce sous-ensemble par $f(S') = \sum_{x \in S'} f(x)$. Ainsi, $w(f) = f(S)$.

1.2 Les graphes

1.2.1 Définitions classiques

On étudie des graphes simples $G = (V, E)$, où V est un ensemble de sommets, et E est un ensemble de paires de sommets appelées arêtes. Pour un graphe G, on notera $V(G)$ son ensemble de sommets et $E(G)$ son ensemble d'arêtes, ou simplement V et E si le contexte est clair.

L'*ordre* du graphe G est le nombre de ses sommets $|V|$. Un graphe est dit *trivial* s'il ne possède qu'un seul sommet.

On note $uv \in E$ l'arête joignant les sommets u et $v \in V$, $u \neq v$. u et v sont appelés les *extrémités* de l'arête. On dit que deux sommets u et v sont *incidents* ou *voisins* s'il existe une arête les reliant, c'est à dire si $uv \in E$.

Degré

On appelle *degré* d'un sommet u dans G, noté $d_G(u)$ (ou $d(u)$ quand le contexte est explicite), le nombre de ses voisins. Le *degré minimum* d'un graphe G, noté $\delta(G)$, est le minimum des degrés de ses sommets. De même, le *degré maximum* de G, noté $\Delta(G)$, est le maximum des degrés de ses sommets. On a :

$$\delta(G) = \min_{v \in V} d(v) \quad \text{et} \quad \Delta(G) = \max_{v \in V} d(v)$$

Sommets caractéristiques

On appelle *sommet isolé* un sommet de degré 0. Un sommet de degré 1 est appelé une *feuille*, ou encore *sommet pendant*. L'unique sommet qui est adjacent à une feuille est appelé son *sommet support*.

Voisinage

On appelle *voisinage* (*ouvert*) du sommet u, noté $N_G(u)$ l'ensemble des sommets v incidents à u dans G. Le plus souvent, le contexte étant explicite, on notera simplement $N(u)$. On a $|N(u)| = d(u)$. Le *voisinage fermé* ou *étendu* du sommet u désigne l'ensemble $N[u] = N(u) \cup \{u\}$.

On parle aussi du voisinage (ouvert) d'un sous-ensemble $S \subseteq V$, noté $N(S)$, pour désigner l'union des voisinages (ouverts) des sommets de S. De même, le voisinage fermé $N[S]$ de S est l'union des voisinages fermés des sommets de S, autrement dit $N[S] = N(S) \cup S$.

Sous-graphe

Soit S un sous-ensemble de sommets du graphe, $S \subseteq V$. Le *sous-graphe de G induit* sur S, noté $G[S]$, est le graphe ayant pour ensemble de sommets S et pour ensemble d'arêtes toutes les arêtes de E dont les extrémités sont dans S. Soit v un sommet de V. On notera $G - v$ le sous-graphe $G[V \setminus \{v\}]$.

Pour un graphe donné G', on dit qu'un graphe est *sans* G' si G' n'est pas un de ses sous-graphes induits.

Graphe partiel

Un *graphe partiel* de G est un graphe obtenu en enlevant à G une ou plusieurs arêtes. Autrement dit, un graphe partiel de G est un graphe H ayant le même ensemble de sommets : $V(H) = V(G)$, et pour ensemble d'arêtes un sous-ensemble de $E(G)$: $E(H) \subset E(G)$.

Connexité

Un *chemin* du sommet u au sommet v est une suite $(x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n)$ de sommets tels que $x_0 = u$, $x_n = v$, et deux sommets consécutifs sont adjacents, c'est à dire que $x_i x_{i+1} \in E$ pour tout i, $0 \leq i < n$. Le paramètre n est appelé *longueur* du chemin.

Un graphe est *connexe* si toute paire de sommets du graphe est reliée par un chemin. Si le graphe est non connexe, une *composante connexe* est un sous-ensemble de sommets C maximal tel que le sous-graphe induit $G[C]$ est connexe. Nous noterons $\#cc(G)$ le nombre de composantes connexes du graphe G.

Distance

La *distance* entre deux sommets u et v, notée $d(u, v)$, est la longueur du plus court chemin reliant ces deux sommets, s'il existe. S'il n'existe pas de chemin entre u et v, c'est à dire s'ils ne sont pas dans la même composante connexe, on dit que la distance $d(u, v)$ est infinie. La distance entre deux sommets voisins est 1.

Le *diamètre* d'un graphe est le maximum des distances entre deux de ses sommets.

$\mathcal{R}$-boule

Soit $\mathcal{R}$ un sous-ensemble de $\mathbb{N}$. On appelle $\mathcal{R}$-boule de centre u l'ensemble des sommets v tels que $d(u, v) \in \mathcal{R}$. En particulier, le voisinage fermé $N[u]$ est la $\{0, 1\}$-boule de centre u, et le voisinage ouvert $N(u)$ est la $\{1\}$-boule de centre u.

Complémentaire

Soit G un graphe quelconque. Le *complémentaire* du graphe G, noté $\overline{G}$, est le graphe avec le même ensemble de sommets $V(G)$, mais où uv est une arête si et seulement si ce n'est pas une arête de G, c'est à dire que $E(\overline{G}) = \overline{E(G)}$.

Couplage

Un *couplage* dans un graphe G est un ensemble d'arêtes (couples) aux extrémités distinctes : chaque sommet est donc incident à au plus une arête du couplage. Un *couplage parfait* M est un couplage de G tel que tout sommet de G est incident à une arête de M. Dans un couplage M, deux sommets reliés par une arête du couplage seront dits *couplés*. On dira aussi qu'ils sont *partenaires* l'un de l'autre.

Stabilité

On dit d'un sous-ensemble de sommets qu'il est *stable* si aucun de ses sommets ne sont adjacents. Le *nombre de stabilité*, noté $\alpha(G)$, est le cardinal maximum d'un stable de G.

1.2.2 Les produits de graphes

Nous présentons ici les différents types de produits de graphes utilisés dans cette thèse, illustrés Figure 1.1. Pour des informations plus complètes sur les produits de graphes, on pourra se référer à [50].

Dans chacun des produits présentés, $G * H$, les sommets du graphes produits sont des paires de sommets (u, v) où $u \in V(G)$ et $v \in V(H)$. On a

donc $V(G * H) = V(G) \times V(H)$. De plus, pour un sommet $(u, v) \in V(G) \times V(H)$, nous dirons que u et v sont ses coordonnées dans les graphes G et H. Tous les produits étudiés sont associatifs, et seul le produit lexicographique n'est pas commutatif. Avant de définir chaque produit, nous présentons la notion de fibre.

Fibres

Soient $*$ l'un des produits présentés ci-après, G et H deux graphes, x un sommet de G et y un sommet de H. On appelle *H-fibre* associée à x, noté ${}^{x}H$, le sous-graphe de $G * H$ induit sur l'ensemble de sommets $\{x\} \times V(H)$, c'est à dire l'ensemble des sommets dont la première coordonnée est x. De même, la *y-fibre* G^y est le sous-graphe induit sur l'ensemble de sommets $V(G) \times \{y\}$.

Produit cartésien

Le produit cartésien est le produit de graphes que nous étudierons le plus dans la suite. Étant donnés deux graphes G et H, le *produit cartésien* $G \,\square\, H$ est le graphe ayant pour ensemble de sommets $V(G) \times V(H)$ et dont deux sommets (x_1, y_1) et (x_2, y_2) sont reliés par une arête si et seulement si soit $x_1x_2 \in E(G)$ et $y_1 = y_2$, soit $y_1y_2 \in E(H)$ et $x_1 = x_2$. Autrement dit, deux sommets du produit $G \,\square\, H$ sont adjacents si et seulement si les sommets de l'une de leurs coordonnées sont égaux et ceux de l'autre coordonnée sont adjacents. On utilise le symbole $\square$ pour désigner ce produit car il représente le graphe produit de deux arêtes.

Dans la suite, nous utiliserons la notation G^n pour désigner la puissance $n^{\text{ème}}$ du graphe G par le produit cartésien, à savoir $G \,\square\, G \,\square\, \ldots \,\square\, G$ (n fois).

Avec le produit cartésien, toute H-fibre de $G \,\square\, H$ est isomorphe à H, et toute G-fibre de $G \,\square\, H$ est isomorphe à G. Enfin, le degré d'un sommet dans le produit cartésien est la somme des degrés de ses coordonnées dans les facteurs :

$$d_{G \,\square\, H}(u, v) = d_G(u) + d_H(v)$$

Produit direct/croisé

Étant donnés deux graphes G et H, le *produit direct* $G \times H$ est le graphe ayant pour ensemble de sommets $V(G) \times V(H)$ et dont deux sommets (x_1, y_1) et (x_2, y_2) sont reliés par une arête si et seulement si $x_1x_2 \in E(G)$ et $y_1y_2 \in E(H)$. Autrement dit, deux sommets du produit $G \times H$ sont adjacents si et seulement si dans chaque facteur, leurs coordonnées sont des sommets adjacents. Là encore, on utilise le symbole $\times$ pour désigner ce produit car il représente le graphe produit de deux arêtes. On pourra remarquer que

$$E(G \,\square\, H) \cap E(G \times H) = \emptyset$$

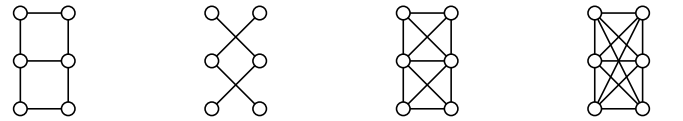


FIG. 1.1 – Illustrations des différents produits.

Les fibres du produit direct de graphes sont stables. Enfin, le degré d'un sommet dans le produit direct est le produit des degrés de ses coordonnées dans les facteurs :

$$d_{G\times H}(u,v) = d_G(u)d_H(v)$$

Produit fort

Étant donnés deux graphes G et H, le *produit fort* $G \boxtimes H$ est le graphe ayant pour ensemble de sommets $V(G) \times V(H)$ et dont deux sommets $(x_1, y_1) \neq (x_2, y_2)$ sont reliés par une arête si et seulement si i) $x_1 = x_2$ ou $x_1x_2 \in E(G)$ et ii) $y_1 = y_2$ ou $y_1y_2 \in E(H)$, c'est à dire si les sommets sont adjacents ou égaux dans chaque coordonnée. On remarquera que

$$E(G \boxtimes H) = E(G \square H) \cup E(G \times H)$$

Là encore, on utilise le symbole $\boxtimes$ pour désigner ce produit car il représente le graphe produit de deux arêtes.

Les fibres du produit direct de graphes sont identiques à celle du produit cartésien, c'est à dire isomorphes au facteur correspondant. Enfin, le degré d'un sommet dans le produit fort vérifie :

$$d_{G\boxtimes H}(u,v) = d_G(u) + d_H(v) + d_G(u)d_H(v)$$

Produit lexicographique

Étant donnés deux graphes G et H, le *produit lexicographique* $G \circ H$ est le graphe ayant pour ensemble de sommets $V(G) \times V(H)$ et dont deux sommets $(x_1, y_1) \neq (x_2, y_2)$ sont reliés par une arête si et seulement si i) $x_1x_2 \in E(G)$ ou ii) $x_1 = x_2$ et $y_1y_2 \in E(H)$, c'est à dire quand les sommets sont adjacents pour la première coordonnée ou quand ils sont égaux pour la première coordonnée et adjacents pour la seconde. On a $E(G \boxtimes H) \subseteq E(G \circ H)$.

Ce produit est le seul qui ne soit pas commutatif. Les fibres du produit lexicographique de graphes sont identiques à celle du produit cartésien, c'est

à dire isomorphes au facteur correspondant. Enfin, le degré d'un sommet dans le produit lexicographique vérifie :

$$d_{G\circ H}(u,v) = d_G(u)|V(H)| + d_H(v)$$

1.2.3 Les familles de graphes

Graphe régulier, Stable, Clique

Étant donné k un entier positif, un graphe est dit *k-régulier* si tous ses sommets ont pour degré k. Deux familles de graphes réguliers sont à distinguer. Les graphes 0-réguliers sont appelés des *stables*, et sont des graphes sans arête. Un graphe d'ordre n $(n-1)$-régulier est appelé *graphe complet* ou *clique*. Il comporte toutes les arêtes possibles, et est noté K_n.

Chemin

Le *chemin* de longueur $n-1$ est le graphe à n sommets $\{x_1, \ldots, x_n\}$ dont les arêtes sont $x_i x_{i+1}, 1 \leq i < n$. On le note P_n et on le désigne par la suite de ses sommets $(x_1, \ldots, x_n)$. Les sommets x_1 et x_n sont les *extrémités* du chemin. Par extension, on définit le chemin infini P_∞ comme étant le graphe ayant pour ensemble de sommets $\{x_i \mid i \in \mathbb{Z}\}$ et pour arêtes $x_i x_{i+1}, i \in \mathbb{Z}$.

Cycle

Le *cycle* de longueur n, noté C_n, est le seul graphe 2-régulier connexe à n sommets. On peut désigner le cycle par la suite de ses sommets $(x_1, \ldots, x_n)$, ses arêtes étant $x_i x_{i+1}, 1 \leq i < n$ et $x_n x_1$.

Arbre, Forêt

Un *arbre* est un graphe connexe sans cycle. Ses sommets de degré 1 sont des feuilles (il en a au moins 2) et les autres sommets, de degré au moins 2, sont des *nœuds*. Les arbres qui n'ont que deux feuilles sont les chemins. Les arbres ont de nombreuses propriétés particulières. Par exemple, un graphe à n sommets est un arbre si et seulement si il a $n-1$ arêtes et est connexe.

Assez naturellement, une forêt est un groupement d'arbres, c'est à dire un graphe dont chaque composante connexe est un arbre. Formellement, une forêt est un graphe sans cycle, pas nécessairement connexe.

Étoile

L'étoile est un autre cas particulier d'arbre, souvent étudié comme sous-graphe induit. Une *étoile* est un arbre à un seul nœud, appelé le *centre* de l'étoile. Cela peut aussi être vu comme un biparti complet, noté $K_{1,n-1}$, d'ordre $n \geq 2$. La *griffe* est l'étoile à 3 feuilles $K_{1,3}$.

Une *étoile subdivisée* est une étoile dont chaque arête est subdivisée une fois (voir la figure 1.2). Nous noterons $K^*_{1,a}$ l'étoile subdivisée obtenue à partir de l'étoile $K_{1,a}$.

Une *étoile double* est un arbre dont exactement deux sommets ne sont pas des feuilles.

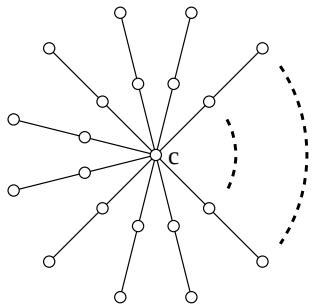


FIG. 1.2 – Une étoile subdivisée $K^*_{1,a}$

Graphe biparti

Un graphe est dit *biparti* s'il existe une partition de ses sommets en deux sous-ensembles L et R de telle façon que toutes les arêtes du graphe relient un sommet de L à un sommet de R. Autrement dit, les sous-graphes induits sur L et sur R sont des stables.

Un graphe *biparti complet* est un graphe biparti maximal en terme de nombre d'arêtes. Ainsi, le graphe biparti complet $K_{n,m}$ a pour ensemble de sommets $L \cup R$ avec $|L| = n$ et $|R| = m$, et pour ensemble d'arêtes $\{uv \mid u \in L, v \in R\}$. Chaque sommet de L est voisin de tous les sommets de R et réciproquement. Comme vu précédemment, un graphe biparti complet dont une partition contient un seul sommet est une étoile.

Grille, Tore, Grille infinie

Une *grille* de dimension n est le produit cartésien de n chemins. Un *tore* est le produit cartésien de cycles. La grille infinie est le produit cartésien de chemins infinis P_∞.

Hypercube, Graphe de Hamming

L'*hypercube* de dimension k, noté Q_k, est le graphe défini récursivement par :

- Q_0 est le graphe trivial à un sommet, Q_1 est l'arête K_2,
- pour tout entier $k > 0$, $Q_{k+1} = Q_k \,\square\, K_2$.

On remarquera sans peine que l'hypercube de dimension 2 est un carré, et que celui de dimension 3 est le cube à 6 faces habituel.

L'hypercube a été généralisé en ce qu'on appelle les graphes de Hamming. Simplement, un *graphe de Hamming* est le produit cartésien de cliques de tailles quelconques. On peut définir la classe des graphes de Hamming comme la famille de graphes contenant le graphe trivial, à un sommet, et close par l'opération consistant à faire le produit cartésien avec un graphe complet.

1.3 Les codes

1.3.1 Les codes correcteurs d'erreur

Mot, alphabet, longueur d'un mot

Initialement, la théorie des codes était basées sur des mots. Étant donné un *alphabet* Σ, c'est à dire un ensemble de *lettres*, un mot sur cet alphabet est un élément de Σ^k, k étant la *longueur* du mot.

L'alphabet le plus courant est l'alphabet binaire, $\Sigma = \{0, 1\}$. Étant donnés deux mots $u = (u_1, \ldots, u_k)$ et $v = (v_1, \ldots, v_k)$ de $\{0, 1\}^k$, nous désignerons par $u + v$ le mot $((u_1 + v_1), (u_2 + v_2), \ldots, (u_k + v_k))$ où $+$ est la somme modulo 2.

Pour un alphabet plus grand, on assimilera les lettres aux éléments de $\mathbb{Z}/l\mathbb{Z}$, et pour deux mots u et v, on notera $u + v$ le mot $(u + v) \bmod l$.

Métrique

Sur un ensemble de mots, on définit une *métrique*, c'est à dire une règle de calcul des distances. Il existe principalement trois métriques.

Dans la *métrique de Hamming*, la distance entre deux mots est le nombre de caractères par lesquels ils diffèrent. Par exemple, dans l'alphabet à quatre éléments $\Sigma = \{0, 1, 2, 3\}$, les mots $(0, 3, 2, 3, 1)$ et $(3, 3, 2, 1, 1)$ sont à distance 2, car seuls les premier et quatrième caractères diffèrent.

Une deuxième métrique est la *métrique de Manhattan*. Si l'alphabet comporte k éléments, on note ses éléments par les entiers de 0 à $k-1$. La distance entre deux mots $u = (u_1, \ldots, u_k)$ et $v = (v_1, \ldots, v_k)$ est alors définie par $d(u, v) = \sum_{i=1}^{n} |u_i - v_i|$. Par exemple, dans l'alphabet $\{0, 1, 2, 3\}$, les mots $(0, 3, 2, 3, 1)$ et $(3, 3, 2, 1, 1)$ sont à distance $(3 - 0) + (3 - 1) = 5$.

Enfin, la *métrique de Lee* ressemble beaucoup à la métrique de Manhattan. Comme dans celle ci, notons les éléments de l'alphabet par les entiers de 0 à $k - 1$. Comme dans la métrique de Manhattan deux lettres sont à distance 1 si leur différence est 1, mais aussi s'il s'agit des lettres 0 et $k - 1$. On peut imaginer les lettres placées sur un cycle, et non plus sur un chemin. La distance entre deux mots $u = (u_1, \ldots, u_k)$ et $v = (v_1, \ldots, v_k)$ est donc définie par $d(u, v) = \sum_{i=1}^{n} \min(|u_i - v_i|, k - |u_i - v_i|)$. Par exemple, dans

l'alphabet $\{0, 1, 2, 3\}$, les mots $(0, 3, 2, 3, 1)$ et $(3, 3, 2, 1, 1)$ sont à distance 3, car $\min(|0-3|, 4-|0-3|) = 1$ et $\min(|3-1|, 4-|3-1|) \bmod 4 = 2$.

On remarquera que dans un alphabet binaire, les trois métriques correspondent. De plus, sur un alphabet non fini, les métriques de Manhattan et de Lee correspondent.

Rapport aux graphes

Pour un alphabet Σ, une longueur de mots k et une métrique correspondant à une distance d, on définit le graphe G ayant pour sommets $V(G) = \Sigma^k$ et pour arêtes $E = \{(u, v) \in V^2 \mid d(u, v) = 1\}$.

Si on considère l'alphabet binaire $\{0, 1\}$ et une longueur de mots k, dans chacune des trois métriques présentées, le graphe résultant est l'hypercube Q_k.

Si on considère un alphabet à l éléments, et des mots de longueur k, alors

- avec la distance de Hamming, on obtient le graphe de Hamming K_l^k,
- avec la distance de Manhattan, on obtient la grille P_l^k,
- avec la distance de Lee, on obtient le tore C_l^k,

Code correcteur d'erreur

Dans un graphe, un *code correcteur d'une erreur* (ou code, pour simplifier), est un ensemble de sommets tel que deux sommets quelconques du code sont à distance au moins 3. De façon équivalente, on peut dire que les $\{0, 1\}$-boules centrées sur les sommets du codes sont disjointes, ou alors qu'il s'agit d'un ensemble de sommets tels que $N[u] \cap N[v] = \emptyset$ pour tous sommets distincts u et v de cet ensemble.

En théorie de la domination, on appelle ce même ensemble un *empilement* Le *nombre d'empilement*, noté $\rho(G)$ d'un graphe G est le cardinal maximum d'un tel ensemble.

Un code est dit *parfait* si tout sommet du graphe est à distance au plus 1 d'un sommet du code. Cela signifie aussi que tout sommet est contenu dans une $\{0, 1\}$-boule centrée sur un sommet du code, et donc que ces boules forment un pavage du graphe. On verra que dans ce cas, le code est aussi un dominant, et on parlera donc aussi de *dominant efficace*.

1.3.2 Les (a, b)-codes

Les (a, b)-codes sont des cas parfaits de codes pondérés [17]. Ils généralisent plusieurs codes parfaits déjà étudiés. Entre autre, les $(0, 1)$-codes sont des codes correcteurs d'une erreur parfaits [35, 36], et par dualité, des dominants efficaces. Les $(1, 1)$-codes sont des empilements ouverts parfaits ou des dominants totaux efficaces [37].

Soient G un graphe k régulier, a et b deux entiers tels que $0 \leq a, b \leq k$. Un (a, b)-code sur le graphe G est un ensemble de sommets $C \subseteq V$ qui vérifie :

$$\begin{cases} \forall v \in C, & |N(v) \cap C| = a \\ \forall v \notin C, & |N(v) \cap C| = b \end{cases}$$

Autrement dit, tout sommet du code C doit avoir a voisins dans le code et tout sommet hors du code doit avoir b voisins dans le code.

Un (a, b)-code est un cas particulier d'un code pondéré parfait [17]. En effet, si $b > 0$, un (a, b)-code est un recouvrement parfait par des $\{0, 1\}$-boules auxquelles est associé le poids $\frac{b-a}{b}$ à distance 0 et $\frac{1}{b}$ à distance 1.

1.4 La domination

Dans cette partie, nous présentons les définitions principales liées à la domination. On pourra trouver des informations plus complètes dans les 2 livres de Haynes, Hedetniemi et Slater [45, 46].

1.4.1 Les variantes de la domination

Dominant

Un *dominant* d'un graphe $G = (V, E)$ est un ensemble $S \subseteq V$ de sommets tels que tout sommet de $V \setminus S$ est adjacent à un sommet de S. Plus formellement, S vérifie $V \setminus S \subseteq N(S)$ ou encore $V = N[S]$. Le *nombre de domination* $\gamma(G)$ du graphe G est le cardinal minimum d'un dominant.

On dit qu'un sommet *domine* un autre sommet si les deux sommets sont voisins. Un dominant est donc un ensemble de sommets qui domine tous les autres sommets.

Nous rappelons qu'un *empilement* d'un graphe G est un ensemble de sommets S tels que les ensembles $N[x]$, $x \in S$ sont disjoints deux à deux. Le *nombre d'empilement* $\rho(G)$ est le cardinal maximum d'un empilement de G.

Domination totale

La domination totale est l'une des principales variantes de la domination. Elle a été introduite par Cockayne, Dawes et Hedetniemi dans [15].

Un *dominant total* d'un graphe $G = (V, E)$ sans sommet isolé est un ensemble $S \subseteq V$ de sommets tel que tout sommet de V est adjacent à un sommet de S. Plus formellement, S vérifie $V = N(S)$ Le *nombre de domination totale* $\gamma_t(G)$ du graphe G est le cardinal minimum d'un dominant.

Dans la domination totale, contrairement à la domination simple, il faut que les sommets sélectionnés dans l'ensemble soient eux aussi dominés par un autre sommet de l'ensemble. C'est pourquoi il n'est pas possible de trouver

un dominant total dans un graphe contenant un sommet isolé, car celui-ci ne peut pas être dominé. De plus, on remarque sans peine qu'un dominant total est nécessairement un dominant, et $\gamma_t(G) \geq \gamma(G)$.

Un *empilement ouvert* d'un graphe G est un ensemble de sommets S tels que les ensembles $N(x)$, $x \in S$ sont disjoints deux à deux. Le *nombre d'empilement ouvert* $\rho^\circ(G)$ est le cardinal maximum d'un empilement ouvert de G.

Paire-domination

La paire-domination est une variante assez proche de la domination totale, introduite par Haynes et Slater dans [47, 48]. Elle fait l'objet de la partie 5.1.

Un *paire-dominant* d'un graphe G est un dominant S tel que le sous-graphe induit $G[S]$ admet un couplage parfait. Tout graphe sans sommet isolé admet un paire-dominant, par exemple l'ensemble des extrémités d'un couplage maximum. Le *nombre de paire-domination* de G, noté $\gamma_{\mathrm{p}}(G)$, est le cardinal d'un paire-dominant minimum.

k-tuple domination

La k-tuple domination est une autre variante de la domination, introduite par Harary et Haynes dans [43]. Un ensemble $S \subseteq V$ est un *k-tuple dominant* de G si pour tout sommet $v \in V$, $|N[v] \cap S| \geq k$. En d'autres termes, soit v est dans S et a au moins $k-1$ voisins dans S, soit il est dans $V \setminus S$ et a au moins k voisins dans S.

Il existe un k-tuple dominant à un graphe G si et seulement si $\delta(G) \geq k-1$, auquel cas l'ensemble V de tous les sommets est un k-tuple dominant. Le *nombre de k-tuple domination* $\gamma^{(\times k)}(G)$ est le cardinal d'un k-tuple dominant minimum de G. Le cas particulier de la 1-tuple domination correspond à la domination. De plus, pour $k \geq 2$, un k-tuple dominant est aussi un dominant total, et donc $\gamma^{(\times k)}(G) \geq \gamma_t(G)$.

De même, $S \subseteq V$ est un *k-tuple dominant total* de G si pour tout sommet $v \in V$, $|N(v) \cap S| \geq k$, c'est à dire que tout sommet v de V est dominé par au moins k voisins dans S. Il existe un k-tuple dominant total à un graphe G si et seulement si $\delta(G) \geq k$, auquel cas l'ensemble V de tous les sommets est un k-tuple dominant total. Le *nombre de k-tuple domination totale* $\gamma_t^{(\times k)}(G)$ est le cardinal d'un k-tuple dominant total minimum de G. La 1-tuple domination totale correspond à la domination totale.

$\{k\}$-domination

Pour la $\{k\}$-domination, on ne parle pas de dominant, mais de fonction $\{k\}$-dominante pour traduire la possibilité de sélectionner un sommet

plusieurs fois.

Soit $k \geq 1$, une fonction $f : V \to \{0, 1, \ldots, k\}$ est appelée *fonction* $\{k\}$-*dominante* si pour tout $v \in V$, $f(N[v]) \geq k$. Le *nombre de* $\{k\}$-*domination* $\gamma^{\{k\}}(G)$ est le poids minimum d'une fonction $\{k\}$-dominante.

On remarquera que la $\{1\}$-domination est équivalente à la domination, puisqu'une fonction $\{1\}$-dominante est la fonction caractéristique d'un dominant.

De même, $f : V \to \{0, 1, \ldots, k\}$ est appelée *fonction totalement* $\{k\}$-*dominante* si pour tout $v \in V$, $f(N(v)) \geq k$. Le *nombre de* $\{k\}$-*domination totale* $\gamma_t^{\{k\}}(G)$ est le poids minimum d'une fonction totalement $\{k\}$-dominante.

Domination supérieure

La section 5.2 est consacrée à la domination supérieure. Le problème de domination supérieure peut être vu comme un problème de domination dans le pire cas. En effet, le nombre de domination supérieur est le pire résultat qu'un algorithme glouton de recherche d'un dominant minimal puisse fournir.

Dans tous les paramètres de domination présentés auparavant, le critère est le cardinal d'un ensemble minimum. Le nombre de domination supérieure est lié au cardinal des ensembles minimaux. Le nombre de domination supérieure $\Gamma(G)$ est le maximum du cardinal d'un dominant minimal de G, c'est à dire dont aucun sous-ensemble strict n'est un dominant.

De même, on définit le nombre de domination totale supérieure Γ_t et de paire-domination supérieure $\Gamma_{\mathrm{p}}(G)$ comme le cardinal maximum d'un dominant total minimal et d'un paire-dominant minimal.

Domination de puissance

La domination de puissance, que nous étudions dans la partie 4.2, est un peu différente des autres types de domination.

Soit G un graphe connexe et S un sous-ensemble de ses sommets. On note $M(S)$ *l'ensemble des sommets surveillés* par S, défini algorithmiquement par

1. (*domination*)
   $M(S) \leftarrow S \cup N(S)$
2. (*propagation*)
   Tant qu'il existe $v \in M(S)$ tel que
   $N(v) \cap (V(G) - M(S)) = \{w\}$
   redéfinir $M(S) \leftarrow M(S) \cup \{w\}$.

L'ensemble $M(S)$ est ainsi obtenu à partir de S comme ceci : tout d'abord, on place dans $M(S)$ tout les sommets du voisinage fermé de S ; puis, on répète l'opération qui consiste à ajouter dans $M(S)$ les sommets w qui sont

le seul voisin hors de $M(S)$ d'un sommet v dans $M(S)$. Évidemment, cette opération peut faire que de nouveaux sommets vérifient cette condition, on les placera alors à leur tour dans $M(S)$, et ainsi de suite. Quand il ne reste aucun sommet w vérifiant cette condition, l'ensemble des sommets surveillés par S est construit.

On dit que S est un *dominant de puissance* de G si $M(S) = V(G)$. Le *nombre de domination de puissance* $\gamma_\pi(G)$ est le cardinal minimum d'un dominant de puissance de G.

Dans [44] ces concepts sont présentés de façon légèrement plus compliquée, en considérant les sommets ainsi que les arêtes du graphe. Cette autre présentation est peut-être plus proche de la réalité physique, mais les deux approches sont équivalentes. En effet, si un ensemble est un dominant de puissance pour l'une des définitions, il l'est aussi pour l'autre. En fait, cette équivalence est observée de façon implicite dans [28].

1.4.2 Autres définitions liées à la domination

Voisin privé

Soient un sommet v et un ensemble de sommets S dans un graphe $G = (V, E)$. Le *voisinage privé* de v dans S, noté $\mathrm{pn}(v, S)$ est l'ensemble des voisins de v qui ne sont voisins d'aucun autre sommet de S : $\mathrm{pn}(v, S) = N(v) \setminus N(S - \{v\})$. De façon équivalente, on peut écrire $\mathrm{pn}(v, S) = \{u \in V \mid N(u) \cap S = \{v\}\}$. Si $u \in \mathrm{pn}(v, S)$, on dit que u est un *voisin privé* de v dans S, ou *S-voisin privé*.

La notion de voisin privé est très importante dans la domination. Il est facile de vérifier qu'un dominant est minimal si tout sommet du dominant a un voisin privé ou s'il est lui même isolé. Des propriétés similaires sont vraies pour d'autres variantes de la domination.

Si $u \in \mathrm{pn}(v, S)$ est aussi dans S, on dit que u est un voisin privé *interne*, $u \in \mathrm{ipn}(v, S)$; sinon, u est dit voisin privé *externe*, $u \in \mathrm{epn}(v, S)$. On a $\mathrm{ipn}(v, S) = \mathrm{pn}(v, S) \cap S$ et $\mathrm{epn}(v, S) = \mathrm{pn}(v, S) \cap (V \setminus S)$, et enfin $\mathrm{pn}(v, S) = \mathrm{ipn}(v, S) \cup \mathrm{epn}(v, S)$.

$\gamma_*(G)$ et $\Gamma_*(G)$-dominants

On dira d'un ensemble que c'est un *$\gamma_*(G)$-dominant* ou un *$\Gamma_*(G)$-dominant* si c'est un dominant $*$ minimal de G qui atteint la borne $\gamma_*(G)$ ou $\Gamma_*(G)$. Par exemple, un $\gamma_t(G)$-dominant est un dominant total de G de cardinal minimum, à savoir $\gamma_t(G)$. De même, un $\Gamma_{\mathrm{p}}(G)$-dominant est un paire-dominant minimal de cardinal maximum, à savoir $\Gamma_{\mathrm{p}}(G)$.

Chapitre 2

Codes correcteurs

De la façon la plus générale, un code est une règle permettant de convertir la représentation d'une information. Historiquement, les codes servaient à conserver le secret d'un message. Aujourd'hui, avec le développement de l'informatique, et plus précisément des technologies de communication et de stockage de données, les codes ont trouvé de nouvelles utilités. Généralement, en théorie des codes, on distingue trois rôles aux codes. Le premier, déjà cité, est la conservation du secret d'un message. La cryptologie traite du chiffrement et du déchiffrement d'un message. Si l'on attribue le premier code à César, on pense avoir trouvé un document chiffré antérieur sous la forme de tablettes d'argile datant de l'Antiquité.

Un second rôle des codes est la compression de l'information. Son objectif est de réduire l'espace nécessaire pour conserver des informations. L'écriture peut être perçue comme une des premières formes de compression, par rapport aux hiéroglyphes (qui en sont peut être déjà une). On étudie la compression de façon mathématique depuis l'émergence de l'informatique et du stockage binaire de l'information.

Le troisième objectif, qui correspond aux codes que nous étudions dans cette thèse, est la fiabilité de la transmission de données. Un exemple de tel code est l'alphabet radio, qui transforme les lettres A,B,C en *Alpha, Bravo, Charlie* permettant la compréhension d'un message malgré une communication brouillée. Ces codes sont basés sur une redondance de l'information, qui permet de réinterpréter le message malgré quelques erreurs.

Dans ce chapitre, nous étudions deux types de codes en particulier. Dans la partie 2.1, nous étudions les codes correcteurs d'une erreur. Nous nous intéressons à l'existence de codes parfaits sur un graphe particulier que nous appellerons *la poutre*, qui est une généralisation commune de la grille et de l'hypercube.

Puis, dans la partie 2.2, nous étudions une nouvelle forme de codes, les (a, b)-codes. Ces codes forment une sous-classe des codes pondérés qui généralisent plusieurs types de codes parfaits. Ils traduisent en outre cer-

taines des contraintes d'existence sur la poutre, et des résultats d'inexistence d'(a, b)-codes peuvent impliquer l'inexistence de code parfait sur certaines poutres.

2.1 Codes parfaits sur la poutre

2.1.1 Introduction

Dans cette partie, nous relatons une étude faite avec Michel Mollard [26] sur l'existence de codes parfaits sur la poutre. Les codes parfaits sont apparus en théorie des codes à la fin des années 40, avec le travail de Golay et Hamming [33, 42]. Il s'est avéré que l'étude de l'existence de codes parfaits est plus facile et permet d'avoir des résultats plus précis que l'étude des codes en général. Dans ce cadre, la problématique principale est de savoir si, pour un certain alphabet et une certaine dimension, il existe des codes parfaits. Golay et Hamming ont étudié les codes parfaits sur un alphabet binaire, associé à une métrique que l'on appelle la métrique de Hamming.

Plus de vingt ans après, dans [5], Biggs a introduit les codes parfaits en terme de graphes. De ce point de vue, un code parfait binaire correcteur d'une erreur avec des mots de longueur k est un code parfait sur l'hypercube Q_k. Golay et Hamming [33, 42] ont montré qu'il existe un code parfait sur Q_k si et seulement si k est une puissance de 2 moins 1 ($k = 2^q - 1$ pour un certain entier q).

Les codes ont été généralisé à des alphabets de plus de deux éléments. La première généralisation correspond à des produits de graphes complets, appelés graphes de Hamming et associés à la métrique du même nom. Dans cette thèse, nous étudions une autre généralisation qui correspond au produit de cycles, associé à la métrique de Lee. Golomb et Welch [35, 36] ont travaillé sur les codes correcteurs d'une erreur dans cette métrique. Ils ont prouvé, pour toute longueur de mot n, qu'il existe un code parfait correcteur d'une erreur sur un alphabet à $2n + 1$ éléments, c'est à dire un code parfait sur le tore C^n_{2n+1}. Ils ont aussi conjecturé que ces codes étaient les seuls possibles.

Dans cette partie, nous étudions une généralisation commune de ces codes parfaits. L'hypercube Q_k et la grille $\mathbb{Z}^n$ sont tous deux le produit cartésien de chemins, de longueur 1 (P_2) ou de longueur infinie (P_∞). Dans la suite, nous étudions l'existence de codes parfaits sur le produit mixte de chemins de longueurs 1 et infinie : $P^n_\infty \Box P^k_2 = \mathbb{Z}^n \Box Q_k$, que nous appelons la poutre. Cette généralisation consiste à étudier des codes parfaits avec des mots de longueur $n + k$ sur un alphabet mixte. Tous les codes que nous construisons ici sont périodiques, on peut donc toujours considérer que le code construit est défini sur un alphabet fini.

Les codes parfaits ont déjà été étudiés sur des alphabets mixtes dès 1970, notamment par Schönheim dans [57], mais dans une métrique de Hamming. Pour une documentation plus complète sur les codes parfaits, on pourra

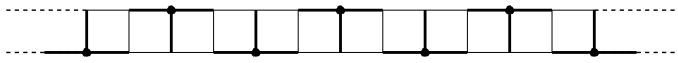


FIG. 2.1 – Un code parfait sur $\mathbb{Z}^1 \square Q_1$

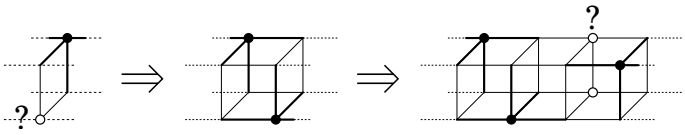


FIG. 2.2 – Il n'existe pas de code parfait sur $\mathbb{Z}^1 \square Q_2$

notamment se reporter au chapitre 11 du livre de Cohen, Honkala, Litsyn et Lobstein [17].

La poutre est définie comme le graphe suivant : les sommets sont les mots de longueur $n+k$ dont les n premiers caractères sont dans $\mathbb{Z}$, et les k suivants dans $\{0,1\}$. Deux sommets sont adjacents s'ils diffèrent de 1 en exactement un emplacement. On remarque que ce graphe est un graphe régulier de degré $2n+k$. De plus, $\mathbb{Z}^n \square Q_0 = \mathbb{Z}^n$ et $\mathbb{Z}^0 \square Q_k = Q_k$.

Étant donnés deux sommets x et y, la distance entre x et y sur la poutre $\mathbb{Z}^n \square Q_k$ est définie par

$$d((x_1, x_2, \ldots, x_{n+k}), (y_1, y_2, \ldots, y_{n+k})) = \sum_{i=1}^{n+k} |x_i - y_i|$$

Si $n = 0$, on retrouve la *distance de Hamming* et si $k = 0$, il s'agit de la *distance de Manhattan*.

La Figure 2.1 montre un code parfait sur $\mathbb{Z}^1 \square Q_1$. Sur $\mathbb{Z}^1 \square Q_2$, il n'existe pas de code parfait comme le montre la Figure 2.2.

Soit G un graphe fini. Sur $\mathbb{Z}^n \square G$, on dira d'un code qu'il est *i-périodique* ($i \in \{1, \ldots, n\}$) s'il existe un entier positif p_i tel que pour tout sommet $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n, v)$ (avec $\forall i, x_i \in \mathbb{Z}$ et $v \in V(G)$), le sommet $(x_1, \ldots, (x_i + p_i), \ldots, x_n, v)$ est dans le code si et seulement si x est dans le code. p_i est appelée la i-période du code. Un code est dit *périodique* de période $(p_1, p_2, \ldots, p_n)$ s'il est i-périodique de i-période p_i pour chaque i.

Proposition 2.1.1 [26] *Soit S un code périodique sur $\mathbb{Z}^n \square G$ avec pour période $(p_1, p_2, \ldots, p_n)$. Il existe un ensemble T de mots $t = (t_1, t_2, \ldots, t_n, v)$ avec $\forall i \in \{1 \ldots, n\}$, $0 \leq t_i < p_i$ et $v \in V(G)$ tel que S est l'ensemble des mots*

$$\{(t_1 + \alpha_1 p_1, t_2 + \alpha_2 p_2, \ldots, t_n + \alpha_n p_n, v) \mid t \in T, \alpha_i \in \mathbb{Z}\}$$

Dans la section 2.1.2, nous rappelons quelques résultats classiques sur les codes correcteurs d'erreur. Dans la section 2.1.3, nous proposons des constructions de nouveaux codes, puis dans la section 2.1.4, nous prouvons

l'inexistence de codes parfaits sur certaines poutres. Enfin, la section 2.1.5 dresse un bilan des résultats sur la poutre.

2.1.2 Codes parfaits déduits de constructions connues

Parmi les résultats classiques de la théorie des codes, on a :

Théorème 2.1.2 [42] *Si $n = 0$, il existe un code parfait sur $\mathbb{Z}^n \square Q_k$ si et seulement s'il existe un entier p tel que $k = 2^p - 1$.*

Des exemples classiques de ces codes parfaits sont les codes de Hamming [42], mais à partir de $k \geq 15$, d'autres codes parfaits de même longueur sont connus (pour plus de détails sur ce sujet, voir [17]).

Théorème 2.1.3 *Il existe un code parfait i-périodique sur $\mathbb{Z}^n \square G$ avec pour i-période p_i si et seulement si un code parfait sur le graphe $\mathbb{Z}^{n-1} \square C_{p_i} \square G$ existe.*

Preuve : Soit S un code parfait sur $\mathbb{Z}^{n-1} \square C_{p_i} \square G$. On peut alors vérifier sans peine que l'ensemble de mots

$$\{(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, c + \alpha p_i, v) \mid (x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, c, v) \in S, \alpha \in \mathbb{Z}\}$$

est un code parfait de $\mathbb{Z}^n \square G$.

A l'inverse, considérons un code parfait S sur $\mathbb{Z}^n \square G$ i-périodique de i-période p_i pour un certain i. Sans perte de généralité, on peut supposer que $i = n$. L'ensemble de mots

$$\{(x_1, x_2, \ldots, x_n, v) \mid (x_1, x_2, \ldots, x_n, v) \in S, 0 \leq x_n < p_n\}$$

est un code parfait sur $\mathbb{Z}^{n-1} \square C_{p_n} \square G$. □

Par conséquent, il existe un code parfait sur la grille $\mathbb{Z}^n$ de période $(p_1, \ldots, p_n)$ si et seulement si un code parfait sur le graphe $C_{p_1} \square \ldots \square C_{p_n}$ existe.

En 1968, Golomb et Welch [35] ont prouvé l'existence dans la métrique de Lee de codes parfaits correcteurs d'une erreur pour une longueur de mot n sur un alphabet de $2n + 1$ éléments, quel que soit n . Cela nous donne un code parfait sur le graphe C^n_{2n+1}, et cela implique le résultat suivant, bien connu :

Théorème 2.1.4 [35] *Si $k = 0$, pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe un code parfait sur $\mathbb{Z}^n \square Q_k$.*

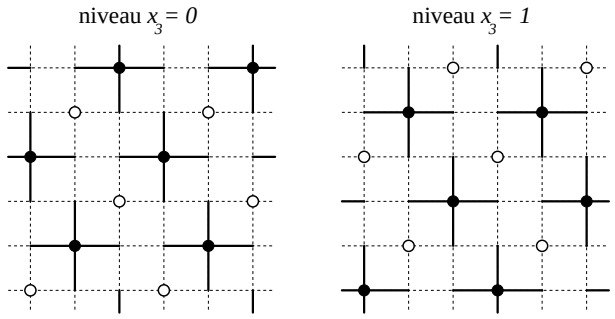


FIG. 2.3 – Un code parfait sur $\mathbb{Z}^2 \square Q_1$

2.1.3 Construction de codes parfaits

Comme on peut le voir sur la Figure 2.3, il existe un code parfait sur $\mathbb{Z}^2 \square Q_1$. Ce code parfait peut être considéré comme un pavage de $\mathbb{Z}^2$ avec des $\{0,1\}$-boules et des $\{0\}$-boules, de telle façon que l'ensemble des $\{0\}$-boules est obtenu par translation à partir de l'ensemble des $\{0,1\}$-boules. Une telle approche peut être généralisée pour tout n sur la poutre $\mathbb{Z}^n \square Q_1$.

Mais cela reste encore un cas particulier d'une construction encore plus générale que nous présentons ci-après.

Théorème 2.1.5 [26] *S'il existe $\alpha, \beta \in \mathbb{N}^*$ tels que $k = 2^\alpha - 1$ et $n = \beta 2^{\alpha-1}$ alors il existe un code parfait sur $\mathbb{Z}^n \square Q_k$.*

Preuve : Soit $k = 2^\alpha - 1$ et $n = \beta 2^{\alpha-1}$. Nous construisons ici un code parfait sur $\mathbb{Z}^n \square Q_k$.

D'après le théorème 2.1.2, nous savons qu'il existe un code parfait A_0 sur Q_k. Appelons $e_1, \ldots, e_k$ les k sommets de Q_k à distance 1 de $(0, \ldots, 0)$ et A_i l'ensemble $\{c + e_i \mid c \in A_0\}$. Étant la translation d'un code parfait, tout ensemble A_i est aussi un code parfait de Q_k. De plus, $A_0, A_1, \ldots, A_k$ forme une partition des sommets de Q_k. Dans la suite de la preuve, nous définissons une fonction d'étiquetage des éléments de $\mathbb{Z}^n$ avec des entiers. À certains entiers, nous associons l'un des A_i pour former finalement un code parfait sur $\mathbb{Z}^n \square Q_k$. Soit $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ un sommet de $\mathbb{Z}^n$.

Cas où β est pair : Soit $\beta = 2p$. On a $n = p(k+1)$.

On définit la fonction suivante de $\mathbb{Z}^{p(k+1)}$ vers $\mathbb{Z}/(k+1)(2p+1)\mathbb{Z}$:

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{i=0}^{k} \sum_{j=1}^{p} ((2p+1)i + j) x_{ip+j} \bmod (k+1)(2p+1) \\ \text{i.e. } f(x) &= x_1 + 2x_2 + \ldots + px_p \\ &\quad + (2p+2)x_{p+1} + (2p+3)x_{p+2} + \ldots + (3p+1)x_{2p} \\ &\quad + \ldots \\ &\quad + (k(2p+1)+1)x_{kp+1} + \ldots + (k(2p+1)+p)x_{(k+1)p} \\ &\quad \bmod (k+1)(2p+1) \end{aligned}$$

Soit C l'ensemble de sommets défini de la façon suivante.

$$C = \{(x, v) \mid \exists i \in \{0, \ldots, k\} \text{ tel que } f(x) = i(2p+1) \text{ et } v \in A_i\} \quad (2.1)$$

Nous affirmons que C est un code parfait sur $\mathbb{Z}^n \square Q_k$. Afin de le prouver, nous utiliserons le lemme suivant :

Lemme 2.1.6 [26] *Pour tout $x \in \mathbb{Z}^n$ et $\theta \in \{1, \ldots, (k+1)(2p+1)-1\}$, il existe un unique voisin y de x qui vérifie $f(y) = f(x) + \theta$ quand $\theta \not\equiv 0 \bmod 2p+1$, et il n'en existe pas quand $\theta \equiv 0 \bmod 2p+1$.*

Preuve du Lemme 2.1.6 Soit $\theta \in \{1, \ldots, (k+1)(2p+1)-1\}$ tel que $\theta \not\equiv 0 \bmod 2p+1$. Soient $i \in \{0, \ldots, k\}$ et $j \in \{1, \ldots, 2p\}$ tels que $\theta = (2p+1)i + j$. Si $j \leq p$ alors $f(x_1, \ldots, x_{ip+j} + 1, \ldots, x_n) = f(x) + \theta$. Sinon, $f(x_1, \ldots, x_{(k-i)p+(2p+1-j)} - 1, \ldots, x_n) = f(x) + \theta$ (remarquez que $k - i \in \{0, \ldots, k\}$ et $2p + 1 - j \in \{1, \ldots, p\}$). Nous avons ainsi considéré $(k+1)2p = 2n$ voisins de x tous distincts, c'est à dire tous les voisins de x. Par conséquent, il n'y a plus de voisin y qui pourrait satisfaire $f(y) = f(x) + \theta$ dans le cas où $\theta \equiv 0 \bmod 2p+1$. □

Supposons que l'ensemble C défini dans l'équation 2.1 ne soit pas un code correcteur d'une erreur. Ceci implique qu'il existe deux sommets distincts (x, v) et $(x', v') \in C$ à distance au plus 2. Soient i et i' les entiers tels que $f(x) = i(2p+1)$ et $f(x') = i'(2p+1)$. On a $v \in A_i$ et $v' \in A_{i'}$.

- 1^{er} cas : $x = x'$. Alors v et v' sont dans un même A_i. Alors, par construction des A_i, si $v \neq v'$, $d(v, v') \geq 3$: une contradiction avec l'hypothèse précédente.
- $2^{\text{ème}}$ cas : $d_{\mathbb{Z}^n}(x, x') = 1$. D'après le lemme 2.1.6, $f(x) - f(x') \not\equiv 0 \bmod 2p+1$, mais $f(x) - f(x') = (i - i')(2p+1)$: une contradiction.
- $3^{\text{ème}}$ cas : $d_{\mathbb{Z}^n}(x, x') = 2$. Alors $v = v'$. Comme $A_0, \ldots, A_k$ forme une partition de $V(Q_k)$, $i = i'$ et $f(x) = f(x')$. Soit u le voisin commun de x et de x'. On a $f(u) - f(x) = f(u) - f(x')$ ce qui est impossible d'après le lemme 2.1.6.

Montrons maintenant que ce code est parfait. Soit (x, v) un sommet de $\mathbb{Z}^n \square Q_k$. Si $f(x) = i(2p+1)$, alors, A_i étant un code parfait, il existe $v' \in A_i$ (et donc $(x, v') \in C$) tel que $d((x, v), (x, v')) \leq 1$. Sinon, $A_0, \ldots, A_k$ étant une partition de $V(Q_k)$, il existe $i \in \{0, \ldots, k\}$ tel que $v \in A_i$. D'après le lemme 2.1.6, il existe un voisin x' de x qui vérifie $f(x') = i(2p+1)$, et donc $(x', v) \in C \cap N(x, v)$.

Cas où β est impair : Soit $\beta = 2p+1$. Remarquons que $\frac{k+1}{2}$ est un entier. On a $n = (2p+1)\frac{k+1}{2}$.

On définit la fonction suivante de $\mathbb{Z}^n$ vers $\mathbb{Z}/(k+1)(2p+2)\mathbb{Z}$:

$$\begin{aligned} g(x) &= \sum_{i=0}^{k}\sum_{j=1}^{p}((2p+2)i+j)x_{ip+j} \\ &\quad + \sum_{l=1}^{\frac{k+1}{2}}(p+1)(2l-1)x_{(k+1)p+l} \bmod (k+1)(2p+2) \\ \text{i.e. } g(x) &= x_1 + 2x_2 + \ldots + px_p \\ &\quad +(2p+3)x_{p+1} + (2p+4)x_{p+2} + \ldots + (3p+2)x_{2p} \\ &\quad + \ldots \\ &\quad +(k(2p+2)+1)x_{kp+1} + \ldots + (k(2p+2)+p)x_{(k+1)p} \\ &\quad +(p+1)x_{(k+1)p+1} + \ldots + k(p+1)x_{(k+1)p+\frac{k+1}{2}} \\ &\quad \bmod (k+1)(2p+2) \end{aligned}$$

Soit C l'ensemble de sommets défini de la façon suivante.

$$C = \{(x,v) \mid \exists i \in \{0,\ldots,k\} \text{ tel que } g(x) = i(2p+2) \text{ et } v \in A_i\} \qquad (2.2)$$

Nous affirmons que C est un code parfait sur $\mathbb{Z}^n \square Q_k$. Afin de le prouver, nous utiliserons le lemme suivant.

Lemme 2.1.7 [26] *Pour tout $x \in \mathbb{Z}^n$ et $\theta \in \{1,\ldots,(k+1)(2p+2)-1\}$, il existe un unique voisin y de x qui vérifie $g(y) \equiv g(x)+\theta \bmod (k+1)(2p+1)$ quand $\theta \not\equiv 0 \bmod 2p+2$ et il n'en existe pas quand $\theta \equiv 0 \bmod 2p+2$.*

Preuve du Lemme 2.1.7 Soit $\theta \in \{1,\ldots,(k+1)(2p+2)-1\}$ tel que $\theta \not\equiv 0 \bmod 2p+2$. Soient $i \in \{0,\ldots,k\}, j \in \{1,\ldots,2p+1\}$ tels que $\theta = (2p+2)i+j$.

- Si $j < p+1$ alors $g(x_1,\ldots,x_{ip+j}+1,\ldots,x_n) = g(x)+\theta$.
- Si $j > p+1$ alors $g(x_1,\ldots,x_{(k-i)p+(2p+2-j)}-1,\ldots,x_n) = g(x)+\theta$ (on remarque que $k-i \in \{0,\ldots,k\}$ et $2p+2-j \in \{1,\ldots,p\}$).
- Si $j = p+1$, alors $\theta = (p+1)(2i+1)$ et
  - si $i < \frac{k+1}{2}$, $g(x_1,x_2,\ldots,x_{(k+1)p+i+1}+1,\ldots,x_n) = g(x)+\theta$
  - si $i \geq \frac{k+1}{2}$, $g(x_1,x_2,\ldots,x_{(k+1)p+k-i+1}-1,\ldots,x_n) = g(x)+\theta$ (on remarque que $k-i+1 \in \{1,\ldots,\frac{k+1}{2}\}$).

Nous avons ainsi considéré $(k+1)(2p+1) = 2n$ voisins distincts de x, c'est à dire tous les voisins de x. Par conséquent, il n'y a plus de voisin y qui pourrait satisfaire $g(y) = g(x)+\theta$ dans le cas où $\theta \equiv 0 \bmod 2p+2$. □

Supposons que l'ensemble C défini dans l'équation 2.2 ne soit pas un code correcteur d'une erreur. Ceci implique qu'il existe deux sommets distincts (x,v) et $(x',v') \in C$ à distance au plus 2. Soient i et i' les entiers tels que $g(x) = i(2p+2)$ et $g(x') = i'(2p+2)$. On a $v \in A_i$ et $v' \in A_{i'}$.

1^{er} cas : $x = x'$. Alors v et v' sont dans un même A_i et $v \neq v'$, donc $d(v,v') \geq 3$: une contradiction.

$2^{\text{ème}}$ cas : $d_{\mathbb{Z}^n}(x,x') = 1$. D'après le lemme 2.1.7, $g(x)-g(x') \not\equiv 0 \bmod 2p+2$ mais $g(x) - g(x') = (i-i')(2p+2)$: une contradiction.

$3^{\text{ème}}$ cas : $d_{\mathbb{Z}^n}(x,x') = 2$. Alors $v = v'$, et comme $A_0, \ldots, A_k$ forme une partition de $V(Q_k)$, $i = i'$ et $g(x) = g(x')$. Soit u un voisin commun à x et x'. On a $g(u) - g(x) = g(u) - g(x')$ ce qui est impossible d'après le lemme 2.1.7.

Montrons maintenant que ce code est parfait. Soit (x,v) un sommet de $\mathbb{Z}^n \square Q_k$. Si $g(x) = i(2p+2)$ alors A_i étant un code parfait, il existe $v' \in A_i$ (et donc $(x,v') \in C$) tel que $d((x,v),(x,v')) \leq 1$. Sinon, comme $A_0, \ldots, A_k$ forme une partition des sommets de Q_k, il existe $i \in \{0,\ldots,k\}$ tel que $v \in A_i$. D'après le lemme 2.1.7, il existe un voisin x' de x tel que $g(x') = i(2p+2)$, et donc $(x',v) \in C \cap N(x,v)$. □

Au cours de la preuve de ce théorème, on peut constater que la construction que nous faisons est périodique de période $(2n+k+1, 2n+k+1, \ldots, 2n+k+1)$. On peut donc déduire le corollaire suivant, qui définit ce code sur un tore.

Corollaire 2.1.8 **[26]** *S'il existe $\alpha, \beta \in \mathbb{N}^*$ tels que $k = 2^\alpha - 1$ et $n = \beta 2^{\alpha-1}$ alors il existe un code parfait sur $C^n_{2n+k+1} \square Q_k$.*

Maintenant que le théorème de construction principal est prouvé, il est intéressant de constater le résultat suivant qui permet d'élargir la portée du résultat.

Proposition 2.1.9 **[26]** *Il existe un code parfait i-périodique sur $\mathbb{Z}^{n+1} \square Q_k$ de i-période 4 si et seulement si un code parfait sur le graphe $\mathbb{Z}^n \square Q_{k+2}$ existe.*

Preuve : Comme $Q_2 = C_4$, cette proposition est une conséquence immédiate du théorème 2.1.3, □

Corollaire 2.1.10 **[26]** *S'il existe un entier p tel que $2n+k = 2^p - 1$, alors il existe un code parfait sur $\mathbb{Z}^n \square Q_k$.*

Preuve : Ceci découle de la proposition 2.1.9 et du théorème 2.1.2. □

Corollaire 2.1.11 **[26]** *Dès qu'il existe $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{N}$ tels que $k = 2^\alpha - 2\gamma - 1$ et $n = \beta 2^{\alpha-1} + \gamma$, il existe un code parfait sur $\mathbb{Z}^n \square Q_k$*

Preuve : Ceci est une conséquence du théorème 2.1.5,de la proposition 2.1.9, et du corollaire 2.1.10. □

2.1.4 Inexistence de codes parfaits

Théorème 2.1.12 [26] *Soit $k \geq 2n$. Il existe un code parfait sur $\mathbb{Z}^n \square Q_k$ si et seulement s'il existe un entier p tel que $2n + k = 2^p - 1$.*

Preuve : D'après le corollaire 2.1.10, nous savons qu'il existe un code parfait quand n et k vérifient la condition.

Pour $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{Z}^n$, on note $Q_k(x)$ l'ensemble des sommets $(u_1, \ldots, u_{n+k})$ de $\mathbb{Z}^n \square Q_k$ tels que $u_i = x_i$ pour tout $1 \leq i \leq n$. On remarque que le sous-graphe induit sur $Q_k(x)$ est un hypercube de degré k. Supposons qu'il existe un code parfait C sur $\mathbb{Z}^n \square Q_k$.

C étant un code parfait, tout sommet doit se trouver dans exactement une $\{0,1\}$-boule centrée sur un sommet de C. Une $\{0,1\}$-boule centrée sur un sommet dans $Q_k(x)$ contient $k+1$ sommets dans $Q_k(x)$. Une $\{0,1\}$-boule centrée sur un sommet dans $Q_k(y)$, avec $d(y,x) = 1$, contient exactement un sommet dans $Q_k(x)$.

Soit m le nombre minimum de sommets du code que l'on peut trouver dans un $Q_k(x)$, x variant. Soit $x \in \mathbb{Z}^n$ tel que $|Q_k(x) \cap C| = m$. On note $(y_i)_{1 \leq i \leq 2n}$ les sommets de $\mathbb{Z}^n$ à distance 1 de x. Soient $a_i = |Q_k(y_i) \cap C| - m$, $a = \max(a_i)$ et y l'un des y_i tel que $a_i = a$.

Supposons d'abord que $a = 0$, et donc que tout a_i est nul. On regarde les 2^k sommets de $Q_k(x)$. Parmi eux, $(k+1)m$ sont dans des $\{0,1\}$-boules centrées sur des sommets de $Q_k(x)$, $2nm$ sont dans des $\{0,1\}$-boules centrées sur des sommets de $Q_k(y_i)$ pour un certain i. Ainsi, on a $(k+1)m + 2nm = 2^k$. Donc $k+1+2n$ est un facteur de 2^k, et il existe un p tel que $2n+k = 2^p - 1$.

Supposons maintenant que $a > 0$. En comptant les sommets de $Q_k(x)$, on obtient :

$$(k+1)m + \sum_{i=1}^{2n} (a_i + m) = 2^k \tag{2.3}$$

et en comptant ceux de $Q_k(y)$:

$$(k+1)(m+a) + \sum_{i=1}^{2n} (m + b_i) = 2^k \tag{2.4}$$

où les b_i sont des entiers positifs ou nuls définis par rapport à y comme les a_i par rapport à x. En calculant (2.4) − (2.3), on obtient

$$a(k+1) + \sum_{i=1}^{2n} b_i = \sum_{i=1}^{2n} a_i \,.$$

Or, comme $\sum_{i=1}^{2n} b_i \geq 0$ et $\sum_{i=1}^{2n} a_i \leq 2na$, on obtient $a(k+1) \leq 2na$ et enfin $k < 2n$, ce qui contredit l'hypothèse de départ. □

Proposition 2.1.13 [26] *Il n'existe de code parfait ni sur $\mathbb{Z}^2 \square Q_2$ ni sur $\mathbb{Z}^3 \square Q_2$.*

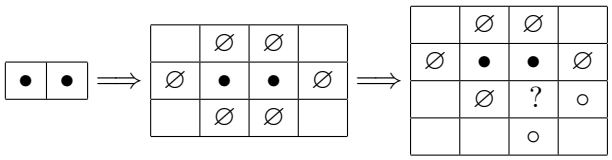


FIG. 2.4 – Inexistence de code parfait sur $\mathbb{Z}^2 \square Q_2$

$n \backslash k$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	...
0	$\surd$	$\surd_a$	$-$	$\surd_a$	$-$	$-$	$-$	$\surd_a$	$-$	$-$	$-$	$-$	...
1	$\surd_b$	$\surd_{c,d}$	$-$	$-$	$-$	$\surd_c$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	...
2	$\surd_b$	$\surd_d$	$-_f$	$\surd_{c,d}$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	$\surd_c$	...
3	$\surd_b$	$\surd_{c,d}$	$-_f$				$-$	$-$	$-$	$\surd_c$	$-$	$-$	...
4	$\surd_b$	$\surd_d$		$\surd_d$				$\surd_{c,d}$	$-$	$-$	$-$	$-$	...
5	$\surd_b$	$\surd_{c,d}$				$\surd_c$					$-$	$-$	...
6	$\surd_b$	$\surd_d$		$\surd_{c,d}$									...
7	$\surd_b$	$\surd_{c,d}$											...
8	$\surd_b$	$\surd_d$		$\surd_d$				$\surd_d$					...
9	$\surd_b$	$\surd_{c,d}$				$\surd_e$							...

TAB. 2.1 – Existence de codes parfaits sur $\mathbb{Z}^n \square Q_k$

Preuve : On remarque que chaque $Q_2(x)$ peut contenir 1 sommet du code (Q_2 de type '•') ou aucun sommet (de type '∅'). Un Q_2 de type '•' a exactement 1 voisin de type '•' tandis qu'un Q_2 de type '∅' doit avoir 4 voisins de type '•'. Pour le cas $\mathbb{Z}^2 \square Q_2$, on se réfère à la Figure 2.4 . Une analyse similaire mais très fastidieuse permet de prouver le cas $\mathbb{Z}^3 \square Q_2$. □

2.1.5 Bilan sur la poutre

On récapitule les résultats de cette section dans la table 2.1 où

– '$\surd$' signifie qu'il existe un code parfait :

'a' d'après le théorème 2.1.2

'b' d'après le théorème 2.1.4

'c' d'après le théorème 2.1.2 et la proposition 2.1.9

'd' d'après le théorème 2.1.5

'e' d'après le théorème 2.1.5 et la proposition 2.1.9

– '$-$' signifie qu'il n'existe pas de code parfait d'après le théorème 2.1.12 sauf pour '$-_f$' qui sont prouvés dans la proposition 2.1.13.

Dans ce tableau, on réalise que tous les résultats d'existence correspondent à des dimensions d'hypercube impaire ou nulle. Il serait certai-

nement intéressant de vérifier s'il existe un code parfait sur une poutre dont la composante binaire est de dimension paire. Mais tout résultat supplémentaire dans cette voie serait intéressant, en particulier des résultats d'inexistence qui sont généralement plus difficile à obtenir.

2.2 (a, b)-codes

Dans cette partie, nous étudions l'existence d'(a, b)-codes sur la grille d-dimensionnelle selon les valeurs des paramètres a, b et d. Cette étude, faite avec Sylvain Gravier, Michel Mollard et Simon Špacapan, avait été commencée par les deux premiers il y a déjà quelques années, pendant un voyage de Sylvain au Canada. Nous avons ressorti les vieux cahiers et les vieux mails pour reprendre le problème, et nos résultats devraient être prochainement soumis dans une revue internationale.

Les (a, b)-codes sont une généralisation des codes parfaits intéressante car elle révèle plusieurs des problèmes sous-jacents. Entre autre, en montrant l'existence de $(0, 1)$-codes dans $\mathbb{Z}^d$ pour tout d, nous donnons une nouvelle preuve à des résultats de Golomb et Welch dans [35]. Nous remontrons aussi les résultats de Gravier, Mollard et Payan dans [37] en montrant l'existence de $(1, 1)$-codes dans $\mathbb{Z}^d$ pour tout d. Enfin, la proposition 2.1.13 fournie dans la partie précédente n'est autre qu'un résultat d'inexistence de $(1, 4)$-code dans $\mathbb{Z}^2$ et $\mathbb{Z}^3$. Les (a, b)-codes traduisent donc des contraintes structurelles dans de nombreux autres cas.

Les (a, b)-codes ont déjà été étudiés sous le nom de *recouvrements parfaits pondérés de rayon 1.* Avec cette désignation, un (a, b)-code correspond à un $(\frac{b-a}{b}, \frac{1}{b})$-recouvrement parfait. Le travail effectué dans le domaine correspond principalement à une étude dans la métrique de Hamming, on pourra se référer à [17], chapitre 13. En particulier, Cohen, Honkala, Litsyn et Mattson [18] ont montré l'existence d'un (a, b)-code sur K_q^n quand il existe i positif tel que $n = \frac{b(q^i-1)+a}{q-1}$.

Dans la suite, nous allons commencer par donner quelques résultats généraux, qui permettent surtout d'avoir une idée plus précise de ce que sont les (a, b)-codes. Puis, la partie 2.2.2 sera consacrée à des résultats d'inexistence d'(a, b)-codes. Ensuite, nous allons proposer une méthode de construction de codes dans la partie 2.2.3, que nous utiliserons enfin dans la partie 2.2.4, pour construire des (a, b)-codes.

2.2.1 Premiers résultats

Nous commençons par quelques résultats généraux sur les graphes réguliers.

Observation 2.2.1 *Soit G un graphe k-régulier. Les ensembles triviaux $\emptyset$ et $V(G)$ sont des (a, b)-codes, à savoir $V(G)$ est un (k, i)-code et $\emptyset$ est un $(i, 0)$-code pour tout $0 \leq i \leq k$.*

De plus, si en plus d'être k-régulier, G est biparti, alors chacune des parties de la partition des sommets forme un $(0, k)$-code.

Les deux propositions suivantes fournissent des opérations permettant de construire des (a, b)-codes.

Proposition 2.2.2 (des codes complémentaires) *Soit G un graphe k-régulier. S'il existe un (a, b)-code C sur G, alors son complémentaire $\overline{C}$ est un $(k - b, k - a)$-code sur G.*

Preuve : Soit C un (a, b)-code sur G. Par définition d'un (a, b)-code, tout sommet $v \in \overline{C}$ a b voisins dans C. Tous les autres voisins de v, c'est à dire $k - b$ sommets, sont dans $\overline{C}$, donc

$$\forall v \in \overline{C},\ |N(v) \cap \overline{C}| = k - b\,.$$

De plus, tout sommet $v \in C$ a a voisins dans C, donc $k - a$ voisins dans $\overline{C}$

$$\forall v \notin \overline{C},\ |N(v) \cap \overline{C}| = k - a\,.$$

Par conséquent, $\overline{C}$ est un $(k - b, k - a)$-code dans G. □

Maintenant, occupons nous des résultats dans la grille $\mathbb{Z}^d$. Quel que soit d, nous savons d'après Golomb et Welch [35] qu'il existe des $(0, 1)$-codes sur $\mathbb{Z}^d$ (voir théorème 2.1.4). De plus, d'après Gravier, Mollard et Payan [37], nous savons qu'il existe des $(1, 1)$-codes sur $\mathbb{Z}^d$ pour tout d.

Proposition 2.2.3 (de superposition) *S'il existe un (a, b)-code sur $\mathbb{Z}^d$, alors il existe un $(a + 2, b)$-code sur $\mathbb{Z}^{d+1}$.*

Preuve : Soit C un (a, b)-code sur $\mathbb{Z}^d$. On construit un $(a+2, b)$-code C' sur $\mathbb{Z}^{d+1}$ de la façon suivante : pour tout $u = (u_1, \ldots, u_{d+1}) \in \mathbb{Z}^{d+1}$, $u \in C'$ si et seulement si $(u_1, \ldots, u_d) \in C$. Intuitivement, on choisit une coordonnée, et pour chaque hyperplan obtenu en fixant cette coordonnée, on prend un exemplaire du code C. Tout sommet u dans le code C' a $a + 2$ voisins dans le code : a sommets v tels que $v_{d+1} = u_{d+1}$ (dans le même hyperplan), et les deux sommets $(u_1, \ldots, u_d, u_{d+1} + 1)$ et $(u_1, \ldots, u_d, u_{d+1} - 1)$ (les deux sommets des hyperplans voisins). Tout sommet u qui n'est pas dans le code a b voisins v dans le code, tous dans le même hyperplan, c'est à dire vérifiant $v_{d+1} = u_{d+1}$. □

Théorème 2.2.4 (des codes auto-complémentaires) *Pour tous i et d vérifiant $0 < i < 2d$, il existe un $(i, 2d - i)$-code sur $\mathbb{Z}^d$.*

Preuve : Pour tout d, il existe un $(0, 2d)$-code sur $\mathbb{Z}^d$, car le graphe est biparti. De plus l'ensemble

$$C = \{u = (u_1, \ldots, u_d) \in \mathbb{Z}^d \mid \frac{u_d}{2} + \sum_{x=1}^{d-1} u_x \equiv 0 \bmod 2\}$$

est un $(1, 2d-1)$-code sur $\mathbb{Z}^d$ (voir figure 2.5). Ceci montre déjà le théorème pour $d = 1$.

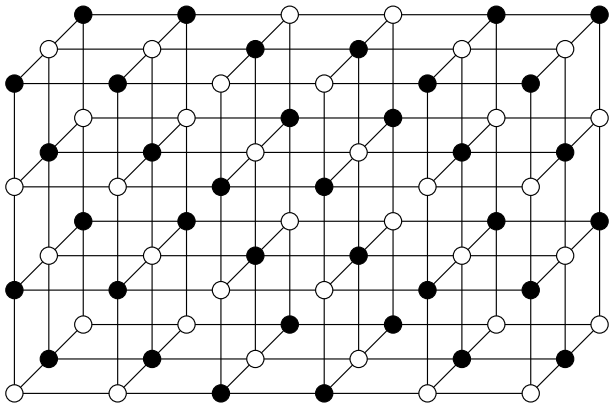


FIG. 2.5 – Construction d'un $(1, 2d-1)$-code sur $\mathbb{Z}^d$ pour $d = 3$

On montre qu'il existe un $(i, 2d-i)$-code sur $\mathbb{Z}^d$ pour $d \geq 2$ par induction sur d à l'aide de la proposition 2.2.3. Le cas de base pour $d = 1$ est déjà fait. Supposons que le résultat est vrai pour $d-1$, donc qu'il existe un $(i, 2d-2-i)$-code sur $\mathbb{Z}^{d-1}$ pour tout i, $0 \leq i \leq 2d-2$. La proposition 2.2.3 nous permet d'en déduire qu'il existe un $(i+2, 2d-2-i)$-code sur $\mathbb{Z}^d$ pour tout i, $0 \leq i \leq 2d-2$. Par conséquent, en notant $i' = i+2$, il existe un $(i', 2d-i')$-code sur $\mathbb{Z}^d$ pour tout i', $2 \leq i' \leq 2d$. Puisque nous avons déjà prouvé les cas où $i' = 0$ ou 1, on obtient le résultat souhaité. Par induction, le théorème est vérifié. □

2.2.2 Résultats d'inexistence

Nous présentons ici deux résultats d'inexistence d'(a, b)-codes quand a est petit et b est grand.

Théorème 2.2.5 *Pour tous entiers i et d, $0 < i < d$, il n'existe pas de $(i, 2d)$-code sur $\mathbb{Z}^d$.*

Preuve : Nous allons prouver ce théorème par l'absurde. Supposons que C est un $(i, 2d)$-code sur $\mathbb{Z}^d$ avec $0 < i < d$. Puisque $i > 0$, il existe deux sommets adjacents u et v dans C. u et v ont tous deux au moins $2d-i \geq d+1$ voisins hors du code. Ces voisins sont répartis sur $2d-1$ directions : l'une est la direction opposée du voisin dans le code, et les $2d-2$ directions restantes, communes à u et v (voir figure 2.6). Parmi ces $2d-2$ directions, au moins $2d-i-1 \geq d$ donne sur un voisin hors du code depuis u, et au moins autant donnent sur un voisin hors du code depuis v, il y a donc forcément une direction vers laquelle le voisin de u et celui de v ne sont pas dans le code. Ces voisins sont adjacents, et tout deux hors du code. Or dans un $(i, 2d)$-code en dimension d, tout sommet hors du code a tous ses voisins dans le code, il y a une contradiction. □

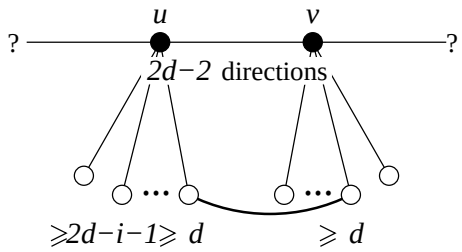


FIG. 2.6 – Il n'existe pas de $(i, 2d)$-code pour $0 < i < d$

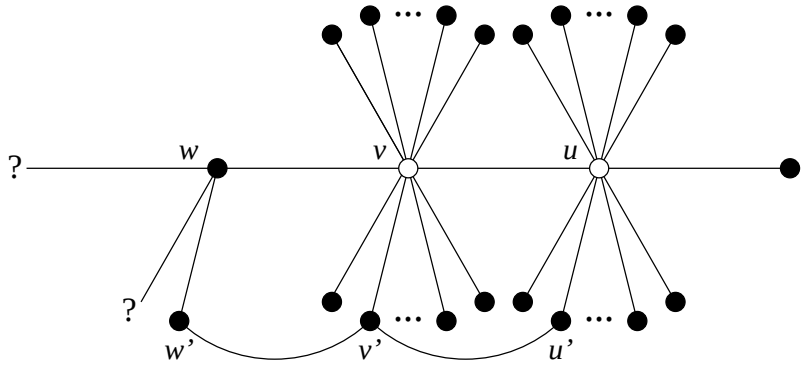


FIG. 2.7 – Il existe trois sommets alignés dans un $(j, 2d-1)$-code

À l'aide de la proposition 2.2.2, on déduit le corollaire suivant :

Corollaire 2.2.6 *Il n'existe pas de* $(0, 2d-i)$*-code sur* $\mathbb{Z}^d$ *quand* $0 < i < d$.

Théorème 2.2.7 *Pour tous entiers* j *et* d *tels que* $1 < j < \frac{2d+2}{3}$*, il n'existe pas de* $(j, 2d-1)$*-code sur* $\mathbb{Z}^d$.

Preuve : Soient j et d vérifiant $1 < j \leq 2d$,. Supposons qu'il existe un $(j, 2d-1)$-code C sur $\mathbb{Z}^d$.

Nous allons d'abord montrer qu'il existe trois sommets alignés tous trois dans le code. Comme tout sommet hors du code a $2d-1$ voisins dans le code, il existe deux sommets adjacents u et v qui ne sont pas dans le code. Tous leurs autres voisins sont dans le code (voir figure 2.7). Entre autre w, le voisin de v dans la direction opposée à u est dans le code. w a donc $j > 1$ voisins dans le code ; soit w' l'un d'entre eux qui ne soit pas aligné avec u et v. Soit v' le voisin de v dans la même direction que w' ; v' et w' sont adjacents. De même, soit u' le voisin de u dans la même direction que w' ; u' et v' sont adjacents. u', v' et w' sont dans le code, et alignés.

Les sommets u' et w' ont $j-1$ voisins différents de v' dans le code, et v' a $j-2$ voisins différents de u' et w' dans le code. Il n'y a aucun triplet de sommets alignés tous trois hors du code, ou celui du milieu aurait au plus $2d-2$ voisins dans le code. Donc les $j-1+j-2+j-1$ voisins de u', v'

ou w' doivent être répartis de telle façon que chacune des $2d-2$ directions différentes de celles de l'axe du triplet u', v', w' ait un sommet dans le code. Par conséquent, $j \geq \frac{2d+2}{3}$. Le théorème en découle. □

Encore une fois, la proposition des codes complémentaires nous permet de déduire :

Corollaire 2.2.8 *Il n'existe pas de $(1, 2d-j)$-codes dans $\mathbb{Z}^d$ quand $1 < j < \frac{2d+2}{3}$.*

2.2.3 Méthode de construction d'(a, b)-codes

Dans cette partie, nous présentons une méthode basée sur le lemme 2.2.9, permettant de construire de nombreux (a, b)-codes périodiques. Elle consiste à choisir un motif initial en dimension moindre, puis à recopier ce motif avec des translations pour former un bon voisinage pour chaque sommet. Une illustration de l'utilisation de cette méthode est proposée dans la figure 2.8. Avant d'expliciter la méthode, nous montrons le lemme suivant, qui en est le support.

Lemme 2.2.9 *Soient $k \geq 1$ et $S \subseteq \mathbb{Z}^k$. S'il existe un ensemble D de vecteurs k-dimensionnels $\{\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_p\}$, tels que*

$$\forall u \in S, \quad |N(u) \cap S| + \sum_{x=1}^{p} |\{u + \vec{v}_x\} \cap S| + \sum_{x=1}^{p} |\{u - \vec{v}_x\} \cap S| = a$$

$$\forall u \in \overline{S}, \quad |N(u) \cap S| + \sum_{x=1}^{p} |\{u + \vec{v}_x\} \cap S| + \sum_{x=1}^{p} |\{u - \vec{v}_x\} \cap S| = b$$

alors il existe un (a, b)-code sur $\mathbb{Z}^{k+p}$.

Preuve : On définit S et les vecteurs $\vec{v}_x$ comme dans le lemme. Soit $\mathcal{P}$ la projection suivante :

$$\begin{array}{rccl} \mathcal{P} : & \mathbb{Z}^{k+p} & \longrightarrow & \mathbb{Z}^k \\ & (u_1, \ldots, u_k, \ldots, u_{k+p}) & \longmapsto & (u_1, \ldots, u_k) - u_{k+1}\vec{v}_1 - \ldots - u_{k+p}\vec{v}_p \end{array}$$

On définit le code $C \subseteq \mathbb{Z}^{k+p}$ comme l'ensemble des sommets u tels que $\mathcal{P}(u) \in S$. Nous allons montrer que cette construction fait de C un (a, b)-code dans $\mathbb{Z}^{k+p}$. Soit $w = (w_1, \ldots, w_{k+p})$ un sommet quelconque de $\mathbb{Z}^{k+p}$. Pour $1 \leq x \leq k+p$, on note w^{x+} le sommet $(w_1, \ldots, w_x + 1, \ldots, w_{k+p})$ et w^{x-} le sommet $(w_1, \ldots, w_x - 1, \ldots, w_{k+p})$. On a $N(w) = \{w^{x+}, w^{x-} \mid 1 \leq x \leq k+p\}$. Soit $u = \mathcal{P}(w)$. On remarque tout d'abord que l'ensemble des sommets w^{x+} et w^{x-} pour $x \leq k$ se projette exactement sur le voisinage de u dans $\mathbb{Z}^k$, c'est à dire que $\{\mathcal{P}(w^{x+}), \mathcal{P}(w^{x-}) \mid 1 \leq x \leq k\} = N(u)$. De plus, pour tout x tel que $k+1 \leq x \leq k+p$, on a $\mathcal{P}(w^{x+}) = u - \vec{v}_y$

S	●	●	●	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○
$\lvert N(u) \cap S \rvert$	1	2	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1
$\vec{v}_1 = +0$	●	●	●	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○
$-\vec{v}_1 = -0$	●	●	●	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○
$\vec{v}_2 = +2$	○	○	●	●	●	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○
$-\vec{v}_2 = -2$	●	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	●	●
$\vec{v}_3 = +4$	○	○	○	○	●	●	●	○	○	○	○	○	○	○	○
$-\vec{v}_3 = -4$	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	●	●	●	○
$\vec{v}_4 = +5$	○	○	○	○	○	●	●	●	○	○	○	○	○	○	○
$-\vec{v}_4 = -5$	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	●	●	●	○	○
$\vec{v}_5 = +7$	○	○	○	○	○	○	○	●	●	●	○	○	○	○	○
$-\vec{v}_5 = -7$	○	○	○	○	○	○	○	○	●	●	●	○	○	○	○
$\lvert N(u) \cap C \rvert$	4	4	4	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2

FIG. 2.8 – Utilisation du lemme 2.2.9 pour construire un $(4, 2)$-code sur $\mathbb{Z}^6$.

et $\mathcal{P}(w^{x-}) = u + \vec{v}_y$ avec $y = x - k$. Par conséquent, on a $|N(w) \cap C| = |N(u) \cap S| + \sum_{x=1}^{p} |\{u + \vec{v}_x\} \cap S| + \sum_{x=1}^{p} |\{u - \vec{v}_x\} \cap S|$. Par définition d'un (a, b)-code, et d'après l'hypothèse du lemme, on en déduit que C est un (a, b)-code sur $\mathbb{Z}^{k+p}$. □

À l'aide de ce lemme, nous pouvons construire de nombreux (a, b)-codes, ce que nous ferons dans le théorème 2.2.12. Dans la figure 2.8, nous montrons un exemple d'utilisation de cette méthode. Nous choisissons un motif S, ici en une dimension. Ce motif périodique, de période 15, comporte trois sommets du code consécutifs (en noir). Sur la deuxième ligne du tableau, nous pouvons déjà reporter le nombre de voisin du code de chaque sommet du motif. Ensuite, nous choisissons des vecteurs $\vec{v}_i$ en plaçant des copies du motif en parallèle au motif initial. Chacun de ces vecteurs correspondra à une translation appliquée au motif pour une dimension, c'est pourquoi il est nécessaire de placer pour chaque $\vec{v}_i$ le motif correspondant à $-\vec{v}_i$, représentant les deux sens possibles sur une direction. On procède ainsi de façon que le nombre final de sommets du code adjacents à chaque sommet du motif initial soit bien a ou b. On remarquera que l'utilisation du vecteur nul correspond exactement à l'utilisation de la proposition 2.2.3, de superposition. Une fois ce choix de vecteurs fait, il suffit de construire le code comme dans la preuve du lemme 2.2.9.

Une reformulation du lemme permet de présenter plus facilement les constructions de caractère général que nous faisons dans le théorème 2.2.12. Dans cette reformulation, on précise le nombre d'apparitions de chaque vecteur, ce qui revient à imposer que tous les vecteurs v_x soient distincts.

Lemme 2.2.10 (Reformulation du lemme 2.2.9) *Soit $k \geq 1$ et $S \subseteq \mathbb{Z}^k$. S'il existe un ensemble D de vecteurs k-dimensionnels $\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_p$ et p entiers positifs $\alpha_1, \ldots, \alpha_p$ tels que*

$$\forall u \in S, \qquad |N(u) \cap S| + \sum_{x=1}^{p} \alpha_x |\{u + \vec{v}_x\} \cap S| + \sum_{x=1}^{p} \alpha_x |\{u - \vec{v}_x\} \cap S| = a$$

$$\forall u \in \overline{S}, \qquad |N(u) \cap S| + \sum_{x=1}^{p} \alpha_x |\{u + \vec{v}_x\} \cap S| + \sum_{x=1}^{p} \alpha_x |\{u - \vec{v}_x\} \cap S| = b$$

alors il existe un (a, b)-code sur $\mathbb{Z}^{k+r}$ avec $\sum_{x=1}^{p} \alpha_x = r$.

Dans la partie suivante, nous allons construire des (a, b)-codes à partir de motifs périodiques en une dimension dont la période est composée de 1 à 3 sommets adjacents dans l'ensemble S, suivis d'un nombre quelconque de sommets hors de S. Dans le cadre de cette construction, l'observation suivante permet de comprendre la forme des résultats obtenus.

Observation 2.2.11 *Soient $a \geq 2$ et $b \geq 1$. Si on peut former un (a, b)-code en dimension d en utilisant la méthode décrite à partir d'un motif en une dimension dont la période comporte $n \geq 1$ sommets de S puis $m \geq 1$ sommets hors de S, alors la relation $na + mb = 2nd$ est vérifiée.*

Preuve : Supposons qu'on forme un (a, b)-code C en dimension d avec un tel motif M. Soit $\{u_1, \ldots, u_{n+m}\}$ l'ensemble des sommets d'une période du motif, avec $\{u_1, \ldots, u_n\} \subset S$. Pour chacune des $d-1$ dimensions nouvelles que l'on va créer, on va ajouter 2 fois n sommets du code dans le voisinage du motif. Donc on va ajouter $2n(d-1)$ au voisinage des sommets du motif :

$$\sum_{x=1}^{n+m} |N_{\mathbb{Z}^d}(u_x) \cap C| = \sum_{x=1}^{n+m} |N_M(u_x) \cap S| + 2n(d-1)\,.$$

Comme C est un (a, b)-code, on a $|N_{\mathbb{Z}^d}(u_x) \cap C| = a$ pour tout x, $1 \leq x \leq n$, donc $|N_{\mathbb{Z}^d}(u_x) \cap C| = |N_M(u_x) \cap S| + (a-1)$ si $x = 1$ ou n et $|N_{\mathbb{Z}^d}(u_x) \cap C| = |N_M(u_x) \cap S| + (a-2)$ sinon. De même, on a $|N_{\mathbb{Z}^d}(u_x) \cap C| = b$ pour tout x, $n+1 \leq x \leq n+m$, donc $|N_{\mathbb{Z}^d}(u_x) \cap C| = |N_M(u_x) \cap S| + (b-1)$ si $x = n+1$ ou $n+m$ et $|N_{\mathbb{Z}^d}(u_x) \cap C| = |N_M(u_x) \cap S| + b$ sinon. Par conséquent, on a

$$\sum_{x=1}^{n+m} |N_{\mathbb{Z}^d}(u_x) \cap C| = \sum_{x=1}^{n+m} |N_M(u_x) \cap S| + (n(a-2)+2) + (mb-2)\,.$$

Enfin, $2n(d-1) = n(a-2) + m(b)$ et on en déduit la relation recherchée : $na + mb = 2nd$. □

2.2.4 Résultats d'existence

Nous allons maintenant construire toute une série de codes en utilisant la méthode explicitée dans la partie précédente. Dans toute cette sous-partie, on définit les entiers $i \geq 0$, $j \geq 1$, $k \geq 0$, $p \geq 1$ quelconques.
Nous construisons d'abord 2 ensembles de codes, en utilisant des motifs dont la période comprend 1 sommet isolé dans S, et un nombre d'abord pair puis impair de sommets hors de S.

1. **Il existe un $(2i, j)$-code sur $\mathbb{Z}^{i+pj}$:** Soient $S = \{(2p+1)n \mid n \in \mathbb{Z}\}$, $\vec{v}_0 = 0$, $\vec{v}_1 = 1$, $\dots$ $\vec{v}_p = p$, $\alpha_0 = i$, $\alpha_1 = j - 1$ et $\alpha_x = j$ pour tout x, $2 \leq x \leq p$. Alors pour tout sommet $u \in S$,

$$|N(u) \cap S| + \sum_{x=0}^{p} \alpha_x |\{u + \vec{v}_x, u - \vec{v}_x\} \cap S| = 2i\,.$$

   Par construction, on a aussi pour tout $u \notin S$,

$$|(N(u) \cap S| + \sum_{x=0}^{p} \alpha_x |\{u + \vec{v}_x, u - \vec{v}_x\} \cap S| = j\,.$$

   Ainsi, d'après le lemme 2.2.10, il y a un $(2i, j)$-code dans $\mathbb{Z}^d$ avec $d = 1 + \sum_{x=0}^{p} \alpha_x = i + pj$.
2. **Il existe un $(2i, 2j)$-code sur $\mathbb{Z}^{i+(2p-1)j}$:** Soient $S = \{(2p)n \mid n \in \mathbb{Z}\}$. Soit $\vec{v}_0 = 0$, $\vec{v}_1 = 1$, $\dots$ $\vec{v}_p = p$, $\alpha_0 = i$, $\alpha_1 = 2j - 1$ et $\alpha_x = 2j$ pour tout x, $2 \leq x < p$. Enfin, soit $\alpha_p = j$. D'après le lemme 2.2.10, ceci nous permet de former un $(2i, 2j)$-code sur $\mathbb{Z}^d$, avec $d = 1 + \sum_{x=0}^{p} \alpha_x = i + (2p-1)j$.

Maintenant, nous construisons des codes en utilisant des motifs ayant deux sommets adjacents dans le code. Tout d'abord, nous formons des motifs de longueur divisible par 4, puis des motifs de longueur impaire. Nous ne parlons pas des motifs de longueur congrue à 2 mod 4, car ils ne permettent pas de faire des codes avec un triplet de paramètres nouveau par rapport aux codes produits par des motifs de période impair avec des sommets dans S isolés.

3. **Il existe un $(j+2i, j+2k)$-code sur $\mathbb{Z}^{i+pj+(2p-1)k}$:** Soit l'ensemble $S = \{4pn, 4pn+1 \mid n \in \mathbb{Z}\}$ et les vecteurs $\vec{v}_0 = 0, \vec{v}_1 = 1, \dots, \vec{v}_{2p} = 2p$. On définit les paramètres suivants : $\alpha_0 = i$, $\alpha_1 = j - 1$, $\alpha_{2x+1} = j$, pour tout entier impair $2x + 1$, $1 \leq x < p$, puis $\alpha_{2x} = k$ pour tout entier pair $2x$, $1 \leq x < p$, et enfin $\alpha_{2p} = k$ (voir la figure 2.9). D'après le lemme 2.2.10, on peut ainsi former un $(j + 2i, j + 2k)$-code sur $\mathbb{Z}^d$, avec

$$d = 1 + \sum_{x=0}^{2p} \alpha_x = 1 + i + j - 1 + (p-1)j + (p-1)2k + k = i + pj + k(2p-1)$$

	S	•	•	○	○	○	○ … ○	○	○	○	○	○ … ○	○	○
$\pm\vec{v}_0$	$\times i$	$\bullet^2$	$\bullet^2$	○	○	○	○ … ○	○	○	○	○	○ … ○	○	○
$\pm\vec{v}_1$	$\times j-1$	⋆	•	•	○	○	○ … ○	○	○	○	○	○ … ○	○	⋆
$\pm\vec{v}_3$	$\times j$	○	○	○	•	•	○ … ○	○	○	○	○	○ … ⋆	⋆	○
$\pm\vec{v}_{2p-1}$	$\times j$	○	○	○	○	○	○ … ○	•	•	⋆	⋆	○ … ○	○	○
$\pm\vec{v}_2$	$\times 2k$	○	○	•	•	○	○ … ○	○	○	○	○	○ … ○	⋆	⋆
$\pm\vec{v}_4$	$\times 2k$	○	○	○	○	•	• … ○	○	○	○	○	○ … ⋆	○	○
$\pm\vec{v}_{2p-2}$	$\times 2k$	○	○	○	○	○	○ … •	•	○	○	⋆	⋆ … ○	○	○
$\pm\vec{v}_{2p}$	$\times k$	○	○	○	○	○	○ … ○	○	$\bullet^2$	$\bullet^2$	○	○ … ○	○	○

FIG. 2.9 – Construction d'un $(j+2i, j+2k)$-code sur $Zs^{i+pj+k(2p-1)}$.

4. **Il existe un $(j+2i, 2j)$-code sur $\mathbb{Z}^{i+pj}$:**
   Soit $S = \{(2p+1)n, (2p+1)n+1 \mid n \in \mathbb{Z}\}$ et les vecteurs $\vec{v}_0 = 0, \vec{v}_1 = 1, \ldots, \vec{v}_p = p$. On définit les paramètres suivants : $\alpha_0 = i$, $\alpha_1 = j-1$, puis $\alpha_x = j$ pour tout x, $1 < x \leq p$. D'après le lemme 2.2.10, on peut ainsi former un $(j+2i, 2j)$-code sur $\mathbb{Z}^d$, avec

$$d = 1 + \sum_{x=0}^{2p} \alpha_x = 1 + i + j - 1 + (p-1)j = i + pj\,.$$

Maintenant, nous construisons des codes en utilisant des motifs ayant trois sommets adjacents dans le code. Nous allons étudier les motifs de période congrues à 1,2,4 et 5 mod 6, les autres congruences ne nous permettant pas de construire d'(a, b)-codes pour des triplets nouveaux.

5. **Il existe un $(2i+2j, 3j)$-code sur $\mathbb{Z}^{i+3pj}$:** Soit $S = \{(6p+1)n, (6p+1)n+1, (6p+1)n+2 \mid n \in \mathbb{Z}\}$ et les vecteurs $\vec{v}_x = x$ pour $0 \leq x \leq 3p$. On définit les paramètres suivants : $\alpha_0 = i$, $\alpha_1 = j-1$, puis $\alpha_x = j$ pour tout x, $2 < x \leq 3p$. D'après le lemme 2.2.10, on peut ainsi former un $(2i+2j, 3j)$-code sur $\mathbb{Z}^d$, avec

$$d = 1 + \sum_{x=0}^{3p} \alpha_x = 1 + i + j - 1 + (3p-1)j = i + 3pj\,.$$

6. **Il existe un $(2i+4j, 6j)$-code sur $\mathbb{Z}^{i+(6p+1)j}$:** Soit $S = \{(6p+2)n, (6p+2)n+1, (6p+2)n+2 \mid n \in \mathbb{Z}\}$ et les vecteurs $\vec{v}_x = x$ pour $0 \leq x \leq 3p+1$. On définit les paramètres suivants : $\alpha_0 = i$, $\alpha_1 = 2j-1$, puis $\alpha_x = 2j$ pour tout x, $2 < x \leq 3p$, enfin $\alpha_{3p+1} = j$. D'après le lemme 2.2.10, on peut ainsi former un $(2i+4j, 6j)$-code sur $\mathbb{Z}^d$, avec

$$d = 1 + \sum_{x=0}^{3p+1} \alpha_x = 1 + i + 2j - 1 + (3p-1)2j + j = i + (6p+1)j\,.$$

7. **Il existe un $(2i + 4j, 6j)$-code sur $\mathbb{Z}^{i+(6p+3)j}$:** Soit $S = \{(6p + 4)n, (6p + 4)n + 1, (6p + 4)n + 2 \mid n \in \mathbb{Z}\}$ et les vecteurs $\vec{v}_x = x$ pour $0 \leq x \leq 3p+2$. On définit les paramètres suivants : $\alpha_0 = i$, $\alpha_1 = 2j-1$, puis $\alpha_x = 2j$ pour tout x, $2 < x \leq 3p + 1$, enfin $\alpha_{3p+2} = j$. D'après le lemme 2.2.10, on peut ainsi former un $(2i + 4j, 6j)$-code sur $\mathbb{Z}^d$, avec

$$d = 1 + \sum_{x=0}^{3p+2} \alpha_x = 1 + i + 2j - 1 + 3p2j + j = i + (6p + 3)j\,.$$

8. **Il existe un $(2i + 2j, 3j)$-code sur $\mathbb{Z}^{i+(3p+2)j}$:** Soit $S = \{(6p + 5)n, (6p + 5)n + 1, (6p + 5)n + 2 \mid n \in \mathbb{Z}\}$ et les vecteurs $\vec{v}_x = x$ pour $0 \leq x \leq 3p+2$. On définit les paramètres suivants : $\alpha_0 = i$, $\alpha_1 = j-1$, puis $\alpha_x = j$ pour tout x, $2 < x \leq 3p + 2$. D'après le lemme 2.2.10, on peut ainsi former un $(2i + 2j, 3j)$-code sur $\mathbb{Z}^d$, avec

$$d = 1 + \sum_{x=0}^{3p+2} \alpha_x = 1 + i + j - 1 + (3p + 1)j = i + (3p + 2)j\,.$$

Théorème 2.2.12 *Pour tout $i \geq 0$, $j \geq 1$, $k \geq 0$, $p \geq 1$, on peut construire des*

- *$(2i, j)$-codes sur $\mathbb{Z}^{i+pj}$,*
- *$(2i, 2j)$-codes sur $\mathbb{Z}^{i+(2p-1)j}$,*
- *$(j + 2i, j + 2k)$-codes sur $\mathbb{Z}^{i+pj+(2p-1)k}$,*
- *$(j + 2i, 2j)$-codes sur $\mathbb{Z}^{i+pj}$,*
- *$(2i + 2j, 3j)$-codes sur $\mathbb{Z}^{i+3pj}$,*
- *$(2i + 4j, 6j)$-codes sur $\mathbb{Z}^{i+(6p+1)j}$,*
- *$(2i + 4j, 6j)$-codes sur $\mathbb{Z}^{i+(6p+3)j}$,*
- *$(2i + 2j, 3j)$-code sur $\mathbb{Z}^{i+(3p+2)j}$.*

2.2.5 Bilan

Pour illustrer le théorème 2.2.12, nous donnons comme exemple l'ensemble des (a, b)-codes que nous savons former sur $\mathbb{Z}^9$ dans la figure 2.2. Chaque nombre correspond à la première formule du théorème qui peut être utilisée pour construire le code. 'c' signifie qu'on construit le code en faisant le complémentaire d'un code déjà formé, et 't' signifie que l'un des ensembles triviaux correspond à ce code. Enfin, '$-$' signifie que l'on a su prouver l'inexistence d'un tel (a, b)-code.

On remarque enfin que chaque formule permet de former des codes qu'aucune autre ne permet de former. Par exemple, sur $\mathbb{Z}^9$

- la première formule permet de former un $(0, 3)$-code,
- la deuxième formule permet de former un $(0, 6)$-code,
- la troisième formule permet de former un $(1, 1)$-code,
- la quatrième formule permet de former un $(1, 2)$-code,

$a\backslash b$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18
0	t	1	2	1			2			1	–	–	–	–	–	–	–	–	2
1	t	3	4										–	–	–	–	–	3	–
2	t	1	1	5	1				1								2	–	–
3	t	3	4	3		3	4									3		–	–
4	t	1	2	8	4		7	1							2			–	–
5	t	3	4											3				–	–
6	t	1	1	1	2		1		4	5			2					–	–
7	t	3	4									3							–
8	t	1	2	5	4	1	6				2								–
9	t	3	4	3			4			3			c						4
10	t	1	1	8	1		5		2				c				4		
11	t	3	4					3							4				
12	t	1	2	1	4		2		c	c	c		4		c	c			c
13	t	3	4			3					4					c			
14	t	1	1	5	2		c		4		c		c		c		c		
15	t	3	4	3	c		4		c	c	c		c		c	c	c		c
16	t	1	2	c	4	c	c	c	c	c	c	c	c	c	c	c	c	c	c
17	t	3	4	c	c	c	c	c	c	c	c	c	c	c	c	c	c	c	c
18	t	t	t	t	t	t	t	t	t	t	t	t	t	t	t	t	t	t	t

TAB. 2.2 – Existence d'(a, b)-codes sur $\mathbb{Z}^9$

– la cinquième formule permet de former un $(2, 4)$-code,
– la sixième formule permet de former un $(8, 6)$-code,
– la septième formule permet de former un $(4, 6)$-code,
– la huitième formule permet de former un $(4, 3)$-code.

On peut remarquer aussi que la première formule permet de construire des $(0, 1)$-codes dans toutes les dimensions, redémontrant ainsi le résultat de Golomb et Welch dans [35]. De même, la troisième formule permet de construire des $(1, 1)$-codes sur toutes les dimensions, redémontrant le résultat de Gravier, Mollard et Payan dans [37].

La proposition 2.2.3 de superposition laisse entendre que les résultats d'existence d'(a, b)-codes pour $a = 0$ ou 1 ont un statut un peu particulier, puisqu'ils donnent des résultats sur toutes les autres lignes en dimensions supérieures. Sur ces deux lignes, deux problèmes ont attiré notre attention en particulier. Tout d'abord, du théorème précédent, on peut déduire le corollaire suivant :

Corollaire 2.2.13 *Soit $b \geq 0$ tel que b divise $2d$. Alors il existe un $(0, b)$-code sur $\mathbb{Z}^d$.*

De plus, la relation de l'observation 2.2.11 nous permet de dire que c'est

les seuls que nous pourrons former avec notre méthode sur un motif en une dimension. Nous conjecturons que ce sont les seuls $(0, b)$-codes que l'on puisse former.

Conjecture 1 *Soient b et d deux entiers, $0 \leq b \leq 2d$. Il existe un $(0, b)$-code sur $\mathbb{Z}^d$ si et seulement si b divise $2d$.*

Quand $a = 1$, on peut aussi remarquer que nous ne savons pas construire beaucoup d'(a, b)-codes. Les seuls $(1, b)$-codes que l'on sait construire quand $2 < b < 2d - 1$ sont ceux que l'on construit avec la troisième formule, et alors b est nécessairement impair.

Problème 2 *Existe-t-il des $(1, b)$-codes en dimension d pour $2 < b < 2d-1$ et b pair ?*

2.3 Perspectives

Dans ce chapitre, nous avons étudié l'existence de codes parfaits dans la métrique de Lee. Nous avons obtenus des résultats nouveaux, tant d'existence que d'inexistence, ces derniers étant généralement plus difficiles à montrer.

La première partie était consacrée à l'existence de codes parfaits sur la poutre, c'est à dire le produit de l'hypercube et de la grille. Cette étude tente de généraliser à la métrique de Lee l'étude des codes parfaits sur des alphabets mixtes qui avait été proposée dans la métrique de Hamming. Un premier enjeu serait évidemment de révéler l'existence ou l'inexistence de codes parfaits dans les cas encore inconnus (les cases blanches du tableau récapitulatif). Notamment, au cours de notre étude, nous n'avons pas utilisé certaines techniques utilisées pour les graphes de Hamming (voir par exemple [17], th. 11.5.1). Nous pourrions peut-être construire de nouveaux codes en adaptant ces techniques. Néanmoins, dans la plupart des cas ouverts, il faut probablement s'orienter vers des résultats d'inexistence, comme les études "à la main" peuvent en donner l'intuition. Les résultats d'inexistence étant toujours plus durs à démontrer, ceci expliquerait que ces problèmes soient encore ouverts.

Sur un autre plan, nous pourrions aussi étendre un peu la généralisation proposée. Dans cette généralisation, nous conservons le fait que l'un des facteurs soit l'hypercube, au lieu d'étudier des tores quelconques. Ce choix a été fait par rapport au statut particulier de l'hypercube, qui représente les alphabets binaires. Or l'hypercube a été généralisé en les graphes de Hamming, associés à la métrique du même nom. Il serait intéressant d'étudier l'existence de codes parfaits sur un produit mixte d'un tore (ou d'une grille infinie) et d'un graphe de Hamming, correspondant à un alphabet ayant une métrique mixte, de Lee et de Hamming.

La seconde partie de ce chapitre était consacrée aux (a, b)-codes, c'est à dire aux codes pondérés de rayon 1. Principalement, nous avons proposé une méthode efficace et simple qui permet la construction et la description de nombreux codes dans la métrique de Lee.

Il serait tout d'abord intéressant de voir si cette méthode permet de construire d'autres résultats. Nous avons essayé de l'utiliser avec des motifs plus complexes que ceux présentés ici, par exemple en deux dimensions ou avec deux zones disjointes de sommets dans le code, mais nous n'avons pas réussi à construire d'(a, b)-codes nouveaux. La relation de l'observation 2.2.11 permet déjà de connaître certaines limites de la méthode, mais il serait intéressant de voir s'il est possible de former des (a, b)-codes indépendants de cette relation, et en particulier indépendants de la méthode proposée.

Chapitre 3

Des codes à la domination

Comme on l'a fait remarquer dans l'introduction, il y a une dualité faible entre le problème de code et le problème de domination. En fait, quel que soit le voisinage considéré, il y a dualité entre le problème d'empilement et de recouvrement. Nous allons d'abord en redonner une preuve (indépendante des pompiers), puis nous montrerons comment cette dualité peut être exploitée pour obtenir des résultats dans les deux domaines.

Tout d'abord, pour généraliser un peu les notions d'empilement et de recouvrement, nous définissons les $\mathcal{R}$-dominants et les $\mathcal{R}$-recouvrements. Soient G un graphe, $\mathcal{R} \subset \mathbb{N}$. On appelle $\mathcal{R}$-empilement un ensemble de sommets P tel que pour toute paire de sommets distincts $u, v \in S$, les $\mathcal{R}$-boules centrées sur u et v sont disjointes. De même, un $\mathcal{R}$-recouvrement est un ensemble de sommets C tel que tout sommet du graphe est contenu dans une $\mathcal{R}$-boule centrée sur un sommet de C. Les $\mathcal{R}$-empilements généralisent la notion de code, puisqu'un $\{0,1\}$-empilement est un code correcteur. Les $\mathcal{R}$-recouvrements, eux, généralisent la notion de domination et de domination totale. En effet, un $\{0,1\}$-recouvrement est un dominant et un $\{1\}$-recouvrement est un dominant total. Les pavages avec des $\mathcal{R}$-boules, qui sont des $\mathcal{R}$-empilements et des $\mathcal{R}$-recouvrements, ont déjà été étudiés en tant que tels par Sylvain Gravier, Michel Mollard et Charles Payan dans [37].

Lemme 3.0.1 (Dualité) *Soient G un graphe, $\mathcal{R} \subset \mathbb{N}$, on a*

$$\min_{C\ \mathcal{R}\text{-recouvrement}} |C| \geq \max_{P\ \mathcal{R}\text{-empilement}} |P|$$

Preuve : Soit C un $\mathcal{R}$-recouvrement et P un $\mathcal{R}$-empilement de G. Pour tout sommet c de C, il y a au plus un sommet p de P tel que $d(c,p) \in \mathcal{R}$. Dans le cas contraire, c serait dans les deux $\mathcal{R}$-boules centrées sur ces sommets. Par conséquent, $|C| \geq |P|$, et ceci est toujours vrai pour un $\mathcal{R}$-recouvrement minimum et un $\mathcal{R}$-empilement maximum. □

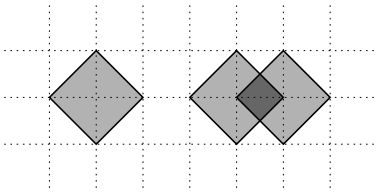
Nous allons maintenant montrer comment l'utilisation de ce lemme peut-être utilisée pour une preuve. Le théorème suivant, que nous avons prouvé

avec Sylvain Gravier, à été publié dans [20]. Il concerne les {1}-empilements et les {1}-recouvrements, c'est à dire les empilements ouverts et les dominants totaux. Il est à remarquer que dans le cadre de la domination, il n'y a pas de théorème équivalent à celui-ci, et le problème est encore ouvert en général.

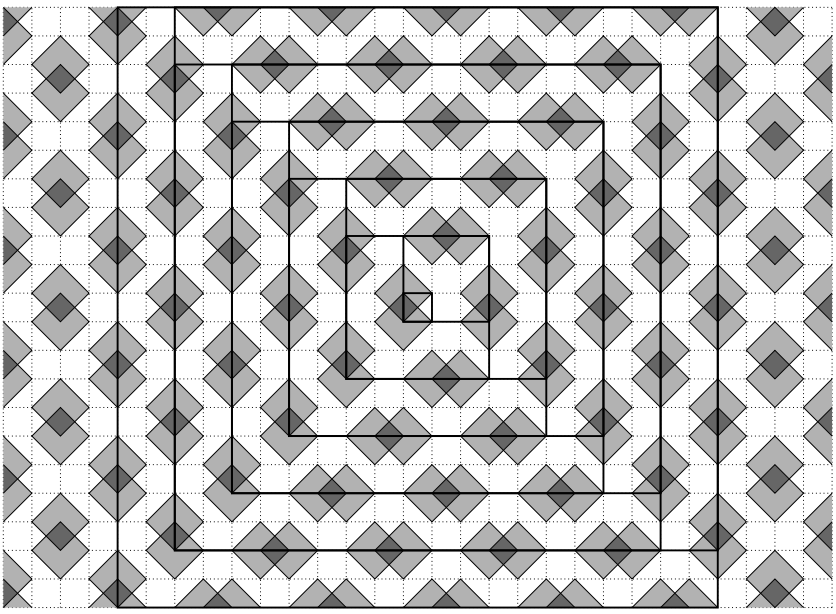
Théorème 3.0.2 ([20]) *Le cardinal du plus grand empilement ouvert et du plus petit dominant total de la grille carrée $P_n \Box P_n$ est*

$$\begin{cases} \frac{n^2+2n}{4} & \text{si } n \text{ est pair.} \\ \frac{n^2+2n+1}{4} & \text{si } n \equiv 1 \bmod 4 \\ \frac{n^2+2n-3}{4} & \text{si } n \equiv 3 \bmod 4 \end{cases}$$

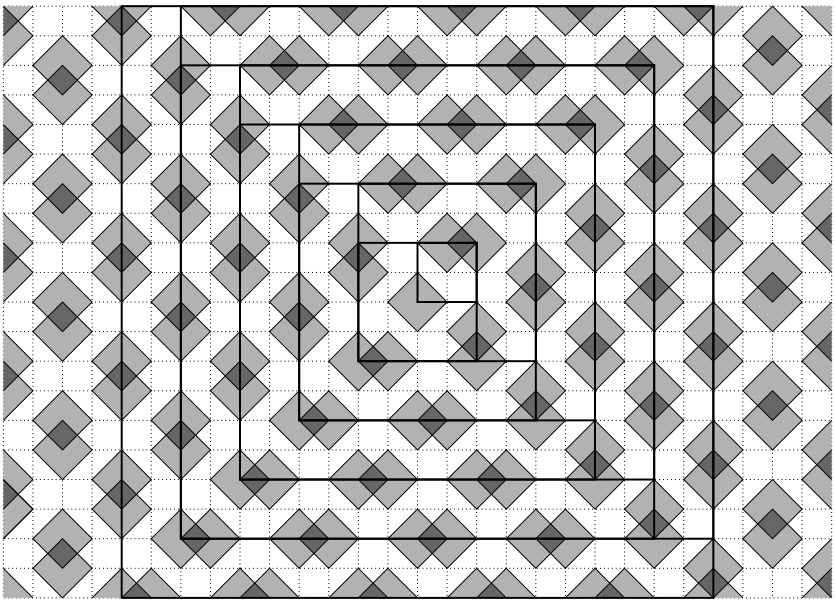
Preuve : Pour prouver le théorème, on construit des empilements et des recouvrements de même cardinal. D'après le lemme 3.0.1, ces ensembles sont optimaux. Les empilements ouverts et les recouvrements totaux sont représentés en dessinant les {1}-boules centrées sur les sommets des ensembles. Dans le schéma suivant, on peut voir une {1}-boule à gauche, et à droite deux {1}-boules distinctes placées de façon à ce que chacune couvre le sommet central de l'autre. Pour autant, ces {1}-boules sont disjointes, aucun sommet n'est couvert 2 fois.



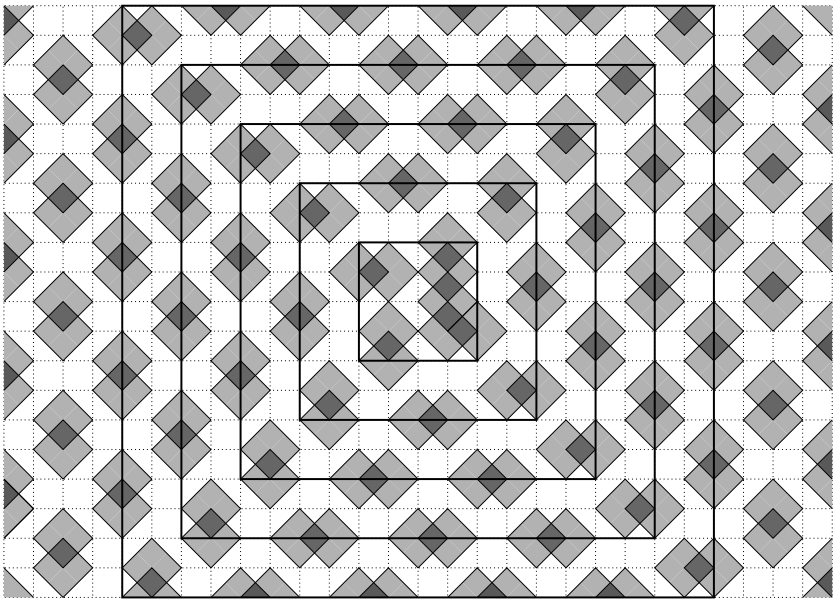
Nous donnons d'abord un empilement ouvert qui est aussi un dominant total pour tout n pair :



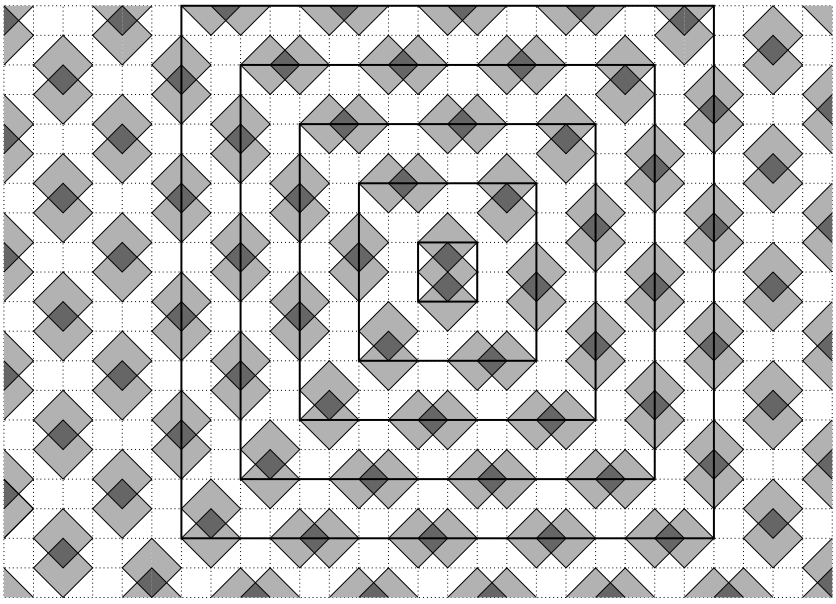
Voici un empilement ouvert pour tout n impair :



Maintenant, un dominant total pour $n \equiv 1 \bmod 4$:



Enfin, un dominant total pour $n \equiv 3 \bmod 4$:



Ainsi, pour tout entier n, nous avons un empilement et un recouvrement de $\{1\}$-boules de même cardinal, ce qui prouve le théorème. □

Chapitre 4

Domination dans les produits de graphes

Dans ce chapitre, nous étudions différents problèmes liés à la domination dans les produits de graphes. Bien que moins populaire que la coloration, la domination est l'un des problèmes fondamentaux de la théorie des graphes. C'est en Europe dans les années 1850 que le problème a été imaginé. Des joueurs d'échecs enthousiastes se sont demandé combien de reines il était nécessaire de placer sur un échiquier pour que toutes les cases soient attaquées ou occupées par une reine. La première publication écrite à ce sujet l'a été par De Jaenisch en 1862 [19]. Exactement un siècle plus tard, Claude Berge introduisit dans [4] le concept de la domination dans un graphe de façon plus générale, l'appelant encore *nombre de stabilité externe*. En 1977, dans un récapitulatif sur la domination [16], Cockayne et Hedetniemi introduirent la notation γ qui sera conservée par la suite. Ils sont à l'origine de l'engouement qui s'ensuivra et qui donnera lieu aux milliers de papiers sur le sujet écrits aujourd'hui.

On trouve principalement deux approches pour l'étude de la domination dans les graphes. L'une, un peu comme pour la coloration, consiste à donner des bornes pertinentes sur le nombre de domination de certaines classes de graphes. Nous réservons cette approche pour le chapitre suivant. Dans ce chapitre, nous nous préoccupons de l'autre approche, qui consiste à chercher des bornes sur le nombre de domination du produit de deux graphes en fonction des nombres de domination des facteurs. On se doit de citer la célèbre conjecture de Vizing, suggérée en 1963 dans [59] et formulée comme conjecture en 1968 dans [60] :

Conjecture 3 (Vizing [60]) *Pour tous graphes G et H,*

$$\gamma(G \,\square\, H) \geq \gamma(G)\gamma(H)$$

On ignore toujours si cette conjecture est vraie ou non. Clark et Suen ont montré dans [14] que l'inégalité était vraie avec un facteur $\frac{1}{2}$, c'est à dire que

$\gamma(G \,\square\, H) \geq \frac{1}{2}\gamma(G)\gamma(H)$. Cela reste le seul résultat de ce type à ce jour. De nombreux résultats montrent que cette conjecture est vraie pour certaines classes de graphes. Citons en particulier celui de Barcalkin et German [2] quand l'un des facteurs est le graphe couvrant d'un graphe décomposable de même nombre de domination, qui a pour corollaire le résultat sur les arbres de Jacobson et Kinch [51, 52] et celui sur les cycles de El Zahar et Parek [30]. Récemment, Ron Aharoni et Tibor Szabó ont montré que la conjecture est vérifiée si l'un des graphes est triangulé [1].

En parallèle à cette conjecture, de nombreuses études visent à définir ou à borner les paramètres de domination des produits de graphes. Par exemple, Brešar, Klavžar et Rall ont montré dans [10] que pour tous graphes G et H, $\gamma(G \times H) \geq 3\gamma(G)\gamma(H)$. Plus en lien avec ce que nous ferons dans la partie 4.3, Nowakowski et Rall [55] ont conjecturé en 1996 que pour tous graphes G et H, $\Gamma(G)\Gamma(H) \leq \Gamma(G \,\square\, H)$. Une preuve élégante de cette conjecture a récemment été proposée par Brešar [9]. Une autre question ouverte proposée par Henning et Rall dans [49] concerne le nombre de domination totale du produit cartésien de graphes. Ils suggèrent que $\gamma_t(G)\gamma_t(H) \geq 2\gamma_t(G \,\square\, H)$, et prouvent le résultat pour certaines classes de graphes, y compris la classe des arbres non triviaux. Dans le cas général, la question est toujours ouverte.

Dans ce chapitre, nous étudions la domination à travers les produits de graphes. La partie 4.1 est consacrée à l'étude de liens entre la domination totale et d'autres formes de domination sur le produit direct. Nous donnons des bornes supérieures et des bornes inférieures liant la domination totale avec la $\{2\}$-domination totale, la 2-tuple domination totale, et le nombre d'empilement ouvert. Grâce à ces bornes, nous évaluons le nombre de domination totale de certains graphes, et nous fournissons finalement une famille infinie de graphes montrant que ces bornes sont serrées. Enfin, illustrant l'intérêt de l'étude de la domination totale pour mieux comprendre la domination, nous donneront une nouvelle borne pour le nombre de domination du produit direct en fonction des nombre de $\{2\}$-domination des facteurs.

Dans la partie 4.2, nous étudions la domination de puissance sur les différents produits de chemins. Dorfling et Henning [28] ont déjà caractérisé le nombre de domination de puissance sur le produit cartésien de chemins, nous étudions ici chacun des autres produits, excepté sur la composante impaire du produit direct de 2 chemins impairs. Par exemple, nous montrons que si n est pair et C est une composante connexe de $P_m \times P_n$, où m est impair ou $m \geq n$, alors $\gamma_\pi(C) = \lceil n/4 \rceil$. Pour le produit fort, nous montrons que $\gamma_\pi(P_n \boxtimes P_m) = \max\{\lceil n/3 \rceil, \lceil (n+m-2)/4 \rceil\}$, à moins que $3m-n-6 \equiv 4 \pmod 8$. Le nombre de domination de puissance est aussi déterminé pour tout produit lexicographique de graphes.

Enfin, dans la partie 4.3, nous montrons une borne "à la Vizing" pour le nombre de domination supérieure du produit cartésien de graphes. Cette borne est complètement dans l'esprit de la relation de Vizing et donne suite

au résultat de Brešar sur la domination supérieure. En outre, nous montrerons que le nombre de domination totale supérieure d'un graphe est au plus le double du nombre de domination supérieure du graphe.

4.1 Domination totale du produit direct

4.1.1 Introduction

Dernièrement, le nombre de domination totale γ_t du produit direct de graphes a attiré l'attention [11, 29, 56]. L'objectif premier est de déterminer exactement cet invariant de graphe sur le produit direct. Le résultat principal de Rall dans [56] va dans ce sens, montrant que pour tout arbre T avec au moins une arête et pour tout graphe G sans sommet isolé, $\gamma_t(T \times H) = \gamma_t(T)\gamma_t(H)$. Des résultats similaires existent pour des graphes avec un nombre de domination totale et un nombre d'empilement ouvert égaux. Dans [29], les auteurs ont calculé le nombre de domination totale du produit direct quand l'un des facteurs est une clique et l'autre un cycle, et quand les deux facteurs sont des cycles.

Le problème exact étant compliqué sur les graphes en général, il est utile de trouver de bonnes bornes inférieures et supérieures du nombre de domination totale du produit direct, en fonction d'invariants des facteurs. Deux bornes de ce type ont été montrées dans [29, 56] et seront mentionnées dans la suite. De plus, le nombre de domination totale des facteurs peut être utilisé pour borner le nombre de domination du produit (voir [11, 56]), reliant ainsi la variante au problème initial de domination.

Dans cette partie, nous présentons des résultats allant dans ce sens. Ils ont été le fruit d'un travail avec Sylvain Gravier ainsi que Sandi Klavžar et Simon Špacapan lors de leur visite au laboratoire Leibniz [23]. Dans la sous-partie 4.1.2, nous montrerons la relation suivante, qui lie le nombre de domination total du produit direct et le nombre de $\{2\}$-domination totale de ses facteurs

$$\gamma_t(G \times H) \geq \max\{\gamma_t^{\{2\}}(G), \gamma_t^{\{2\}}(H)\}\,.$$

Sous certaines conditions, nous fournirons aussi une borne supérieure pour le nombre de domination totale du produit direct impliquant le nombre de 2-tuple domination totale des facteurs. Ceci nous permet en particulier d'obtenir le nombre de domination totale du produit direct d'un cycle et d'une clique précédemment calculé dans [29]. Nous construirons aussi des graphes qui atteignent ces bornes. Dans la sous-partie 4.1.3, nous montrerons comment on peut utiliser cette approche pour borner le nombre de domination du produit direct de graphes en fonction du nombre de $\{2\}$-domination des facteurs.

4.1.2 Quelques bornes sur le nombre de domination totale

Soit G et H deux graphes sans sommet isolé. Rall [56] a prouvé la borne inférieure suivante :

$$\gamma_t(G \times H) \geq \max\{\rho^\circ(G)\gamma_t(H), \rho^\circ(H)\gamma_t(G)\}\,, \tag{4.1}$$

De leur côté, El-Zahar, Gravier, et Klobučar [29] ont prouvé :

$$\gamma_t(G \times H) \geq \max\{\frac{|G|}{\Delta(G)}\gamma_t(H), \frac{|H|}{\Delta(H)}\gamma_t(G)\}\,. \tag{4.2}$$

Les deux bornes (4.1) et (4.2) sont indépendantes, aucune ne découle de l'autre. Pour le vérifier, on remarquera que pour $n \geq 3$, $\rho^\circ(K_n) = 1$, $\gamma_t(K_n) = 2$, donc (4.1) nous donne $\gamma_t(K_n \times K_n) \geq 2$ tandis que (4.2) nous fournit $\gamma_t(K_n \times K_n) \geq 3$. (En fait, $\gamma_t(K_n \times K_n) = 3$ pour $n \geq 3$, cf. [11].) A l'inverse, pour tout $n \geq 2$, $\rho^\circ(K_{1,n}) = 2$, $\gamma_t(K_{1,n}) = 2$, donc (4.1) donne $\gamma_t(K_{1,n} \times K_{1,n}) \geq 4$ tandis que (4.2) ne donne que $\gamma_t(K_{1,n} \times K_{1,n}) \geq 3$.

Nous proposons une nouvelle borne inférieure pour le nombre de domination totale du produit direct de graphes.

Théorème 4.1.1 [23] *Pour tous graphes connexes non triviaux G et H, on a*

$$\gamma_t(G \times H) \geq \max\{\gamma_t^{\{2\}}(G), \gamma_t^{\{2\}}(H)\}\,. \tag{4.3}$$

Preuve : Soit S un dominant total minimum de $G \times H$. On définit la fonction entière f sur $V(G)$ par

$$f(u) = \min\{2,\ |S \cap {}^uH|\ \}\,.$$

Nous allons montrer que f est une fonction $\{2\}$-dominante totale de G.

Soit u un sommet arbitraire de G et soit $H = \{v_1, \ldots, v_n\}$. H n'étant pas un graphe trivial, $n \geq 2$. Comme S est un dominant total, il existe un sommet (x, v_i) qui domine (u, v_1). On remarque que $x \neq u$ et $i \neq 1$. Considérons le sommet (u, v_i). Il est dominé par un certain sommet (y, v_j), avec $y \neq u$ et $j \neq i$. Si $x = y$ alors comme $i \neq j$, on a $f(x) = 2$, et donc $f(N(u)) \geq 2$. Par ailleurs, si $x \neq y$ alors $f(x) \geq 1$, $f(y) \geq 1$, et en conséquence $f(N(u)) \geq 2$ aussi. Ainsi, f est une fonction $\{2\}$-dominante totale de G avec $w(f) \leq |S|$, et donc $\gamma_t(G \times H) \geq \gamma_t^{\{2\}}(G)$. Par commutativité du produit direct, le résultat suit. □

Pour voir que la borne (4.3) peut être meilleure que (4.1) et (4.2) pour un même graphe, on considère l'exemple suivant. Pour $k \geq 3$, soit Fleur_k le graphe que l'on obtient avec k copies de K_3 en choisissant un sommet de chaque copie et en les fusionnant (voir figure 4.1). On a alors $\rho^\circ(\text{Fleur}_k) = 1$, $\gamma_t(\text{Fleur}_k) = 2$, et $\gamma_t^{\{2\}}(\text{Fleur}_k) = 4$. Ainsi, (4.3) donne $\gamma_t(\text{Fleur}_k \times \text{Fleur}_k) \geq$

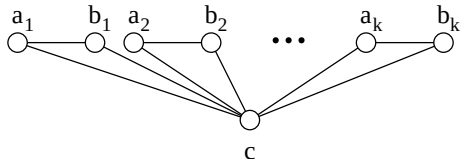


FIG. 4.1 – Le graphe Fleur_k

4, tandis que (4.2) implique $\gamma_t(\text{Fleur}_k \times \text{Fleur}_k) \geq 3$ et (4.1) $\gamma_t(\text{Fleur}_k \times \text{Fleur}_k) \geq 2$.

A l'inverse, supposons que $\rho^\circ(G) \geq 2$. Alors

$$\gamma_t(G \times H) \geq \rho^\circ(G)\gamma_t(H) \geq 2\gamma_t(H) \geq \gamma_t^{\{2\}}(H)\,,$$

et donc (4.3) est induite pas (4.1) dès que $\rho^\circ(G) \geq 2$. Il serait élégant de trouver une borne inférieure qui couvre les trois bornes citées, mais les exemples fournis montrent que cette tâche peut s'avérer difficile.

Théorème 4.1.2 [23] *Soit G un graphe avec $\delta(G) \geq 2$ et $n \geq \gamma_t^{(\times 2)}(G)$. Alors*

$$\gamma_t(G \times K_n) \leq \gamma_t^{(\times 2)}(G)\,. \tag{4.4}$$

Preuve : Soit $S = \{s_1, \ldots, s_k\}$ un 2-tuple dominant total minimum de G et soit $K_n = \{v_1, \ldots, v_n\}$. Nous allons montrer que $T = \{(s_i, v_i) \mid i = 1, \ldots, k\}$ est un dominant total minimum de $G \times K_n$. On remarque avant tout que T est bien défini car $n \geq \gamma_t^{(\times 2)}(G) = k$.

Soit (x, v_t) un sommet quelconque de $G \times K_n$. Supposons que x est dominé par les sommets s_i et s_j. Alors, s_i, s_j et x sont distincts deux à deux. Sans perte de généralité, supposons que $t \neq i$. Alors (x, v_t) est dominé par (s_i, v_i), et donc T est un dominant total de $G \times K_n$. On en déduit que $\gamma_t(G \times K_n) \leq \gamma_t^{(\times 2)}(G)$. □

Comme corollaire à ce théorème, on peut retrouver un résultat de Mohammed El-Zahar, Sylvain Gravier et Antoaneta Klobučar :

Corollaire 4.1.3 [29] *Pour tout $m \geq n \geq 3$, $\gamma_t(C_n \times K_m) = n$.*

Preuve : Clairement, $\gamma_t^{(\times 2)}(C_n) = n$, donc le théorème 4.1.2 nous donne $\gamma_t(C_n \times K_m) \leq n$. D'autre part, la borne inférieure se déduit aisément de (4.2). □

En utilisant l'inégalité (4.4) nous construisons des exemples où la borne inférieure (4.2) est optimale. Soit G_n obtenu à partir du graphe complet K_n en ajoutant un sommet x_e pour chaque arête $e = uv$ de K_n, et en reliant x_e avec u et v. (voir la figure 4.2 où G_4 est représenté.)

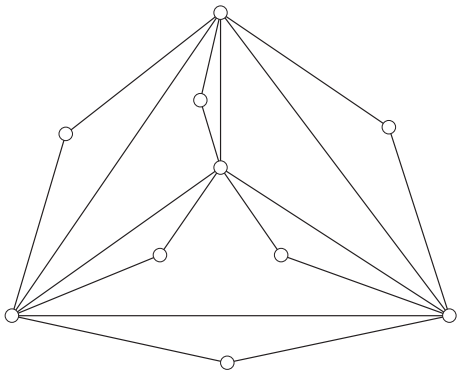


FIG. 4.2 – Le graphe G_4

Nous allons prouver que pour $n \geq 3$, $\gamma_t(G_n \times K_n) = n$. Il est facile de vérifier que $\gamma_t^{(\times 2)}(G_n) = n$, alors avec (4.4), $\gamma_t(G_n \times K_n) \leq n$. D'autre part, (4.2) induit que pour tout $n \geq 3$,

$$\gamma_t(G_n \times K_n) \geq \frac{|K_n|}{\Delta(K_n)}\gamma_t(G_n) = n\,.$$

Nous concluons cette partie avec une dernière borne inférieure. Nous ignorons si (4.5) est éventuellement déductible de (4.1). Néanmoins, pour certains graphes G, il peut être plus facile de calculer $\gamma_t^{(\times 2)}(G)$ que $\rho^{\circ}(G)$ et $\gamma_t(G)$. De plus, la technique de preuve utilisée ci-après n'est pas standard, et pourrait être utile dans d'autres situations.

Théorème 4.1.4 [23] *Soient G et H deux graphes. S'ils vérifient $\delta(G) \geq 2$ et $\Delta(G) < \gamma_t(H)$, alors*

$$\gamma_t(G \times H) \geq \gamma_t^{(\times 2)}(G)\,. \tag{4.5}$$

Preuve : Soit S un dominant total minimum de $G \times H$. Nous allons construire un 2-tuple dominant total X de G comme suit.

Soit $H = \{v_1, \ldots, v_n\}$. Pour un sommet arbitraire u de G, on agit ainsi. Soit $(x, v_i) \in S$ un sommet qui domine (u, v_1), avec $x \neq u$ et $i \neq 1$. Considérons le sommet (u, v_i). Il est dominé par un sommet (y, v_j), tel que $y \neq u$ et $j \neq i$. Si $x \neq y$, alors on pose $x, y \in X$. Supposons que $x = y$. S'il existe un sommet (u, v_k) avec $k \neq i, j$ qui est dominé par un sommet (z, v_ℓ), où $z \neq x$, alors on pose $x, z \in X$. Supposons donc que tous les sommets de ${}^uH$ sont dominés par un sommet de ${}^xH$. Choisissons alors un sommet quelconque $w \neq x$ de u et posons $x, w \in X$. (On remarque que w existe car $\delta(G) \geq 2$.)

Clairement, X est un 2-tuple dominant total. Nous affirmons que $|X| \leq |S|$. Dans ce but nous allons définir une fonction injective $f : X \to S$ de

la façon suivante. Soit $x \in X$ un sommet tel que $|^x H \cap S| \geq 1$ et soit i le plus petit indice tel que $(x, v_i) \in S$. On pose alors $f(x) = (x, v_i)$. Soit maintenant $x \in X$ mais ${}^x H \cap S = \emptyset$. Il existe alors un voisin y_x de x tel que y_x est adjacent à y'_x qui vérifie $|^{y'_x} H \cap S| \geq \gamma_t(H)$. Soit i le plus petit indice tel que $(y'_x, v_i) \in S$ et (y'_x, v_i) est l'image d'un sommet de X par la fonction f. On pose alors $f(x) = (y'_x, v_i)$. Il nous faut montrer que f est bien définie, et alors f sera injective. Supposons à l'inverse que pour un certain sommet x, une telle affectation est impossible. Alors, x est adjacent à un y_x tel que y_x est adjacent à y'_x. De plus, il existe deux sommets $x_2, \ldots, x_{\gamma_t(H)}$ adjacents aux y_{x_i}, respectivement, et tout y_{x_i}, $2 \leq i \leq \gamma_t(H)$, est adjacent à y'_x. On en déduit que le degré de y'_x est au moins $\gamma_t(H)$, ce qui n'est pas possible par l'hypothèse du théorème. □

4.1.3 Une remarque sur la domination dans le produit direct

Nous donnons ici une borne inférieure pour le nombre de domination du produit direct de graphes. Cette borne est dans le même esprit que la borne précédente pour la domination totale.

Théorème 4.1.5 [23] *Pour tous graphes connexes non triviaux G et H,*

$$\gamma(G \times H) \geq \max\{\gamma^{\{2\}}(G), \gamma^{\{2\}}(H)\}\,. \tag{4.6}$$

Preuve : Soit S un dominant minimum de $G \times H$. On définit la fonction entière f sur $V(G)$ par

$$f(u) = \min\{2,\ |S \cap {}^u H|\ \}\,.$$

Nous allons montrer que f est une fonction $\{2\}$-dominante de G. Soient u un sommet quelconque de G et $H = \{v_1, \ldots, v_n\}$. Rappelons que H n'est pas trivial, et donc que $n \geq 2$.
Premier cas : Si $f(u) = 2$, il n'y a rien à montrer.
Deuxième cas : si $f(u) = 1$. On peut supposer sans perte de généralité que $(u, v_1) \in S$. Donc $(u, v_i) \notin S$, pour $i \geq 2$. Comme S est un dominant, (u, v_2) est dominé par un certain sommet $(x, v_j) \in S$, avec $x \neq u$. Donc $f(x) \geq 1$ et x est adjacent à u. On en déduit que $f(N[u]) \geq 2$.
Troisième cas : Supposons que $f(u) = 0$. Alors $(u, v_1) \notin S$ et $(u, v_2) \notin S$, donc il existe des sommets x_1, x_2 de G et v_i, v_j de H tels que (x_1, v_i) domine (u, v_1) et (x_2, v_j) domine (u, v_2). Si $x_1 \neq x_2$, alors $f(x_1) \geq 1$ et $f(x_2) \geq 1$, donc $f(N[u]) \geq 2$. Supposons que $x_1 = x_2$. Dans le cas où $i \neq j$, on a $f(x_1) = 2$ et donc $f(N[u]) \geq 2$. Il nous reste à étudier le cas où $(x_1, v_i) = (x_2, v_j)$, c'est à dire quand (u, v_1) et (u, v_2) sont tous deux dominés par (x_1, v_i). On remarque alors que $i \neq 1, 2$. Donc le sommet (u, v_i) doit être dominé par un sommet (y, v_s) avec $s \neq i$. Si $y = x_1$, alors $f(x_1) = 2$ et donc $f(N[u]) \geq 2$. Et si $y \neq x_1$ alors $f(x_1) \geq 1$ et $f(y) \geq 1$, on peut donc à nouveau conclure que $f(N[u]) \geq 2$.

Nous avons ainsi prouvé que f est une fonction $\{2\}$-dominante de G. Comme $w(f) \leq |S|$, on en déduit que $\gamma(G \times H) \geq \gamma^{\{2\}}(G)$. Par commutativité du produit direct, le résultat s'ensuit. □

Dans [56], Rall a montré que pour tous graphes G et H sans sommet isolé,

$$\gamma(G \times H) \geq \max\{\rho(G)\gamma_t(H), \rho(H)\gamma_t(G)\}\,. \tag{4.7}$$

Si $\rho(G) \geq 2$, alors on a $\gamma(G \times H) \geq 2\gamma_t(H) \geq \gamma^{\{2\}}(H)$, donc (4.6) se déduit de (4.7). Néanmoins, (4.6) peut fournir une meilleure approximation pour certains "petits" graphes. On peut considérer par exemple le graphe de Hajós H, représenté Figure 4.3. Dans ce cas, $\rho(H) = 1$ (car H est de diamètre 2), $\gamma_t(H) = 2$, mais $\gamma^{\{2\}}(H) = 3$.

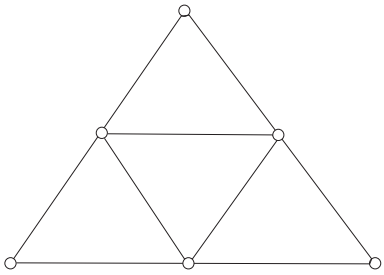


FIG. 4.3 – Le graphe de Hajós

Bien entendu, cette borne n'est pas d'un très grand intérêt, car elle n'apporte pas beaucoup d'information nouvelle, mais elle illustre bien comment l'étude de variantes de la domination peut améliorer notre connaissance de la domination.

4.2 Domination de puissance

Les réseaux électriques ont constamment besoin d'être surveillés. L'un des moyens pour remplir cette tâche est de placer des unités de mesure de phase en certains points du système. Le problème de surveillance de réseau électrique, introduit dans [3], demande de placer aussi peu d'unités de mesure que possible dans un réseau électrique.

Ce problème a été formulé comme un problème de domination en théorie des graphes par Haynes, Hedetniemi, Hedetniemi, et Henning dans [44]. Ce problème se distingue des problèmes de domination habituels dans la mesure où le positionnement d'une unité de mesure dans le graphe peut avoir des effets globaux. Par exemple, si un système électrique peut-être modélisé comme un chemin, alors une unique unité de mesure suffit à surveiller tout le réseau, quelle que soit sa longueur.

Le problème de domination de puissance a été l'objet de nombreuses études sur le point de vue algorithmique. Il s'avère que le problème est assez compliqué. Il est NP-complet même quand il est restreint aux graphes bipartis ou aux graphes triangulés [44], aux graphes planaires et aux graphes de cordes [40], ainsi qu'aux graphes *split* [40, 54]. Néanmoins, le problème peut être résolu de façon efficace sur les arbres [44] et sur les graphes d'intervalles [54].

Dans [28], Dorfling et Henning ont fourni des formules pour donner le nombre de domination de puissance des grilles, c'est à dire du produit cartésien de deux chemins. Nous avons étudié avec Sandi Klavžar, Michel Mollard et Simon Špacapan le nombre de domination de puissance des principaux autres produits de chemins, à savoir le produit direct, le produit fort et le produit lexicographique [27].

Dans la section 4.2.1, nous déterminons le nombre de domination de puissance pour le produit direct de chemins, à l'exception de la composante connexe impaire du produit de 2 chemins de longueur paire (avec un nombre impair de sommets). Dans ce cas, nous donnons une borne supérieure que nous supposons optimale. Dans la section 4.2.2, nous déterminons le nombre de domination de puissance pour le produit fort de graphes, sauf dans l'un des 8 cas où le nombre de domination de puissance est seulement borné par deux nombres consécutifs. Bien qu'il soit assez délicat de prouver les résultats pour ces deux produits de graphes, le produit lexicographique, que nous étudions dans la partie 4.2.3, est assez facile à traiter. Nous montrons que le nombre de domination de puissance du produit lexicographique de deux graphes quelconques peut s'exprimer à l'aide du nombre de domination ou de domination totale de ses facteurs.

Dans cette partie, nous désignerons les sommets du chemin P_n avec les entiers de 0 à $n-1$. De plus, pour un produit quelconque de graphes $*$, on notera (i,j), $0 \leq i < m$ et $0 \leq j < n$ les sommets de $P_m * P_n$.

4.2.1 Le produit direct

Le produit direct $P_m \times P_n$ n'est pas un graphe connexe, il est constitué de deux composantes connexes, isomorphes si m ou n est pair, non isomorphes autrement (voir [61], mais aussi [41, 53]). On appellera *composante paire* la composante connexe de $P_m \times P_n$ contenant (x_0, y_0), l'autre composante (contenant $(0,1)$) étant la *composante impaire*).

Dans cette partie, nous déterminons le nombre de domination de puissance du produit direct de deux chemins à l'exception de la composante impaire du produit de deux chemins de longueur paire (avec un nombre impair de sommets). Dans la sous-partie 4.2.1, on traite le cas où au moins l'un des deux chemins est de longueur impaire. On montre dans ce cas que $\gamma_\pi(C) = \lceil n/4 \rceil$, où C est l'une des composantes connexes (identiques) de $P_m \times P_n$ avec n pair et m impair ou $m \geq n$. Dans la sous-partie 4.2.1, nous

étudions le cas du produit de deux chemins de longueur paire et montrons que la composante paire C vérifie $\gamma_\pi(C) = \lceil (m+n)/6 \rceil$. Nous terminons en donnant la construction d'un dominant de puissance de la composante impaire d'un tel produit. Nous conjecturons que cette construction est optimale.

Soient $p_1 : P_m \times P_n \to P_m$ et $p_2 : P_m \times P_n \to P_n$ les projections naturelles sur le premier et le second facteur de $P_m \times P_n$, respectivement. On a :

Lemme 4.2.1 [27] *Soit S un dominant de puissance d'une composante connexe C de $P_m \times P_n$. Si m est impair, alors pour tout sous-chemin $P \subseteq P_n$ de longueur 3 (isomorphe à un P_4), $p_2(S) \cap P \neq \emptyset$.*

Preuve : Supposons qu'il existe un sous-chemin $P = (x_1, x_2, x_3, x_4)$ de longueur 3, tel que $p_2(S) \cap P = \emptyset$.

Nous traitons le cas de la composante paire C, le cas de la composante impaire étant analogue. Si x_1 est pair, $P_m^{x_3} \cap C$ n'est pas surveillé car chacun des voisins d'un sommet de $P_m^{x_3} \cap C$ a deux voisins dans $P_m^{x_3}$, donc deux voisins non surveillés. De même, on montre que si x_1 est impair, la fibre $P_m^{x_2} \cap C$ ne peut être surveillée. □

Au moins un facteur est de longueur impaire.

Pour résoudre le cas où au moins l'un des facteurs du produit direct est un chemin de longueur impaire, on utilisera deux lemmes.

Lemme 4.2.2 [27] *Soient m et n deux entiers pairs et soit S un dominant de puissance d'une composante connexe C de $P_m \times P_n$. S'il existe un sous-chemin $P \subseteq P_m$ de longueur 3 tel que $P \cap p_1(S) = \emptyset$ alors pour tout sous-chemin $Q \subseteq P_n$ de longueur 3, $Q \cap p_2(S) \neq \emptyset$.*

Preuve : Puisque les deux facteurs sont de longueur impaire (n et m pairs), les deux composantes connexes du produit sont isomorphes, donc on peut supposer sans perte de généralité que C est la composante paire. On montre le lemme par contraposée. Supposons que $P = (p_1, p_2, p_3, p_4) \subseteq P_m$ et $Q = (q_1, q_2, q_3, q_4) \subseteq P_n$ sont des chemins de longueur 3 qui vérifient $p_1(S) \cap P = p_2(S) \cap Q = \emptyset$ (voir figure 4.4). Soit

$$F = \{(i,j) \mid i \notin \{p_2, p_3\}, j \notin \{q_2, q_3\}\} \cap C\,.$$

Après l'étape de domination, l'ensemble des sommets surveillés est nécessairement inclus dans F. Supposons que tous les sommets de F sont surveillés. Supposons que (u,v) est un sommet de F dont tous les voisins sauf un sont contenus dans F (et donc surveillés). Nécessairement, (u,v) est sur la frontière de $P_m \times P_n$, donc $(u,v) \in \{(p_2,0), (p_2,n-1), (p_3,0), (p_3,n-1), (0,q_2), (m-1,q_2), (0,q_3), (m-1,q_3)\}$. Comme n et m sont pairs, au plus

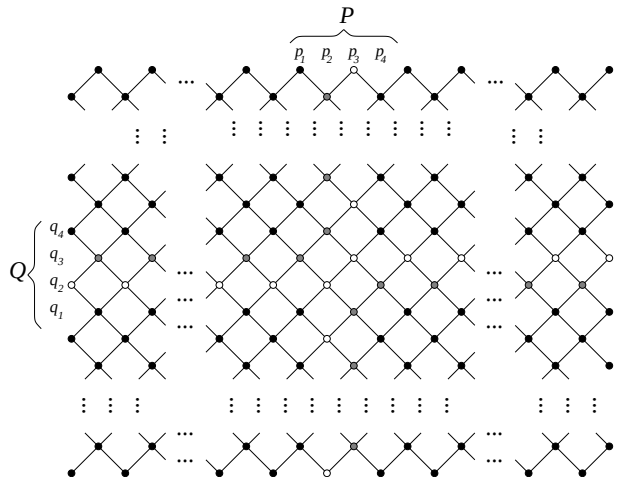


FIG. 4.4 – Preuve du lemme 4.2.2. Les sommets de F sont en noir et ceux de M sont grisés.

4 de ces sommets sont dans C. Comme on peut le voir sur la figure 4.4 dans le cas où p_1 et q_1 sont impairs, F ne se propage finalement pas en tout l'ensemble C. Les cas pour d'autres parités de p_1 et q_1 sont similaires □

Lemme 4.2.3 **[27]** *Soit m un entier pair et soit C une composante connexe de $P_m \times P_n$. Si tous les sommets de $(P_m^u \cup P_m^v) \cap C$ sont surveillés, où u et v sont des sommets adjacents de P_n, alors C est surveillé.*

Preuve : Comme m est pair, $P_m^u \cap C$ et $P_m^v \cap C$ contiennent tous deux un sommet qui a exactement un voisin qui n'est pas dans $(P_m^u \cup P_m^v) \cap C$. On voit assez vite que les fibres voisines sont ainsi complètement surveillées par propagation. On peut compléter l'argumentation par induction. □

Théorème 4.2.4 **[27]** *Soit n un entier pair et C une composante connexe de $P_m \times P_n$. Si m est impair ou $m \geq n$, alors $\gamma_\pi(C) = \lceil n/4 \rceil$.*

Preuve : Nous allons d"abord étudier le cas où m est impair. Comme n est pair, soit tous les sommets de $P_m^1 \cap C$ ont deux voisins dans $P_m^0 \cap C$, soit tous les sommets de $P_m^{n-2} \cap C$ ont deux voisins dans $P_m^{n-1} \cap C$. Par conséquent, tout dominant de puissance $S \subseteq C$ a une intersection non nulle avec l'une des fibres P_m^0, P_m^1, P_m^{n-2} et P_m^{n-1}. D'après le lemme 4.2.1, un dominant de puissance S de C vérifie la propriété : pour tout sous-chemin $P \subseteq P_n$ de longueur 3, $P \cap p_2(S) \neq \emptyset$. Sans perte de généralité, on suppose que $P_m^1 \cap S \neq \emptyset$. Comme les fibres P_m^0, P_m^{n-2} et P_m^{n-1} (mais pas P_m^{n-3}) peuvent avoir une intersection vide avec S et au moins une fibre sur quatre a une intersection non vide avec S, on trouve que

$$|S| \geq |\{1, 1+4, \ldots, 1+4\lceil (n-4)/4 \rceil\}| = \lceil n/4 \rceil \ .$$

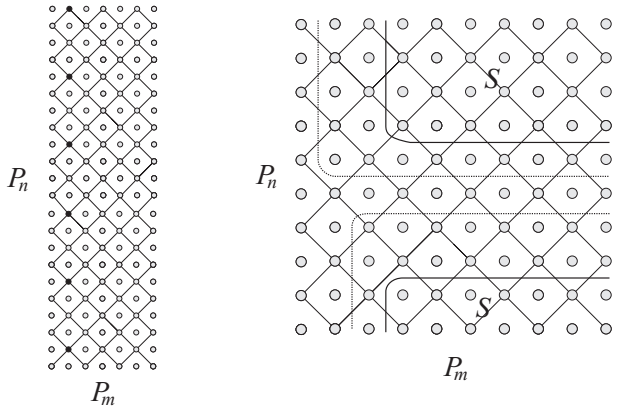


FIG. 4.5 – À gauche, un dominant de puissance optimal de $P_m \times P_n$. Les pointillés délimitent l'ensemble maximum de sommets surveillés par S dans la partie droite.

Donc $\gamma_\pi(G) \geq \lceil n/4 \rceil$. Pour montrer l'autre inégalité, il nous faut construire un dominant de puissance S de C qui vérifie $|S| = \lceil n/4 \rceil$. On peut supposer sans perte de généralité que C est la composante paire. Soit :

$$S = \{(1, 1 + 4\alpha) \,|\, \alpha = 0, \ldots, \lceil n/4 \rceil - 1\}\,. \tag{4.8}$$

On remarque que tous les sommets de ${}^0P_n$ sont surveillés car tout sommet de ${}^0P_n$ a un voisin dans S qui le domine (voir partie gauche de la figure 4.5). On remarque aussi que tous les sommets de ${}^1P_n$ sont surveillés, car tout sommet de ${}^1P_n$ a un voisin dans ${}^0P_n$ dont tous les sommets sauf un sont dans S. Maintenant, puisque les deux fibres consécutives ${}^0P_n$ et ${}^1P_n$ sont surveillées, n étant pair, le lemme 4.2.3 nous affirmes que S est un dominant de puissance de C. Ceci complète la preuve quand m est impair.

Étudions maintenant le cas où m est pair, $m \geq n$. Soit S un dominant de puissance de $P_m \times P_n$. D'après le lemme 4.2.2, il n'y a pas de sous-chemin de P_m de longueur 3 disjoint de $p_1(S)$ ou il n'y a pas de sous-chemin de P_n de longueur 3 disjoint de $p_2(S)$. Donc $|S| \geq \lfloor n/4 \rfloor$. Ceci nous donne la borne recherchée pour $n = 4k$.

Si $n = 4k + 2$ et $|S| = k$, alors soit il existe un sous-chemin $P \subseteq P_n$ de longueur 3 disjoint de $p_2(S)$, soit les 3 premières ou les 3 dernières P_m-fibres (c'est à dire, P_m^0, P_m^1 et P_m^2, ou P_m^{n-3}, P_m^{n-2} et P_m^{n-1}) ont une intersection vide avec $p_2(S)$. Dans le premier cas, il n'y a pas de sous-chemin de P_m de longueur 3 disjoint de $p_1(S)$, par conséquent, $m = n$. Ceci signifie donc que S est disjoint des fibres ${}^0P_n$, ${}^1P_n$ et ${}^2P_n$ (ou ${}^{m-3}P_n$, ${}^{m-2}P_n$ et ${}^{m-1}P_n$). Par conséquent, comme on peut le voir dans la partie droite de la figure 4.5, ${}^0P_n$ n'est pas surveillé, une contradiction. Dans le deuxième cas, sans perte de généralité, supposons que P_m^0, P_m^1 et P_m^2 ont une intersection vide avec

$p_2(S)$. Si de même ${}^0P_n$, ${}^1P_n$ et ${}^2P_n$ ont une intersection vide avec $p_1(S)$, alors ${}^0P_n$ et P_m^0 ne sont pas surveillés. Autrement, il y a un sous-chemin de P_m de longueur 3 disjoint de $p_1(S)$. Ce cas amène à une contradiction de la même façon que montré dans la figure 4.5. Donc si $n = 4k + 2$ et $|S| = k$, alors S ne peut être un dominant de puissance. Donc dans chaque cas, $|S| \geq \lceil n/4 \rceil$. Enfin, un dominant de puissance optimal S de cardinale $n/4$ quand m est pair est aussi défini par l'équation (4.8). □

On remarque que le théorème 4.2.4 est aussi vérifié quand $n = 2$. En effet, chaque composante connexe de $P_m \times P_2$ est isomorphe à P_m, donc son nombre de domination de puissance est 1.

Les deux facteurs sont de longueur paire

Nous allons continuer avec l'étude de $\gamma_\pi(p_m \times P_n)$ quand m et n sont impairs. Dans ce cas, les deux composantes connexes sont distinctes, la composante paire comporte des feuilles contrairement à la composante impaire.

Pour traiter cette situation, nous allons utiliser le concept suivant, appelé *jeu du virus*, défini sur le produit cartésien $P_m \,\square\, P_n$.

Soit un ensemble de sommet S. Soit D l'ensemble défini initialement par $D = S$ (appelé ensemble des sommets contaminés). Tant qu'il existe un sommet v dans $V \setminus D$ tel que v a au moins deux voisins dans D, on ajoute v à D (on dit que le virus se propage). Si à la fin du processus, $D = V(P_m \,\square\, P_n)$, on dit que S est un ensemble *virus-gagnant* de $P_m \,\square\, P_n$.

Théorème 4.2.5 (Folklore) *Pour toute paire d'entiers positifs m, n, il existe un ensemble virus-gagnant de $P_m \,\square\, P_n$ de cardinal $\lceil \frac{m+n}{2} \rceil$, et cet ensemble est minimum.*

Preuve : Soit

$$\begin{aligned} S \;=\; & \{(2i, 0) \mid 0 \leq i \leq \frac{m-1}{2}\} \\ & \cup \{(m-1, 2j + \mathcal{E}) \mid 0 \leq j \leq \frac{n-2}{2}, \mathcal{E} = 1 \text{ si } m \text{ pair, } 0 \text{ sinon}\} \\ & \cup \{(m-1, n-1)\} \end{aligned}$$

Par exemple, quand m et n sont impairs, S est l'ensemble de sommets $(0,0), (2,0), \ldots, (m-1,0), (m-1,2), (m-1,4), \ldots, (m-1,n-1)$. On peut vérifier sans mal que S est un ensemble virus-gagnant de bon cardinal.

Montrons que S est minimum. Pour $X \subseteq V(P_m \,\square\, P_n)$ soit $\Pi(X)$ le *périmètre de X*, c'est à dire

$$\Pi(X) = \sum_{v \in X} (4 - |N(v) \cap X|)\,.$$

Si D' est un sous-ensemble de $V(P_m \,\square\, P_n)$ obtenu par propagation à partir de D, alors $\Pi(D') \leq \Pi(D)$. En effet, si on ajoute x à D car il est voisin de y

et $z \in D$, on a $\sum_{v \in D}(4 - |N(v) \cap D'|) \leq \Pi(D) - 2$ car y et z ont un voisin de moins hors de D', et on le fait croître de $(4 - |N(x) \cap D'|) \leq 2$. à la fin de la propagation, $\Pi(D) = 2(m + n)$. Au début, on avait $\Pi(S) \leq 4|S|$. Donc, $|S| \geq (m + n)/2$. □

Le théorème ci-dessus n'est pas nouveau, il est bien connu au moins dans l'équipe et sert de support à des vulgarisations. Dans ce contexte, nous utilisons surtout la propriété que le périmètre de D n'augmente jamais.

Dans ce qui suit, nous considérerons parallèlement le produit direct $P_m \times P_n$ et le produit cartésien $P_m \,\square\, P_n$, en assimilant leurs ensembles de sommets.

Lemme 4.2.6 [27] *Soient m, n deux entiers impairs et P un dominant de puissance de la composante paire de $P_m \times P_n$. Soit S l'ensemble des sommets surveillés par P après l'étape de domination, alors S est un ensemble virus-gagnant de $P_m \,\square\, P_n$.*

Preuve : On remarque tout d'abord que tous les sommets de la composante paire ont leur deux coordonnées de même parité, soit toutes deux paires, soit impaires. Nous dirons d'un sommet qu'il est pair (respectivement impair) si ses deux coordonnées sont paires (resp. impaires). Notons aussi que comme m et n sont impairs, tous les sommets impairs ont quatre voisins, tous pairs.

Soient M et D, initialisés à S, les ensembles de sommets surveillés pour la domination de puissance et contaminés pour le jeu du virus, respectivement. Nous allons montrer par induction que si un sommet pair est ajouté à M par propagation, alors il est aussi ajouté à D par contamination. Par le choix de S, cette condition est vraie au départ.

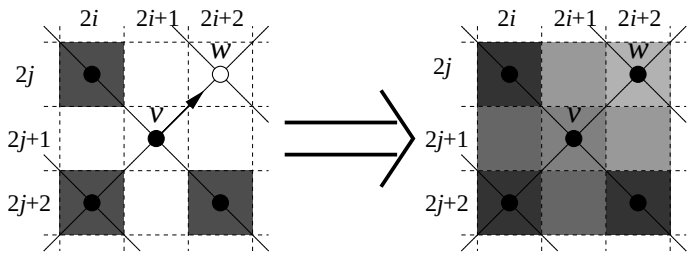


FIG. 4.6 – Propagation d'un sommet impair vers un sommet pair pour la domination de puissance et dans le jeu du virus (lemme 4.2.6)

Supposons que la condition est vraie au moment où un sommet pair w est ajouté à M par propagation depuis un sommet v. Le sommet v est impair, donc il a 4 voisins, tous pairs. Puisqu'il y a propagation, les 3 voisins de v différents de w sont dans M (surveillés). Par hypothèse d'induction, comme ils sont pairs, ils sont aussi dans D (contaminés). La figure 4.6 montre comment à partir de ces seuls trois voisins de v contaminés, le virus se

propage jusqu'à contaminer enfin w. Ainsi, nous vérifions par induction que tout sommet pair surveillé est aussi contaminé.

Comme m et n sont impair, l'ensemble des sommets pairs est un ensemble virus-gagnant de $P_m \,\square\, P_n$. Le lemme est donc vérifié.

□

Théorème 4.2.7 [27] *Soient m et n deux entiers impairs et soit C la composante paire de $P_m \times P_n$. Alors*

$$\gamma_\pi(C) = \max\left\{\left\lceil\frac{n}{4}\right\rceil, \left\lceil\frac{m+n}{6}\right\rceil\right\}.$$

Preuve : On observe avant tout que le lemme 4.2.1 ajouté à la nécessité qu'un sommet soit présent dans P_m^0 ou P_m^1 et dans P_m^{n-2} ou P_m^{n-1} implique que $\gamma_\pi(C) \geq \lceil n/4 \rceil$.

Soit P un dominant de puissance de la composante paire C de $P_m \times P_n$. Soit S l'ensemble que P surveille entre l'étape de domination et l'étape de propagation, $S = N_{P_m \times P_n}(P)$. Étudions le jeu du virus démarrant sur S (dans $P_m \,\square\, P_n$). Le voisinage fermé de chaque sommet de P dans $P_m \times P_n$ contient au plus 5 sommets, qui contaminent les sommets d'un carré 3×3 dans la grille $P_m \,\square\, P_n$ (possiblement tronqué par le bord du graphe en un carré 3×2 ou 2×2). En notant S' l'ensemble obtenu après ces premières contaminations, on constate que chaque sommet de P contribue d'au plus 12 au périmètre $\Pi(S')$. D'après le lemme 4.2.6, l'ensemble S' est un ensemble virus-gagnant de la grille. Comme le périmètre de l'ensemble des sommets contaminés ne s'accroît pas, $12\,|P| \geq 2(m+n)$. Par conséquent, $|P| \geq \lceil (n+m)/6 \rceil$.

Pour établir la borne supérieure, on construit un dominant de puissance P de C avec ce cardinal comme suit. Supposons d'abord que $m \leq n \leq 2m$, on définit alors

$$\begin{aligned} S_1 &= \{(1+2i, 1+4i) \mid 0 \leq i \leq \frac{2n-m-3}{6}\} \\ S_2 &= \{(\frac{2n-m}{3}+4j, \frac{4n-2m-3}{3}+2j) \mid 1 \leq j \leq \frac{2m-n-3}{6}\} \end{aligned}$$

Supposons que $n+m \equiv 0 \pmod 6$ (le cas parfait). Alors on définit l'ensemble $P = S_1 \cup S_2$ (voir les ronds noirs de la figure 4.7). Autrement, on construit P à partir de l'ensemble d'un cas parfait maximum contenu dans $P_m \times P_n$ (n' et m' tels que $n' \leq n$, $m' \leq m$, et $n+m-5 \leq n'+m' \equiv 0 \pmod 6$) en lui ajoutant le sommet $(m-2, n-2)$. On vérifie facilement que dans tous les cas P est un dominant de puissance. De plus, $((2n-m-3)/6+1) + (2m-n-3)/6 = (m+n)/6$, donc $|P| = \lceil (m+n)/6 \rceil$.

Supposons maintenant que $n > 2m$. Alors, soient

$$\begin{aligned} S_1 &= \{(1+2i, 1+4i) \mid 0 \leq i \leq (m-3)/2\} \\ S_2 &= \{(1, 1+4j) \mid (m-3)/2 < j \leq (n-3)/4\}. \end{aligned}$$

Maintenant, le cas parfait est quand $n \equiv 3 \pmod 4$, auquel cas on définit $P = S_1 \cup S_2$. Autrement, on procède comme ci-dessus en ajoutant le sommet $(m-2, n-2)$ à un dominant de puissance d'un cas parfait maximum contenu dans $P_m \times P_n$. Comme $(m-3)/2+1+((n-3)/4-(m-3)/2) = (n+1)/4$, dans ce cas, $|P| = \lceil n/4 \rceil$. □

La figure 4.7 illustre la construction du premier cas avec des ronds noirs. De plus, un autre dominant de puissance optimal est présenté avec des carrés noirs pour illustrer le fait qu'un dominant de puissance peut avoir une forme étonnante.

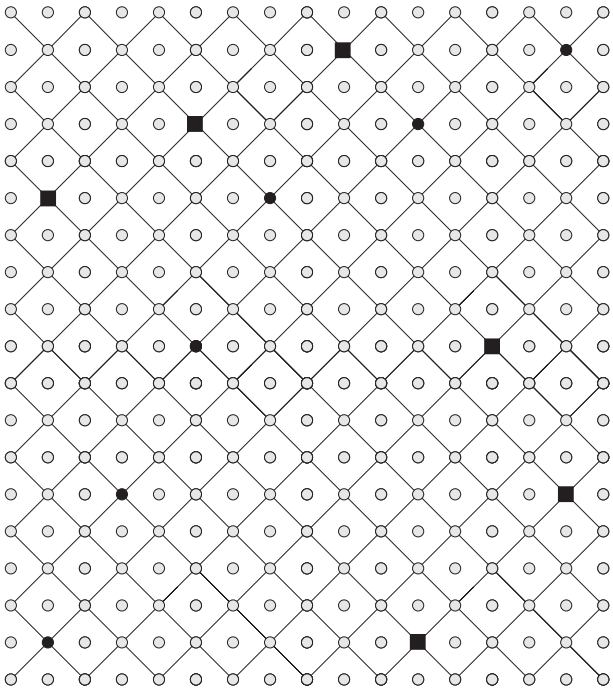


FIG. 4.7 – Deux dominants de puissance optimaux de la composante paire de $P_{17} \times P_{19}$

Théorème 4.2.8 [27] *Soient m et n deux entiers impairs et soit C la composante impaire de $P_m \times P_n$. Alors*

$$\gamma_\pi(C) \leq \max\left\{ \left\lceil \frac{n-2}{4} \right\rceil, \left\lceil \frac{m+n-2}{6} \right\rceil \right\}.$$

Preuve : Nous donnons la construction d'un dominant de puissance du cardinal voulu. Supposons que $m \leq n \leq 2m+2$ et $m+n-2 \equiv 0 \pmod 6$

(le cas parfait), alors la construction se fait comme suit. Soient

$$\begin{aligned} S_1 &= \{(3+2i, 4i) \mid 1 \leq i \leq \frac{2n-m-7}{6}\} \\ S_2 &= \{\frac{2n-m-1}{3} + 4j, \frac{4n-2m-11}{3} + 2j) \mid 1 \leq j \leq \frac{2m-n-7}{6}\} \end{aligned}$$

Alors $P = S_1 \cup S_2 \cup \{(2,1), (m-2, n-3)\}$ est un dominant de puissance de C. Comme $(2n-m-7)/6 + (2m-n-7)/6 + 2 = (m+n-2)/6$, cette ensemble a le cardinal annoncé.

Dans les cas non parfaits, on construit S_1 et S_2 pour un cas parfait minimal contenant $P_m \times P_n$, et on ajoute à ces ensembles les sommets $(2,1)$ et $(m-2, n-3)$ (ainsi, seul ces sommets diffèrent). Cet ensemble a clairement pour cardinal $\lceil (m+n-2)/6 \rceil$.

Si $n > 2m+2$ et $n \equiv 1 \pmod 4$ alors soit $P = S_1 \cup S_2$ avec

$$\begin{aligned} S_1 &= \{(1+2i, 2+4i) \mid 0 \leq i \leq (m-3)/2\} \\ S_2 &= \{(1, 2+4j) \mid (m-3)/2 \leq j \leq (n-5)/4\}. \end{aligned}$$

Dans le cas non parfait ($n \equiv 3 \pmod 4$), on construit S_1 et S_2 pour $P_m \times P_{n+2}$ et $P_1 \cup P_2$ forme un dominant de puissance pour $P_m \times P_n$. Comme $(m-3)/2 + 1 + ((n-5)/4 - (m-3)/2) = (n-1)/4$, dans ce cas, $|P| = \lceil (n-2)/4 \rceil$. □

Nous pensons que la borne du théorème 4.2.8 est optimale, mais le prouver semble plus compliqué que ça ne l'était pour la composante paire.

4.2.2 Le produit fort

Dans cette partie, nous montrons le théorème suivant.

Théorème 4.2.9 [27] *Soit $n \geq m \geq 1$. Alors*

$$\gamma_\pi(P_n \boxtimes P_m) = \max\left\{\left\lceil \frac{n}{3} \right\rceil, \left\lceil \frac{n+m-2}{4} \right\rceil\right\}$$

à moins que $3m - n - 6 \equiv 4 \pmod 8$ auquel cas

$$\max\left\{\left\lceil \frac{n}{3} \right\rceil, \left\lceil \frac{n+m-2}{4} \right\rceil\right\} \leq \gamma_\pi(P_m \boxtimes P_n) \leq \max\left\{\left\lceil \frac{n}{3} \right\rceil, \left\lceil \frac{n+m-2}{4} \right\rceil + 1\right\}.$$

Dans le premier paragraphe, nous montrons les bornes inférieures, puis dans les deux suivants, nous construisons les dominants de puissance correspondants. Il est facilement vérifiable que le résultat est vrai pour $n < 4$ ou $m < 4$. Donc, dans la suite de la partie, nous supposons que $n \geq m \geq 4$.

Preuve de la borne inférieure.

Lemme 4.2.10 [27] $\gamma_\pi(P_m \boxtimes P_n) \geq \left\lceil \frac{n}{3} \right\rceil$.

Preuve : Soit S un dominant de puissance de $P_m \boxtimes P_n$. Supposons qu'il existe une P_m-fibre qui ne contient aucun sommet de $N[S]$. Alors, les sommets de cette P_m-fibre sont nécessairement surveillés par propagation. Soit v le premier sommet de cette P_m-fibre qui soit surveillé. Soit w un voisin surveillé de v qui permet la propagation vers v. w a au moins un autre voisin différent de v dans la même P_m-fibre que v. Ce voisin n'est pas encore surveillé, donc w a au moins deux voisins non surveillés, la propagation ne peut pas avoir lieu. Donc S doit dominer au moins un sommet de chaque P_m-fibre, ce qui implique que $\gamma_\pi(P_m \boxtimes P_n) \geq \lceil n/3 \rceil$. □

Lemme 4.2.11 [27] $\gamma_\pi(P_m \boxtimes P_n) \geq \dfrac{n+m-2}{4}$.

Preuve : Soit S un dominant de puissance minimum de $P_m \boxtimes P_n$. On peut supposer que S ne contient pas de sommet sur la frontière de $P_m \boxtimes P_n$ (c'est à dire les sommets de degré 3 ou 5). En effet, le voisinage fermé de tout sommet de la frontière est inclus dans le voisinage fermé d'un sommet qui n'est pas sur la frontière.

Soit M un ensemble de sommets surveillés de $P_m \boxtimes P_n$ pendant la période de propagation. Soit $B(M)$ l'ensemble des sommets de M qui ont strictement moins de 8 voisins dans M. Nous allons montrer que pendant la propagation, $|B(M)|$ ne peut pas s'accroître.

Supposons que pendant une étape de propagation, un nouveau sommet w est surveillé. Nécessairement, w est le seul voisin pas dans M d'un sommet v dans M. Donc w peut maintenant être ajouté à $B(M)$. On distingue deux cas.

Premier cas : v est de degré 8.
Donc v a maintenant 8 voisins dans M, donc v est retiré de $B(M)$. D'autres sommets peuvent être retirés de $B(M)$ aussi, si w était aussi leur huitième voisin à entrer dans M, mais aucun autre ne peut être ajouté. Donc $|B(M)|$ n'a pas augmenté.

Deuxième cas : le degré de v est inférieur à 8.
Dans ce cas, nous vérifions que w aurait pu être surveillé par propagation depuis un sommet qui n'est pas sur la frontière. Les différents cas à étudier sont présentés sur la figure 4.8.
Dans le cas (a), on peut considérer que la préparation se fait depuis le sommet dans le carré, qui à 8 voisins. Les cas (b), (e), et (f) ne peuvent exister, car les sommets dans des cercles ont nécessairement été surveillés par propagation, et ils n'ont aucun voisins dont tout le voisinage est surveillé. Dans les cas (c) et (d), les deux sommets dans des cercles doivent avoir été

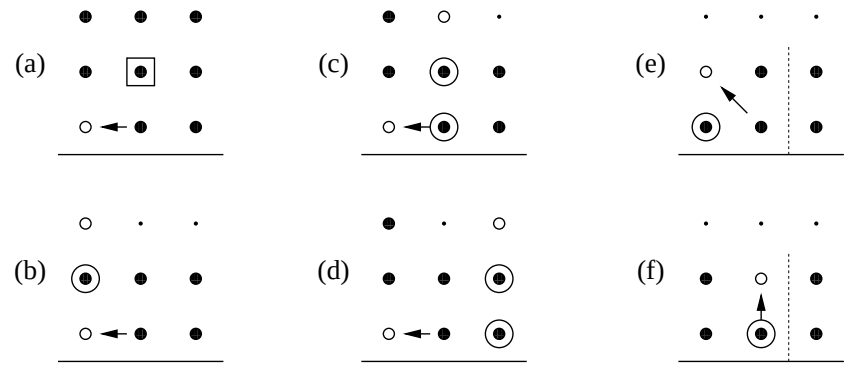


FIG. 4.8 – Propagation depuis la frontière

surveillés par propagation (rappelons que les sommets de S ne sont pas sur les bords) mais aucun ne peut avoir été surveillé avant que l'autre ne l'ait été. Le cas du coin (sommet à 3 voisin) est induit par les cas e et f. Donc w aurait pu être surveillé par un autre sommet de degré 8, ce qui nous ramène au premier cas.

Par conséquent, $|B(M)|$ n'augmente pas au cours de l'étape de propagation. Après l'étape de domination, $|B(M)|$ ne dépasse pas $8\,|S|$. De plus, à la fin de l'algorithme, quand tous les sommets sont surveillés, $|B(M)|$ est égal à $2n + 2m - 4$. Donc on a $|S| \geq (n + m - 2)/4$. □

Une construction pour $n \geq 3m - 6$

Dans ce paragraphe, nous construisons des dominants de puissance pour le cas ou l'un des chemins est nettement plus long l'autre, c'est à dire quand $n \geq 3m - 6$. Alors,

$$\left\lceil \frac{n}{3} \right\rceil \geq \left\lceil \frac{3n}{12} + \frac{3m-6}{12} \right\rceil = \left\lceil \frac{n+m-2}{4} \right\rceil,$$

et le nombre de domination de puissance dépend donc seulement de la longueur du chemin le plus long. Il nous faut construire un dominant de puissance S de cardinal $\lceil n/3 \rceil$. Nous procédons comme suit. Soit $S = S_1 \cup S_2$, avec

$$S_1 = \{(1 + i, 1 + 3i) \mid 0 \leq i \leq m - 3\}$$

et

$$S_2 = \begin{cases} \{(1, 3m - 9 + 3j) \mid 1 \leq j \leq \lceil (n - 3m + 6)/3 \rceil\}; & n \equiv 1 \pmod 3, \\ \{(1, 3m - 8 + 3j) \mid 1 \leq j \leq \lceil (n - 3m + 6)/3 \rceil\}; & \text{autrement.} \end{cases}$$

La construction est illustrée dans la figure 4.9.

Il est facile de vérifier que S est un dominant de puissance dans ces produits forts. De plus, $|S| = |S_1| + |S_2| = m - 2 + \lceil (n - 3m + 6)/3 \rceil = \lceil n/3 \rceil$.

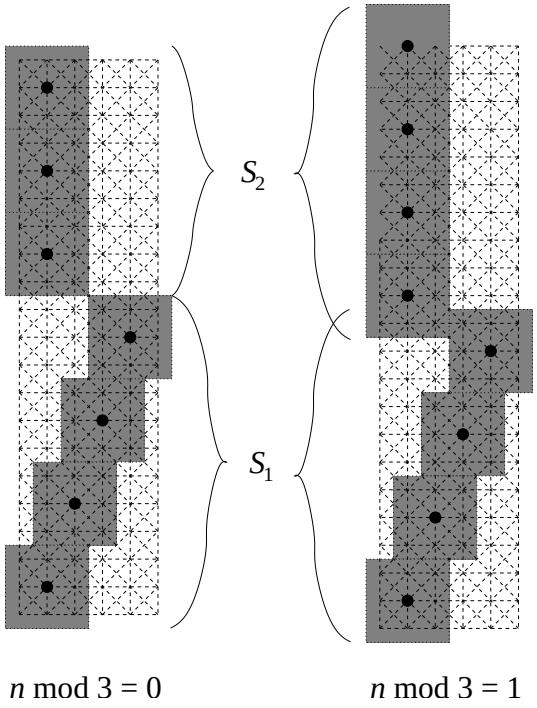


FIG. 4.9 – Dominants de puissance optimaux du produit fort quand l'un des facteurs est nettement plus long.

Une construction pour $n \leq 3m - 6$

Dans ce paragraphe, m et n sont de longueurs comparables. Comme $\lceil n/3 \rceil \leq \lceil (n+m-2)/4 \rceil$, il nous faut construire des dominants de puissance S de cardinal $\lceil (n+m-2)/4 \rceil$. Nous commençons par le cas où 8 divise $3m-n-6$, et nous le modifierons pour former un dominant de puissance dans les autres cas.

Cas 1. $3m - n - 6 \equiv 0 \pmod 8$.
Soit $S = S_1 \cup S_2$, avec

$$\begin{aligned} S_1 &= \{(1+3i, 1+i) \mid 0 \leq i \leq (3m-n-6)/8\} \\ S_2 &= \{(1+3(3m-n-6)/8+j, 1+(3m-n-6)/8+3j) \mid \\ &\quad 1 \leq j \leq (n+m-6)/4 - (3m-n-6)/8\}. \end{aligned}$$

Cette construction est illustrée dans la figure 4.10.

Pour que la construction ci-dessus soit cohérente, il nous faut remarquer que

- $\frac{3m-n-6}{8}$ et $\frac{n+m-6}{4} = m - 3 - \frac{3m-n-6}{4}$ sont des entiers.
- $\frac{n+m-6}{4} - \frac{3m-n-6}{8} = \frac{3n-m-6}{8}$ est positif car $n \geq m$ et $n \geq 4$.

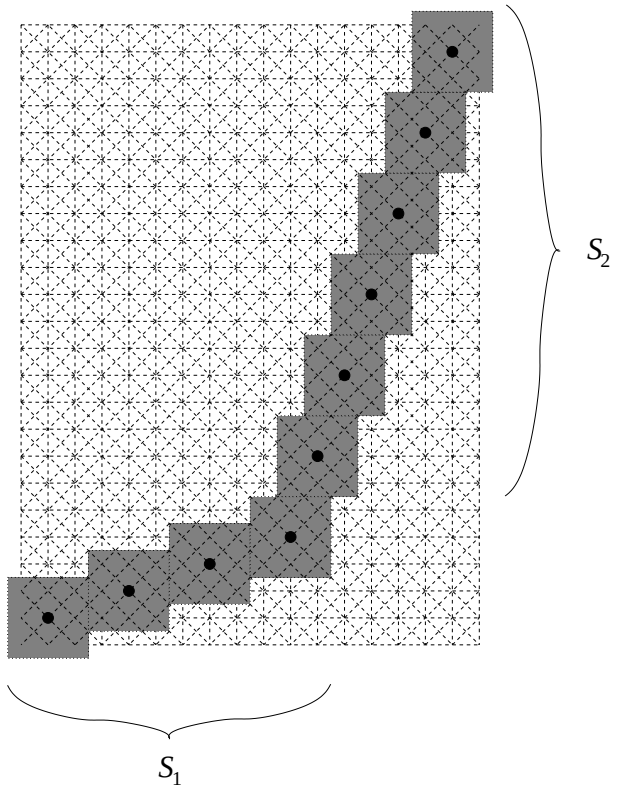


FIG. 4.10 – Dominants de puissance du produit fort de facteurs comparables.

- Le dernier sommet, dont les coordonnées sont les plus grandes, a pour coordonnées $(m-2, n-2)$, donc tous les sommets sont dans le graphe.
- L'ensemble S ne contient aucun sommet sur la frontière du graphe. (Cette remarque sera très utile dans la suite.)

L'ensemble S contient $(n+m-2)/4$ sommets et est donc optimal.

Cas 2. $3m - n - 6 \equiv 1 \pmod 8$.
Dans ce cas $3m - (n+1) - 6 \equiv 0 \pmod 8$. Nous construisons donc le dominant de puissance S de $P_m \boxtimes P_{n+1}$ avec le cas 1. En enlevant la fibre P_m^0 du graphe $P_m \boxtimes P_{n+1}$, on obtient le graphe $G = P_m \boxtimes P_n$. Comme S ne contient pas de sommet sur la frontière, l'ensemble S restreint à G ne change pas. Par conséquent, $|S| = (n+1+m-2)/4 = \lceil (n+m-2)/4 \rceil$.

Cas 3. $3m - n - 6 \equiv 2 \pmod 8$.
Alors $3m-(n+2)-6 \equiv 0 \pmod 8$. Nous construisons donc le dominant de puissance S de $P_m \boxtimes P_{n+2}$ comme dans le cas 1 et on le restreint au graphe $P_m \boxtimes P_{n+2}$ en enlevant les fibres P_m^0 et P_m^{n+1}. Donc $|S| = (n+2+m-2)/4 = \lceil (n+m-2)/4 \rceil$.

Cas 4. $3m - n - 6 \equiv 3 \pmod 8$.

Alors $3(m+2)-(n+1)-6 \equiv 0 \pmod 8$. Nous construisons donc le dominant de puissance S de $P_{m+2} \boxtimes P_{n+1}$ et enlevons les fibres ${}^0P_n$, ${}^{m+1}P_n$, et P_m^0. Alors $|S| = (n+1+m+2-2)/4 = \lceil (n+m-2)/4 \rceil$.

Cas 5. $3m - n - 6 \equiv 4 \pmod 8$.
Comme $3(m+2)-(n+2)-6 \equiv 0 \pmod 8$, procède comme précédemment, en enlevant les fibres ${}^0P_n$, ${}^{m+1}P_n$, P_m^0, et P_m^{n+1}. Donc $|S| = (n+2+m+2-2)/4 = \lceil (n+m-2)/4 \rceil + 1$. On remarque que dans ce cas particulier, il y a une différence de 1 avec la borne inférieure.

Cas 6. $3m - n - 6 \equiv 5 \pmod 8$.
Alors $3(m+1) - n - 6 \equiv 0 \pmod 8$ donc on construit le dominant de puissance S de $P_{m+1} \boxtimes P_n$ et enlevons la fibre ${}^0P_n$. Donc $|S| = (n+m+1-2)/4 = \lceil (n+m-2)/4 \rceil$.

Cas 7. $3m - n - 6 \equiv 6 \pmod 8$.
Alors $3(m+1) - (n+1) - 6 \equiv 0 \pmod 8$ donc on part du dominant de puissance S de $P_{m+1} \boxtimes P_{n+1}$, et enlevons au graphe les fibres ${}^0P_n$ et P_m^0. Donc $|S| = (n+1+m+1-2)/4 = \lceil (n+m-2)/4 \rceil$.

Cas 8. $3m - n - 6 \equiv 7 \pmod 8$.
Alors $3(m+1)-(n+2)-6 \equiv 0 \pmod 8$. On prends le dominant de puissance S dans $P_{m+1} \boxtimes P_{n+2}$ et on enlève au graphe les fibres ${}^0P_n$, P_m^0, et P_m^{n+1}. On a $|S| = (n+2+m+1-2)/4 = \lceil (n+m-2)/4 \rceil$.

4.2.3 Le produit lexicographique

Le dernier des produits standard de graphe à étudier est le produit lexicographique. Pour ce produit, le problème de domination de puissance est beaucoup plus simple. Nous allons déterminer le nombre de domination de puissance du produit lexicographique de n'importe quels graphes à l'aide de leurs nombres de domination et de domination totale.

Théorème 4.2.12 [27] *Pour tous graphes non triviaux G et H,*

$$\gamma_\pi(G \circ H) = \begin{cases} \gamma(G); & \text{si } \gamma_\pi(H) = 1\,, \\ \gamma_t(G); & \text{si } \gamma_\pi(H) > 1\,. \end{cases}$$

Preuve : Supposons que $\gamma_\pi(H) = 1$. Soit $\{v\}$ un dominant de puissance de H et D un dominant de G. On montre que $\{v\} \times D$ est un dominant de puissance de $G \circ H$. En effet, pour tout sommet u de G, si $u \notin D$, soit $u' \in N(u) \cap D$ (u' existe car D domine G). Tout sommet de ${}^uH$ est dans le voisinage de (u', v), donc il est surveillé dès l'étape de domination. Si $u \in D$, tout voisin d'un sommet de ${}^uH$ qui n'est pas dans ${}^uH$ est surveillé par (u, v) et $N[u, v]$ est surveillé pendant l'étape de domination. Donc comme $\{v\}$ est un dominant de puissance de H, la fibre est surveillée. Par conséquent, $\gamma_\pi(G \circ H) \leq \gamma(G)$.

Supposons qu'il existe un dominant de puissance S de $G \circ H$ qui contient moins de $\gamma(G)$ sommets. Alors la projection de S sur G n'est pas un dominant, donc il existe une H-fibre ${}^uH$ qui ne contient aucun sommet de $S \cup N(S)$. Les sommets de ${}^uH$ seront surveillés par propagation. Le premier sommet de ${}^uH$ qui sera surveillé doit être le seul voisin non surveillé d'un sommet qui n'est pas dans ${}^uH$. Mais ce sommet est aussi voisin de tous les autres sommets de ${}^uH$, qui ne sont pas encore surveillés. Comme H n'est pas trivial, il ne peut y avoir aucune propagation sur ${}^uH$. Donc $\gamma_\pi(G \circ H) \geq \gamma(G)$.

Supposons maintenant que $\gamma_\pi(H) > 1$. Soit D un dominant total de G. Alors pour un quelconque sommet v de H, $D \times \{v\}$ est un dominant de $G \circ H$ donc un dominant de puissance de cardinal $|D| = \gamma_t(G)$. Donc $\gamma_\pi(G \circ H) \leq \gamma_t(G)$.

Soit P un dominant de puissance minimum de $G \circ H$. Supposons qu'il existe une H-fibre${}^uH$ telle que pour tout voisin v de u dans G, ${}^vH \cap P$ est vide. Donc, les sommets surveillés par P dans ${}^uH$ sont exactement les sommets surveillés par $P \cap {}^uH$. Comme il n'y a aucun dominant de puissance de H de cardinal 1, $P \cap {}^uH$ contient au moins deux sommets. Soit P' l'ensemble obtenu à partir de P en supprimant tous les sommets de $P \cap^u H$ sauf un et en ajoutant un sommet quelconque dans ${}^vH$, v étant un voisin de u dans G. Alors P' est un dominant de puissance de $G \circ H$ avec $|P'| \leq |P|$. En répétant ce processus, on obtient un dominant de puissance P^* minimum de $G \circ H$ tel que tout sommet $u \in V(G)$ a un voisin v dans G dont la H-fibre ${}^vH$ contient un sommet de P^*. Donc l'ensemble $\{v \in V(G) \mid {}^vH \cap P^* \neq \emptyset\}$ est un dominant total de G et on en conclut que $\gamma_\pi(G \circ H) = |P^*| \geq \gamma_t(G)$. □

4.2.4 Bilan sur la domination de puissance

Un aspect particulièrement original de cette partie est l'utilisation du jeu du virus, notamment dans le lemme 4.2.6, pour prouver le théorème 4.2.7 pour le produit direct. Le fait de considérer un jeu sur le produit cartésien de graphes pour prouver un résultat sur le produit direct est déjà très original ; mais l'utilisation du jeu elle-même montre combien les mathématiques peuvent demander d'imagination pour faire des preuves élégantes. Nous avions tenté dans un premier temps de prouver le résultat sans cet outil, mais la preuve était fastidieuse, imprécise, et loin d'être satisfaisante. C'est la connaissance du jeu du virus, et la nécessité d'utiliser une feinte similaire dans la preuve du théorème 4.2.9 qui nous a mis sur la voie de cette méthode. Cette preuve est probablement la plus astucieuse de cette thèse.

Quant au problème de la domination de puissance, il semble que la suite logique serait de regarder ce que l'on pourrait faire sur le produit de cycle. Des preuves similaires pourront sans doute être utilisées, bien que le périmètre d'un tore ne soit pas défini. Néanmoins, s'il est possible d'uti-

liser des méthodes similaires avec une astuce pour s'autoriser un périmètre, il semble que les bornes à atteindre soient plus simples que les bornes du produit de chemin. En effet, il n'y aura peut-être pas de cas particuliers pour certaines congruences de la longueur des chemins, comme on a pu en voir dans les deux produits étudiés.

Enfin pour que le résultat sur le produit lexicographique soit complet, il serait utile de chercher à caractériser les graphes pour lesquels le nombre de domination de puissance est 1.

4.3 Domination totale supérieure sur le produit cartésien

Dans cette partie, nous allons étudier le paramètre de domination totale supérieure dans le produit cartésien de graphes. Cette recherche a été effectuée en collaboration avec Michael A. Henning et Douglas Rall et sera publié dans [25].

Nowakowski et Rall [55] ont conjecturé en 1996 que pour tous graphes G et H, $\Gamma(G)\Gamma(H) \leq \Gamma(G \,\square\, H)$. Une preuve élégante de cette conjecture a récemment été proposée par Brešar [9]. Une autre question ouverte proposée par Henning et Rall dans [49] concerne le nombre de domination totale du produit cartésien de graphes. Ils suggèrent que $\gamma_t(G)\gamma_t(H) \leq 2\gamma_t(G \,\square\, H)$, et prouvent le résultat pour certaines classes de graphes, y compris la classe des arbres non triviaux. Dans le cas général, la question est toujours ouverte.

Nos résultats principaux dans cette partie sont les deux théorèmes suivants :

Théorème 4.3.1 [25] *Soient G et H deux graphes connexes d'ordre au moins 3 avec $\Gamma_t(G) \geq \Gamma_t(H)$. Alors,*

$$\Gamma_t(G)(\Gamma_t(H) + 1) \leq 2\Gamma_t(G \,\square\, H),$$

et cette borne est atteinte.

Théorème 4.3.2 [25] *Tous graphes G et H sans sommets isolés vérifient,*

$$\Gamma_t(G)\Gamma_t(H) \leq 2\Gamma_t(G \,\square\, H)$$

avec égalité si et seulement si G et H sont tous deux une union disjointe de K_2.

4.3.1 Résultats préliminaires

Avant tout, il nous faut rappeler la propriété suivante établie par Cockayne, Dawes et Hedetniemi dans [15] :

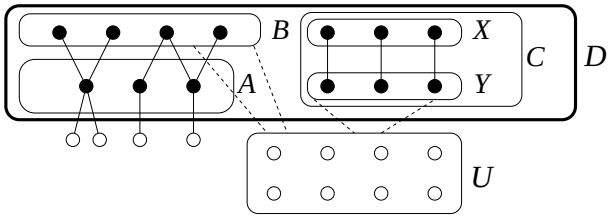


FIG. 4.11 – Les ensembles du lemme 4.3.5.

Observation 4.3.3 [15] *Soit S un dominant total d'un graphe G sans sommet isolé. S est un dominant total minimal si et seulement si tout sommet $v \in S$ vérifie* $\mathrm{epn}(v,S) \neq \emptyset$ *ou* $\mathrm{pn}(v,S) = \mathrm{ipn}(v,S) \neq \emptyset$.

Nous allons commencer par montrer le résultat suivant, très facile :

Lemme 4.3.4 [25] *Si $H = K_2$ et G est n'importe quel graphe sans sommet isolé, alors*

$$\Gamma_t(G)\Gamma_t(H) \leq 2\Gamma_t(G \,\square\, H),$$

avec égalité si et seulement si G est une union disjointe de K_2.

Preuve : Notons $V(H) = \{u, v\}$. Alors, $V(G) \times \{v\}$ est un dominant total minimal de $G \,\square\, H$, et donc $\Gamma_t(G \,\square\, H) \geq |V(G)| \geq \Gamma_t(G) = \frac{1}{2}\Gamma_t(G)\Gamma_t(H)$. De plus, si $\Gamma_t(G \,\square\, H) = \frac{1}{2}\Gamma_t(G)\Gamma_t(H)$, alors l'égalité doit être vérifiée tout au long de cette inégalité. en particulier, $\Gamma_t(G) = |V(G)|$, impliquant que G est une union disjointe de K_2. □

Le lemme clé de cette partie est le suivant.

Lemme 4.3.5 [25] *Tout $\Gamma_t(G)$-dominant contient un dominant minimal S tel que $|S| \geq \frac{1}{2}\Gamma_t(G)$ et* $\mathrm{epn}(v,S) \geq 1$ *pour tout $v \in S$.*

Preuve : Soit D un $\Gamma_t(G)$-dominant. Soit

$$\begin{array}{rcll} A & = & \{v \in D \mid |\mathrm{epn}(v,D)| \geq 1\}, & \\ B & = & \{v \in D \setminus A \mid d_A(v) \geq 1\}, & \text{et} \\ C & = & D \setminus (A \cup B). & \end{array}$$

On a $D = A \cup B \cup C$ (voir figure 4.11). Soit $v \in B \cup C$. Alors $\mathrm{epn}(v,D) = \emptyset$, et donc d'après l'observation 4.3.3, $|\mathrm{ipn}(v,D)| \geq 1$. Soit $v' \in \mathrm{ipn}(v,D)$, on a $v' \in D$ et $N(v') \cap D = \{v\}$. Donc $d_D(v') = 1$. Comme v' n'est adjacent qu'à v et $v \notin A$, on a $v' \notin B$.

Supposons que $v \in C$. Alors, $v' \notin A$, et donc $v' \in C$. Par conséquent, $\mathrm{epn}(v',D) = \emptyset$, et d'après l'observation 4.3.3, $|\mathrm{ipn}(v',D)| \geq 1$. Cependant, le sommet v est le seul voisin de v' dans $G[D]$, ce qui implique que $\mathrm{ipn}(v',D) = \{v\}$. On a donc $N(v) \cap D = \{v'\}$, puis $d_D(v) = 1$ et le voisin v' de v est aussi

dans C. Par conséquent, si $C \neq \emptyset$, alors pour tout $v \in C$, $G[C] = \frac{|C|}{2}K_2$ et $d_D(v) = 1$. On appelle partenaires dans C deux sommets adjacents dans $G[C]$. Soit (X, Y) une bipartition des sommets de $G[C]$; chaque sommet de X est adjacent à son partenaire dans Y et vice versa. Pour chaque sommet $x \in X$, on note y_x son partenaire dans C.

Supposons maintenant que $v \in B$. Comme $G[C] = \frac{|C|}{2}K_2$ et que chaque sommet de C est de degré 1 dans $G[D]$, le sommet v n'est adjacent à aucun sommet de C. En particulier, $v' \in A \cup B$. Comme montré précédemment, $v' \notin B$. Par conséquent, $v' \in A$. Donc, pour tout $v \in B$, $\mathrm{pn}(v, S) \subseteq A$. Ceci implique à son tour que $|A| \geq \sum_{v \in B} |\,\mathrm{ipn}(v, D)| \geq |B|$.

Soit $U = V(G) \setminus (D \cup N(A) \cup N(X))$ l'ensemble des sommets de $V(G) \setminus D$ qui ne sont dominés ni par A ni par X dans G. Comme D est un dominant total de G, l'ensemble U est dominé par $B \cup Y$. Soit B_Y un sous-ensemble minimum de $B \cup Y$ qui domine U. Alors, pour tout $v \in B_Y$, on a $|\,\mathrm{epn}(v, B_Y) \cap U| \geq 1$.

Considérons maintenant l'ensemble $S = A \cup B_Y \cup X$. Comme $B \subseteq N(A)$ et $Y \subseteq N(X)$, l'ensemble S domine D. Par construction, S domine aussi $V(G) \setminus D$. Par conséquent, S domine $V(G)$, sans que S soit nécessairement un dominant minimal de G. Nous construisons un dominant minimal de G à partir de S comme suit. On considère chaque sommet de X un par un, et pour tout $x \in X$ on supprime x de S si $\mathrm{epn}(x, S) = \emptyset$, chaque fois dans l'ensemble S résultant. (On observera que si le partenaire $y_x \in Y$ de x dans C n'est pas dans S, alors $y_x \in \mathrm{epn}(x, S)$, et donc x n'est pas supprimé de S.) Soit X^* le sous-ensemble de X des sommets restants dans S après complétion de l'opération. On a $S = A \cup B_Y \cup X^*$ et $|\,\mathrm{epn}(x, S)| \geq 1$ pour tout $x \in X^*$. En fait, par construction, $|\,\mathrm{epn}(v, S)| \geq 1$ pour tout $v \in S$. Si $x \in X \setminus X^*$, alors le partenaire de x dans C est dans l'ensemble S, impliquant que S domine C. Puisque $B \subseteq N(A)$, l'ensemble B est aussi dominé par S. Donc S domine D. Par construction, S domine aussi $V(G) \setminus D$. Ainsi, S est un dominant minimal de G.

Il nous faut maintenant montrer que $|S| \geq \frac{1}{2}\Gamma_t(G)$. Pour tout $x \in X$, l'ensemble S contient soit x soit son partenaire dans C, d'où $|S \cap C| \geq |X| = \frac{1}{2}|C|$. Comme montré précédemment, $|A| \geq |B|$. Finalement,

$$|S| \geq |A| + |S \cap C| \geq |A| + \frac{1}{2}|C| \geq \frac{1}{2}(|A| + |B| + |C|) = \frac{1}{2}|D| = \frac{1}{2}\Gamma_t(G), \quad (4.9)$$

comme annoncé. □

Soit Fleur_k le graphe obtenu à partir de k copies de K_3 en choisissant un sommet de chaque copies et en les fusionnant. (voir figure 4.12). Soit c le sommet de degré $2k$ tandis que a_i et b_i $(1 \leq i \leq k)$ désignent les autres sommets, a_i étant adjacent à b_i.

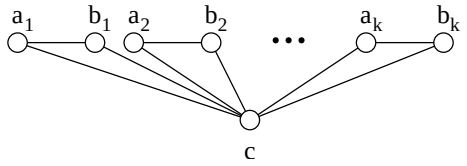


FIG. 4.12 – Le graphe Fleur$_k$

Soit $k \geq 2$, supposons que G et H sont le graphe Fleur$_k$. Pour tous i et j, $1 \leq i, j \leq k$, on définit les ensembles suivants (voir figure 4.13) :

$$\begin{aligned} R_i &= \{(a_i, v), (b_i, v) \mid v \in H\} \\ C_j &= \{(v, a_i), (v, b_j) \mid v \in G\} \\ B_{i,j} &= R_i \cap C_j = \{(a_i, a_j), (a_i, b_j), (b_i, a_j), (b_i, b_j)\} \end{aligned}$$

Soit S un dominant total minimal de $G \,\square\, H$. Nous allons montrer quatre propositions au sujet de S.

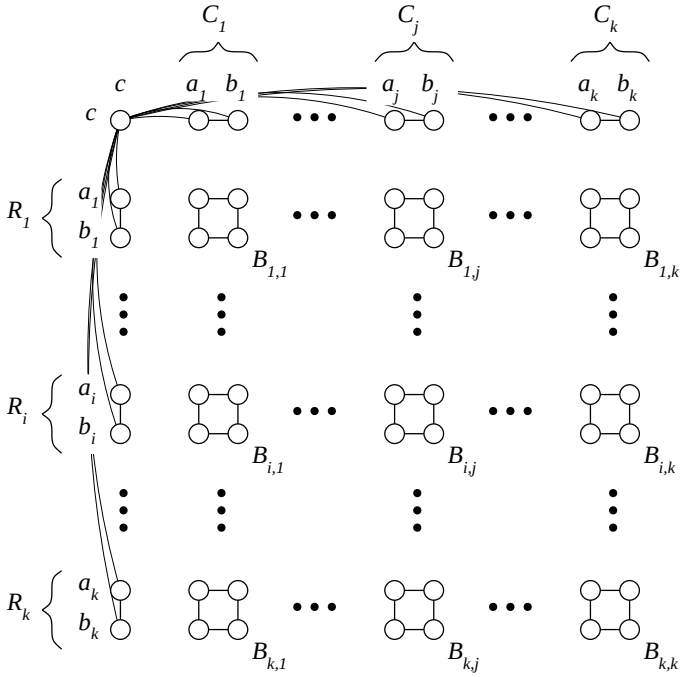


FIG. 4.13 – Le produit Fleur$_k \,\square\,$ Fleur$_k$ et les ensembles R_i, C_j et $B_{i,j}$.

Propriété 4.3.6 [25] *S'il existe i et j, $1 \leq i, j \leq k$, tels que les sommets (a_i, c) et (b_i, c) sont dans S et $|B_{i,j} \cap S| \geq 2$, alors $|S| \leq 4k < k(2k+1)$.*

Preuve : Supposons que les conditions de la proposition sont remplies, c'est à dire que (a_i, c) et (b_i, c) sont dans S, et $|B_{i,j} \cap S| \geq 2$. Les sommets de $B_{i,j} \cap S$ ont nécessairement des voisins privés. Comme tous les sommets de R_i sont dominés par (a_i, c) et (b_i, c). les seuls voisins privés possibles des sommets de $B_{i,j}$ sont (c, a_j) et (c, b_j). Donc $B_{i,j} \cap S$ contient exactement deux sommets dont les voisins privés sont (c, a_j) et (c, b_j). Pour tout $m \neq i$, le sommet (a_m, a_j) (resp. (b_m, a_j)) n'a qu'un voisin, à savoir (a_m, c) (resp (b_m, c)), qui peut être contenu dans S, tous les autres étant aussi des voisins de (c, a_j) ou de (c, b_j). Donc pour tout m, (a_m, c) et (b_m, c) sont dans S. Ces sommets dominent tous les sommets sauf $\{(c, a_n), (c, b_n) \mid 1 \leq n \leq k\}$. Tous les sommets de $S \setminus \{(a_m, c), (b_m, c) \mid 1 \leq m \leq k\}$ doivent avoir un voisin privé dans $\{(c, a_n), (c, b_n) \mid 1 \leq n \leq k\}$, et les sommets de cet ensemble ne peuvent être le voisin privé que d'un sommet de S. Donc $|S \setminus \{(a_m, c), (b_m, c) \mid 1 \leq m \leq k\}| \leq |\{(c, a_n), (c, b_n) \mid 1 \leq n \leq k\}|$, et finalement, $|S| \leq 4k$. Comme $k \geq 2$, on a $|S| \leq 4k < k(2k + 1)$ □

Propriété 4.3.7 [25] *Pour toutes paires $(i, j) \neq (m, n)$, $1 \leq i, j, m, n \leq k$, soit $|B_{i,j} \cap S| < 3$, soit $|B_{m,n} \cap S| < 3$.*

Preuve : Supposons les conditions de la proposition remplies à savoir $1 \leq i, j, m, n \leq k$, $|B_{i,j} \cap S| \geq 3$ et $|B_{m,n} \cap S| \geq 3$. On remarque d'abord que $|B_{i,j} \cap S| < 4$, ou ses sommets n'auraient aucun voisin privé. Sans perte de généralité, on peut supposer que $B_{i,j} \cap S = \{(a_i, a_j), (a_i, b_j), (b_i, a_j)\}$. Les voisins privés de (a_i, b_j) et de (b_i, a_j) ne peuvent être que (c, b_j) et (a_i, c), respectivement. Donc pour tout $i' \neq i$ (resp. $j' \neq j$), ni (a'_i, b_j) ni (b'_i, b_j) (resp. ni (b_i, a'_j) ni (b_i, b'_j)) ne peut être dans S. Donc $n \neq j$ (resp. $m \neq i$).

On peut aussi supposer que $B_{m,n} \cap S = \{(a_m, a_n), (a_m, b_n), (b_m, a_n)\}$. Les voisins privés de (a_m, b_n) et de (b_m, a_n) sont nécessairement (c, b_n) et (b_m, c), respectivement. Considérons le sommet (a_i, a_n). Il a quatre voisins : (c, a_n) et (a_i, b_n) qui sont aussi voisins de (c, b_n) donc pas dans S, ainsi que (a_i, c) et (b_i, a_n) qui sont voisins de (b_i, c), donc pas dans S. Ce sommet ne peut donc plus être dominé, or S est sensé être un dominant total, cette situation ne peut donc pas apparaître. □

Propriété 4.3.8 [25] *Si pour tous i et j, $1 \leq i, j \leq k$, on a $|B_{i,j} \cap S| \geq 3$, alors $|S| \leq 2k^2 + 2 \leq k(2k + 1)$.*

Preuve : Remarquons d'abord que $2k^2 + 2 \leq k(2k+1)$ pour $k \geq 2$. Comme dans la preuve de la proposition 4.3.7, $|B_{i,j} \cap S| < 4$ et on peut supposer que $B_{i,j} \cap S = \{(a_i, a_j), (a_i, b_j), (b_i, a_j)\}$.

Supposons que pour un certain $m \neq i$, $|R_m \cap S| \geq 2k + 1$. D'après la propriété 4.3.7, pour tout n, $|B_{m,n} \cap S| \leq 2$. Donc, (a_m, c) ou (b_m, c) est dans S. Si les deux le sont, on se reporte à la proposition 4.3.6. Sans perte de généralité, on suppose que seul $(a_m, c) \in S$. En comptant les sommets

de R_m, on sait que pour tout n, $|B_{m,n} \cap S| = 2$. Dans $B_{m,j}$, ces 2 sommets sont nécessairement (a_m, a_j) et (b_m, a_j), car (c, b_j) est le seul voisin privé de (a_i, b_j). (a_m, c) doit avoir un voisin privé, différent de (b_m, c) qui est un voisin de (b_m, a_j). Ce voisin privé peut être (c, c), auquel cas aucun autre voisin de (c, c) n'est dans S. Alors, d'après la proposition 4.3.7, on a $S \leq 2k^2 + 2$.

Si le voisin privé de (a_m, c) n'est pas (c, c), c'est un (a_m, a_n) ou (a_m, b_n). Sans perte de généralité, on suppose que c'est un (a_m, a_n). Alors (a_m, b_n) et (b_m, a_n) ne sont pas dans S, donc (a_m, a_n) et (b_m, b_n) sont dans S, étant les deux seuls sommets restants dans $B_{m,n}$. Leurs voisins privé ne peuvent qu'être (c, a_n) et (c, b_n), respectivement. Donc aucun autre sommet de C_n n'est dans S. Par conséquent, (a_i, a_n) ne peut être dominé que par (a_i, c), mais ce sommet n'est pas dans S car il est adjacent du seul voisin privé de (b_i, a_j), à savoir (b_i, c).

Supposons que pour tout $m \neq i$, $|R_m \cap S| < 2k + 1$. On peut aussi supposer que pour tout $n \neq j$, $|C_m \cap S| < 2k + 1$, ou nous pourrions faire le même type de preuve. Donc, comme aucun autre $B_{i',j'}$ ne contient plus de deux sommets de S (d'après la proposition 4.3.7), nous avons $|S| \leq 2k(k-1) + k + 2 \leq 2k^2 + 2$. □

Propriété 4.3.9 [25] *Supposons que pour tout* $1 \leq i, j \leq k$, $|B_{i,j} \cap S| \leq 2$, *et que nous ne sommes pas dans les conditions de la proposition 4.3.6. Alors, pour tous* m *et* n, $1 \leq m, n \leq k$, *si* $|R_m \cap S| \geq 2k+1$ *(resp.* $|C_n \cap S| \geq 2k+1$*), alors ni* (c, a_n), *ni* (c, b_n) *ni* (c, c) *(resp. ni* (a_m, c), *ni* (b_m, c), *ni* (c, c)*) ne sont dans* S. *Alors,* $|S| \leq k(2k + 1)$.

Preuve : Supposons que pour tous i et j, $1 \leq i, j \leq k$, on a $|B_{i,j} \cap S| \leq 2$. Supposons qu'il existe un m, $1 \leq m \leq k$, $|R_m \cap S| \geq 2k + 1$.

Comme $k \geq 2$, si (a_m, c) et (b_m, c) sont tous deux dans S, alors soit $|R_m \cap S| \leq k+2$, soit nous sommes dans les conditions de la proposition 4.3.6. Or pour atteindre $|R_m \cap S| \geq 2k + 1$, l'un de ces deux sommets doit être dans S, ainsi que 2 sommets dans chacun des $B_{m,l}$, $1 \leq l \leq k$.

- Supposons que $(a_m, c) \in S$ et que pour un certain n, $1 \leq n \leq k, (c, a_n) \in S$. Alors seul (b_m, b_n) peut être un voisin privé des sommets de $B_{m,n}$, donc $B_{m,n} \cap S$ contient au plus un sommet, or il nous en faut 2, ce qui aboutit à une contradiction.
- Supposons que (a_m, c) et (c, c) sont dans S. (a_m, c) doit avoir un voisin privé, qui est nécessairement dans $B_{m,n}$, tous ses autres voisins étant dominés par (c, c). Sans perte de généralité, supposons que ce voisin privé est (a_m, a_n). Alors (a_m, b_n) et (b_m, a_n) ne sont pas dans S. Les deux seuls sommets restants dans $B_{m,n}$, à savoir (a_m, a_n) et (b_m, b_n), sont nécessairement dans S. Mais ils n'ont alors aucun voisin privé, car (a_m, b_n) et (b_m, a_n) sont dominés par chacun des deux, et (c, a_n), (c, b_n), (a_m, c), et (b_m, c) sont dominés par (c, c). Cette situation ne peut donc pas avoir lieu.

– Toutes les autres situations sont équivalentes à l'une des deux situations précédentes.

Remarquons d'abord que dans les conditions de la propriété, pour tous m et n tels que $1 \leq m, n \leq k$, on a $|R_m \cap S| \leq 2k+1$ et $|C_n \cap S| \leq 2k+1$. Supposons que pour un certain m, $|R_m \cap S| = 2k+1$. Alors $|S| = \sum_{i=1}^{k} |R_i \cap S| \leq k(2k+1)$. On obtient le même résultat si pour un certain n, $|C_n \cap S| = 2k+1$. Finalement, si pour tous m et n tels que $1 \leq m, n \leq k$, $|R_m \cap S| \leq 2k$ et $|C_n \cap S| \leq 2k$, alors $|S| \leq k(2k)+1 < k(2k+1)$. □

Lemme 4.3.10 [25] *Pour tout $k \geq 2$, si chacun des graphes G et H sont les graphes $Daisy_k$, alors*

$$\Gamma_t(G)(\Gamma_t(H)+1) = 2\Gamma_t(G \,\square\, H).$$

Preuve : G et H sont tous deux d'ordre $2k+1$. De plus, $\Gamma_t(G) = \Gamma_t(H) = 2k$, et donc $\Gamma_t(G)(\Gamma_t(H)+1) = 2k(2k+1)$. Finalement, $\Gamma_t(G \,\square\, H) \leq k(2k+1)$ est un corollaire des propositions 4.3.6, 4.3.8 et 4.3.9. □

4.3.2 Preuves des théorèmes 4.3.1 et 4.3.2

Rappelons le théorème 4.3.1.

Théorème 4.3.1 [25] *Soient G et H deux graphes connexes d'ordre au moins 3 avec $\Gamma_t(G) \geq \Gamma_t(H)$. Alors,*

$$\Gamma_t(G)(\Gamma_t(H)+1) \leq 2\Gamma_t(G \,\square\, H),$$

et cette borne est atteinte.

Preuve : D'après le lemme 4.3.5, il existe un dominant minimal S de G tel que $|S| \geq \frac{1}{2}\Gamma_t(G)$ et $\mathrm{epn}(v, S) \geq 1$ pour tout $v \in S$. Considérons l'ensemble $D = S \times V(H)$. Comme S domine $V(G)$, l'ensemble D est un dominant de $G \,\square\, H$. De plus, pour tout sommet $w \in S$, les sommets de la fibre ${}^{w}H$ sont dominés par n'importe lequel de leurs voisins dans cette même fibre, donc D est un dominant total de $G \,\square\, H$. On montre que D est en fait un dominant total minimal de $G \,\square\, H$. Soit $v = (w, z) \in D$, avec $w \in S$. Soit $v' = (w', z)$ où $w' \in \mathrm{epn}(w, S)$ dans G. Alors, $v' \in \mathrm{epn}(v, D)$. Par conséquent, $|\,\mathrm{epn}(v, D)| \geq 1$ pour tout $v \in D$. Ainsi, d'après l'observation 4.3.3, D est un dominant total minimal de $G \,\square\, H$, et donc $\Gamma_t(G \,\square\, H) \geq |D|$. Comme H est un graphe connexe d'ordre au moins 3, on a $|V(H)| \geq \Gamma_t(H)+1$. Enfin

$$\Gamma_t(G \,\square\, H) \geq |D| = |S| \times |V(H)| \geq \frac{1}{2}\Gamma_t(G)(\Gamma_t(H)+1),$$

ce qui établit la borne supérieure du théorème. Le lemme 4.3.10 montre que cette borne est atteinte. □

Le théorème 4.3.2 est une conséquence immédiate du lemme 4.3.4 et du théorème 4.3.1.

4.3.3 Remarques conclusives

En conséquence immédiate du lemme 4.3.5, on sait que le nombre de domination totale supérieure d'un graphe sans sommet isolé est au plus le double de son nombre de domination supérieure. Nous donnons ici une liste des propriétés vérifiées par les graphes qui vérifient l'égalité.

Théorème 4.3.11 [25] *Pour tout graphe G sans sommet isolé, on a la relation $\Gamma_t(G) \leq 2\Gamma(G)$. De plus, si $\Gamma_t(G) = 2\Gamma(G)$, alors le graphe G vérifie les propriétés suivantes :*

(i) *Tout $\Gamma_t(G)$-dominant induit un sous-graphe consistant en une union disjointe de K_2 ;*

(ii) *$\Gamma(G) = \alpha(G)$, le nombre de stabilité de G ;*

(iii) *Pour tout $\Gamma_t(G)$-dominant S, chaque sommet de $V(G) \setminus S$ est inclus dans un K_3 dont les deux autres sommets sont dans S.*

Preuve : Soit D un $\Gamma_t(G)$-dominant. On sait par le lemme 4.3.5 qu'il existe un dominant minimal S de G tel que $S \subseteq D$ et $|S| \geq \frac{1}{2}\Gamma_t(G)$. Par conséquent, $\Gamma(G) \geq |S| \geq \frac{1}{2}\Gamma_t(G)$. Supposons que $\Gamma(G) = \frac{1}{2}\Gamma_t(G)$. Alors, $\Gamma(G) = |S| = \frac{1}{2}\Gamma_t(G)$ et il y a égalité tout au long de la chaîne d'inégalités (4.9). Par conséquent, S est un $\Gamma(G)$-dominant, $|A| = |B|$ et $|S \cap C| = |C|/2$. Comme $|A| = |B|$, on sait que $|A| = \sum_{v \in B} |\operatorname{pn}(v, S)| = |B|$. Donc $|\operatorname{pn}(v, S)| = 1$ pour tout sommet $v \in B$, et chaque sommet de A est le voisin privé (interne) d'un sommet de B. En particulier, $d_D(v) = 1$ pour tout $v \in A$ et tout sommet de B est adjacent à un unique sommet de A, à savoir son voisin privé. Par conséquent, A est un stable et le sous-graphe $G[A \cup B]$ induit sur $A \cup B$ admet un couplage parfait. (Rappelons que l'on n'a pas prouvé que B est un stable de G.)

Si $A \neq \emptyset$, alors soient $u \in A$ et v son voisin dans $G[S]$. $v \in B$ et $\operatorname{pn}(v, S) = \{u\}$. Soit $w \in \operatorname{epn}(u, S)$. L'ensemble $(A \setminus \{u\}) \cup \{v, w\} \cup (S \cap C)$ est un stable de G. Comme tout stable maximum est un dominant minimum, $\alpha(H) \leq \Gamma(H)$ pour tout graphe H. Alors, $\Gamma(G) \geq \alpha(G) \geq |A| + |S \cap C| + 1 = \Gamma(G) + 1$, ce qui contredit notre hypothèse initiale. Donc $A = B = \emptyset$, et enfin $S = C$. Comme vu dans la preuve du lemme 4.3.5, $G[C] = \frac{|C|}{2}K_2$. Ceci établit (i).

Soit $|C| = 2c$. On a $G[S] = cK_2$. Comme D est un $\Gamma_t(G)$-dominant quelconque, on déduit que tout $\Gamma_t(G)$-dominant induit un sous-graphe isomorphe à cK_2. Ensuite, puisqu'un $\Gamma(G)$-dominant S contient un sommet de chaque copie de K_2 dans $G[D]$, l'ensemble S est un stable, et donc $\Gamma(G) = \alpha(G)$. Ceci établit (ii).

Comme dans la preuve du Lemme 4.3.5, on appelle deux sommets adjacents de $G[C]$ des partenaires dans C, et on note $S = C = X \cup Y$, où X et Y sont les parties du graphe biparti $G[C]$. Les arêtes entre X et Y

induisent un couplage parfait sur G. Soit $x \in V \setminus S$. Si $N(x)$ ne contient pas deux sommets adjacents dans $G[C]$, alors, en renommant les sommets si nécessaire, on peut supposer que $N(x) \cap X = \emptyset$. Mais alors $X \cup \{x\}$ est un stable de taille $\alpha(G) + 1$, ce qui est impossible. Par conséquent, $N(x)$ contient au moins une paire de sommets adjacents dans $G[C]$. □

En contraste avec ce résultat, nous concluons en observant que la différence entre le nombre de domination supérieure et le nombre de domination totale supérieure n'est pas bornée. Soit G un graphe d'ordre n sans sommet isolé. On a $\Gamma(G) \leq n - 1$ avec égalité si et seulement si G est une étoile $K_{1,n-1}$. De plus, $\Gamma_t(G) \geq 2$, d'où

$$\left(\frac{2}{n-1}\right)\Gamma(G) \leq \Gamma_t(G),$$

avec égalité si et seulement si $G = K_{1,n-1}$.

4.4 Perspectives

Dans ce chapitre, nous avons étudié la domination dans les produits de graphes. Cette recherche prolonge de nombreux travaux proposé dans la perspective de la résolution de la conjecture de Vizing. Nous avons tout d'abord fourni des bornes quant au nombre de domination totale du produit direct de graphes, en fonction d'autres paramètres de domination. L'approche consistant à relier des paramètres de domination différents semble pertinente, car elle permet d'améliorer la cohérence des problèmes de domination.

Dans la deuxième partie, nous avons étudié la domination de puissance sur les produits de graphes. Dans le prolongement des travaux de Dorfling et Henning sur le produit cartésien, nous déterminons le nombre de domination de puissance dans une très large majorité des cas pour les produits direct et fort de chemins et pour le produit lexicographique de graphes quelconques. Bien entendu, il serait utile de résoudre les cas manquants, en particulier pour le produit direct. Il faudrait maintenant étudier la domination de puissance sur les produits d'autres classes de graphes, en particuliers les cycles, les arbres, etc.

Dans la troisième partie, nous avons étudié la domination totale supérieure, proposant une borne "à la Vizing" sur le nombre de domination totale supérieure du produit cartésien de graphes. De plus, nous arrivons à lier les paramètres de domination supérieure et de domination totale supérieure. Enfin, nous donnons un certain nombres de propriétés vérifiées par les graphes vérifiant l'égalité $\Gamma_t(G) = 2\Gamma(G)$, mais nous n'avons pas réussi à les caractériser exactement. Il s'agit d'un problème qui semble cependant accessible, et qu'il serait pertinent de résoudre.

Chapitre 5

Propriétés structurelles de la domination

Dans ce chapitre, nous proposons une étude plus structurelle des différents paramètres de la domination. Dans [31], Martin Farber propose des caractérisations des graphes fortement triangulés par sous-graphe induit exclu et en fonction de la matrice d'adjacence. La deuxième caractérisation permet de donner un algorithme polynomial pour calculer le nombre de domination (en version pondérée) d'un graphe fortement triangulé, tandis que ce problème est NP-difficile pour les graphes triangulés. De plus, toutes les classes de graphes pour lesquels un algorithme polynomial a été trouvé sont des sous-classes des graphes fortement triangulés. Avec ce résultat, il laisse peu d'espoir de trouver d'autres classes de graphes pour lesquels le problème de la domination est polynomial.

Une approche plus fréquemment employée depuis ce résultat est la recherche de bornes sur le nombre de domination de tous les graphes de certaines classes. C'est déjà un peu l'esprit de la conjecture de Vizing, mais il est utile aussi d'obtenir des bornes dans des graphes qui ne sont pas forcément des produits. Dans la partie 5.1, nous adoptons cette approche pour l'étude de la paire-domination entamée par Haynes et Slater dans [47]. Dans leur papier, ils ont prouvé que tout graphe connexe d'ordre $n \geq 3$ vérifie $\gamma_{\mathrm{p}}(G) \leq n-1$ et que cette borne est atteinte pour des graphes arbitrairement grand. Nous commençons par montrer que tout graphe connexe d'ordre n sans étoile $K_{1,a+2}$ vérifie $\gamma_{\mathrm{p}}(G) \leq 2(an+1)/(2a+1)$, borne serrée dans une infinité de cas. Puis, nous montrons que tous les graphes connexes sans P_5 vérifient $\gamma_{\mathrm{p}}(G) \leq \frac{n}{2}+1$, sauf le graphe C_5.

En outre, de multiples variations de la domination ont été proposées, comme on a pu le constater dans les définitions. Il devient donc très important de garder une certaine unité dans l'étude de la domination, c'est pourquoi il est utile de donner des inégalités pour relier différentes variantes du problème et ainsi conserver une cohérence entre les études. C'est par exemple

l'approche de Chellali et Haynes dans [12, 13] pour la paire-domination, et c'est aussi ce que nous tentons de faire dans la partie 5.2. Nous nous intéressons aux liens entre les nombres de paire-domination supérieure et de domination totale supérieure. Nous montrons que l'on ne peut pas borner la différence entre le nombre de paire-domination supérieure $\Gamma_{\mathrm{p}}(G)$ et le nombre de domination totale supérieure $\Gamma_t(G)$ d'un graphe en général. Cependant, nous montrons que les graphes sans sommet isolé vérifient l'inégalité $\Gamma_t(G) \geq \frac{1}{2}(\Gamma_{\mathrm{p}}(G)+2)$ et nous caractérisons les arbres pour lesquels il y a égalité. Enfin, pour le cas d'un arbre T, nous montrons que $\Gamma_t(T) \leq \Gamma_{\mathrm{p}}(T)$.

5.1 Paire-domination

5.1.1 Introduction

Dans de nombreux cas, notamment dans les cas parfaits, le sous-graphe induit par un dominant total est une union disjointe de K_2. C'est sans doute cette observation qui a conduit Haynes et Slater [47, 48] à introduire la paire-domination dans les graphes, comme modèle pour associer des coéquipiers à des gardes.

Dans [47], ils on montré que trouver le nombre de paire-domination d'un graphe est un problème NP-complet. Il est donc utile d'établir des bornes sur le nombre de paire-domination d'un graphe en fonction de propriétés structurelles. Haynes et Slater [47] ont obtenu la borne supérieure suivante :

Théorème 5.1.1 (Haynes, Slater [47]) *Tout graphe connexe G d'ordre $n \geq 3$ vérifie $\gamma_{\mathrm{p}}(G) \leq n-1$ avec l'égalité si et seulement si G est le graphe C_3, C_5 ou une étoile subdivisée.*

Dans cette partie, nous essayons d'améliorer la borne fournie pas le Théorème 5.1.1. Naturellement, ceci n'est possible que si l'on exclut les graphes contenant des étoiles subdivisées. C'est ce que firent Odile Favaron et Michael A. Henning en étudiant dans [32] la paire-domination sur les graphes cubiques sans griffe. Ils ont prouvé le théorème suivant :

Théorème 5.1.2 (Favaron, Henning [32]) *Tout graphe G d'ordre n, cubique, connexe et sans griffe, vérifie $\gamma_{\mathrm{p}}(G) \leq \frac{n}{2}$.*

Lors de la venue de Sylvain Gravier à PieterMaritzBurg, nous avons cherché avec Michael Henning à généraliser cette borne aux graphes sans griffes pas nécessairement cubiques. Finalement, nous avons trouvé un résultat valable pour les graphes sans étoiles, selon le nombre de branches de l'étoile exclue [22]. Dans la sous-partie 5.1.2, nous montrons que tout graphe sans $K_{1,a+2}$ $(a \geq 0)$ d'ordre $n \geq 2$ vérifie $\gamma_{\mathrm{p}}(G) \leq 2(an+1)/(2a+1)$, et qu'il existe une infinité de graphes pour lesquels cette borne est serrée. Dans le cas des graphes connexes sans griffe, ce résultat nous donne $\gamma_{\mathrm{p}}(G) \leq$

$2(n+1)/3$. Dans le cas des graphes cubiques sans griffes, ceci est moins bon que le théorème 5.1.2. Néanmoins, cette nouvelle borne est particulièrement intéressante car beaucoup plus générale. Tout graphe fini G admet un entier a tel que le graphe G n'a pas d'étoile $K_{1,a+2}$, ce qui fait que cette borne est valide pour tous les graphes.

Cependant, les étoiles ne sont pas en-soi des cas critiques pour la paire-domination. Le nombre de paire-domination d'une étoile est 2, ce sont seulement les étoiles subdivisées qui ont un grand nombre de paire-domination. C'est pourquoi, avec Sylvain Gravier, nous avons continué cette étude [21]. Dans la sous-partie 5.1.3, nous fournissons une borne pour les graphes sans P_5, qui est l'étoile subdivisée à deux branches $K^*_{1,2}$. Ce résultat, bien que meilleur que le résultat de la sous-partie 5.1.2 dans les graphes où il s'applique, est beaucoup moins général. Cependant, il s'agit d'un premier pas dans l'étude des graphes sans étoile subdivisée induite, qui semble la plus pertinente dans le cas de la paire-domination.

5.1.2 Paire-domination sur les graphes sans étoiles.

Dans cette sous-partie, nous étudions les graphes sans étoiles, et montrons le théorème suivant :

Théorème 5.1.3 **[22]** *Soit $a \geq 0$ un entier, si G est un graphe connexe sans $K_{1,a+2}$ d'ordre $n \geq 2$, alors*

$$\gamma_{\mathrm{p}}(G) \leq \frac{2(an+1)}{2a+1},$$

et cette borne est serrée.

Dans la preuve qui suit nous utiliserons la notion de P_4 fort. Un P_4 *fort* dans un graphe G est un P_4 induit dont les extrémités sont des feuilles dans G.

Preuve du théorème 5.1.3
Nous allons procéder par induction sur l'ordre n du graphe connexe sans $K_{1,a+2}$. Si $n = 2$, alors $G = K_2$, et $\gamma_{\mathrm{p}}(G) = 2 = 2(an+1)/(2a+1)$. Ceci établit le cas de base.

Soit $n \geq 3$, supposons que le résultat est vrai pour tout graphe sans $K_{1,a+2}$ d'ordre au moins 2 et au plus $n-1$. Soit $G = (V, E)$ un graphe connexe sans $K_{1,a+2}$ d'ordre n. Nous allons utiliser le lemme suivant :

Lemme 5.1.4 **[22]** *Si G contient un P_4 fort, alors $\gamma_{\mathrm{p}}(G) \leq 2an/(2a+1)$.*

Preuve : Supposons que G contient un P_4 fort : (x, u, v, y). x et y sont les extrémités, donc $d_G(x) = d_G(y) = 1$. Soient $X = \{w \in N(u) \mid d_G(w) = 1\}$ et $Y = \{w \in N(v) \mid d_G(w) = 1\}$. Nécessairement, on a $x \in X$ et $y \in Y$. Soit

$Z = \{z \in N(u) \cap N(v) \mid d_G(z) = 2\}$. Soient $N_u = N(u) \setminus (X \cup Z \cup \{v\})$ et $N_v = N(v) \setminus (N_u \cup Y \cup Z \cup \{u\})$. Alors, $N_u, X, Z, \{v\}$ forme une partition faible de $N(u)$, tandis que N_v, Y est une partition faible de $N(v) \setminus N[u]$ (voir Figure 5.1).

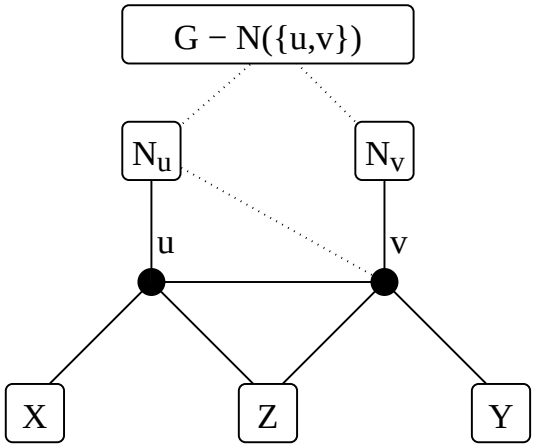


FIG. 5.1 – Un P_4 fort dans G.

Si $\alpha(G[N_u]) \geq a + 1$, alors tout ensemble stable de sommets de N_u de taille $a + 1$ réuni à l'ensemble $\{u, x\}$ forme une étoile $K_{1,a+2}$ de centre u dans G, ce qui contredit l'hypothèse de départ. Par conséquent, on a $\alpha(G[N_u]) \leq a$.

Si $\alpha(G[N_v]) \geq a$, alors tout ensemble stable de sommets de N_v de cardinal a réuni à l'ensemble $\{u, v, y\}$ forme une étoile $K_{1,a+2}$ de centre v dans G, contredisant l'hypothèse de départ. Par conséquent, $\alpha(G[N_v]) \leq a - 1$.

Soit $G' = G - (X \cup Y \cup Z \cup \{u, v\})$. Comme G est connexe, et comme $\alpha(G[N_u]) \leq a$ et $\alpha(G[N_v]) \leq a - 1$, nous savons que le nombre de composantes connexes $\#cc(G') \leq 2a - 1$. Soit $k' = \#cc(G')$, notons $G_1, \ldots, G_{k'}$ les composantes connexes de G'. Pour tout $i, 1 \leq i \leq k'$, notons n_i l'ordre de G_i. S'il existe un certain $i, 1 \leq i \leq k'$ pour lequel $n_i = 1$, alors $V(G_i) \subset X \cup Y \cup Z$, ce qui amène à une contradiction. On a donc $n_i \geq 2$ pour tout $i, 1 \leq i \leq k'$. Comme G est sans $K_{1,a+2}$, chaque composante connexe de G' l'est aussi. En appliquant l'hypothèse d'induction sur chacune, on obtient $\gamma_{\mathrm{p}}(G_i) \leq 2(an_i + 1)/(2a + 1)$ pour tout $i, 1 \leq i \leq k'$. Pour $i, 1 \leq i \leq k'$, soit S_i un paire-dominant minimum de G_i. Soit

$$S = \{u, v\} \cup \left(\bigcup_{i=1}^{k'} S_i \right)$$

Alors, S est un paire-dominant de G, et donc

$$\begin{aligned}
\gamma_{\mathrm{p}}(G) &\leq |S| = 2 + \sum_{i=1}^{k'} |S_i| \\
&\leq 2 + \sum_{i=1}^{k'} \frac{2(an_i + 1)}{2a + 1} \\
&= 2 + \left(\frac{2a}{2a+1}\right)\left(\sum_{i=1}^{k'} n_i\right) + \frac{2k'}{2a+1} \\
&\leq 2 + \left(\frac{2a}{2a+1}\right)(n-4) + \frac{2(2a-1)}{2a+1} \\
&= \frac{2an}{2a+1} \qquad \square
\end{aligned}$$

D'après le lemme 5.1.4, si G contient un P_4 fort, alors $\gamma_{\mathrm{p}}(G) < 2(an+1)/(2a+1)$. On peut donc supposer que G ne contient pas de P_4 fort. De plus, si $a = 0$, alors G est connexe sans $K_{1,2}$, impliquant que $G = K_n$, auquel cas $\gamma_{\mathrm{p}}(G) = 2 = 2(an+1)/(2a+1)$, comme souhaité. Supposons donc que $a \geq 1$ et que G contient un P_3 induit. Parmi tous les P_3 de G, soit $P\colon (u, v, w)$ l'un de ceux pour lesquels $d_G(u)$ est aussi petit que possible. Ainsi, si G contient une feuille, alors le sommet u est une feuille. Soient (voir figure 5.2)

$$\begin{aligned}
A &= \{x \in V \mid N(x) \cap V(P) = \{w\}\}, \\
B &= N(V(P)) \setminus (V(P) \cup A), \\
C &= V \setminus N[V(P)].
\end{aligned}$$

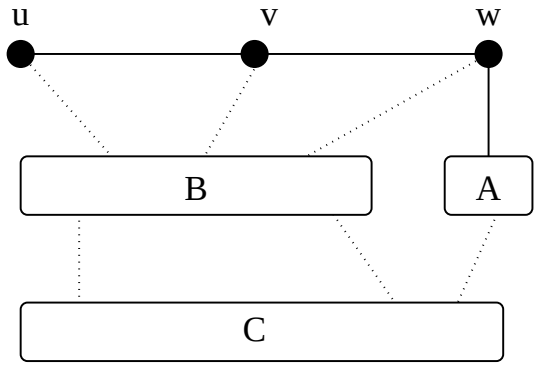


FIG. 5.2 – Les ensembles A, B et C.

Pour tout sommet $x \in B$, soit $G_x = G[N(x) \cap C]$. G étant sans $K_{1,a+2}$, $\alpha(G[A]) \leq a$ et tout sommet $x \in B$ vérifie $\alpha(G_x) \leq a$. Soient $G' = G[A \cup C]$

et $k' = \#cc(G')$. Comme G est connexe, toutes les composantes connexes de G' contiennent un sommet adjacent à au moins un sommet de $B \cup \{w\}$. On a donc

$$k' \leq \alpha(G[A]) + \sum_{x \in B} \alpha(G_x) \leq a(1 + |B|). \tag{5.1}$$

Notons $G_1, \ldots, G_{k'}$ les composantes connexes de G'. Pour tout $i, 1 \leq i \leq k'$, soit n_i l'ordre de G_i. G étant sans $K_{1,a+2}$, chaque composante connexe de G' l'est aussi. Supposons d'abord que $n_i \geq 2$ pour tout $i, 1 \leq i \leq k'$. En appliquant l'hypothèse d'induction à chaque composante de G', on obtient $\gamma_{\mathrm{p}}(G_i) \leq 2(an_i + 1)/(2a + 1)$ pour tout $i, 1 \leq i \leq k'$. Pour tout $i, 1 \leq i \leq k'$, soit S_i un paire-dominant minimum de G_i. Soit

$$S = \{u, v\} \cup \left(\bigcup_{i=1}^{k'} S_i \right)$$

Alors, S est un paire-dominant de G, et donc, en utilisant entre autre l'équation (5.1),

$$\begin{aligned}
\gamma_{\mathrm{p}}(G) &\leq |S| = 2 + \sum_{i=1}^{k'} |S_i| \\
&\leq 2 + \sum_{i=1}^{k'} \frac{2(an_i + 1)}{2a + 1} \\
&= 2 + \left(\frac{2}{2a + 1} \right) \left(k' + a \sum_{i=1}^{k'} n_i \right) \\
&= 2 + \left(\frac{2}{2a + 1} \right) \left(k' + a(|A| + |C|) \right) \\
&\leq 2 + \left(\frac{2}{2a + 1} \right) \left(a(1 + |B|) + a(n - |B| - 3) \right) \\
&= \frac{2(an + 1)}{2a + 1}
\end{aligned}$$

Ainsi, si $n_i \geq 2$ pour chaque $i, 1 \leq i \leq k'$, on obtient le résultat souhaité. Supposons maintenant que $n_i = 1$ pour au moins un i, $1 \leq i \leq k'$. Alors, G' a au moins un sommet isolé. Soit I l'ensemble des sommets isolés de G'.

Nous montrons que tout sommet de I a un degré au moins 2 dans G. Soit $z \in I$ et supposons que z est une feuille de G. Alors, de par notre choix du chemin P, le sommet u est une feuille. Si $z \in A$, u, v, w, z est un P_4 fort, tandis que si $z \in C$, alors z a un voisin $y \in B$ qui à son tour est adjacent au sommet v, ce qui nous donne le P_4 fort u, v, y, z. Ces deux situations contredisent l'hypothèse que G ne contient pas de P_4 fort. Ainsi, $d_G(z) \geq 2$.

Soit X un sous-ensemble minimum de sommets de B qui domine I dans le graphe G ; soit $B_X = B \setminus X$. Par minimalité de X, tout sommet de X a un sommet de I qu'il est le seul à dominer. Pour tout sommet $x \in X$, soit

x' ce voisin privé de x dans I. Comme $d_G(x') \geq 2$, le sommet x' est voisin d'au moins un sommet de $B_X \cup \{w\}$. Nous considérons maintenant le graphe $G^* = G[A \cup C \cup X]$. Pour tout sommet $x \in X$, les composantes connexes de G' adjacentes à x (c'est à dire, les composantes connexes de G' qui contiennent un sommet adjacent à x dans G) forment une seule composante connexe dans G^*. Cette composante contient les sommets x et x', or x' est adjacent à au moins un sommet de $B_X \cup \{w\}$. Ainsi, toutes les composantes connexes de G^* contiennent un sommet adjacent à au moins un sommet de $B_X \cup \{w\}$. En écrivant $\#cc(G^*)$ simplement sous la forme k^*, on obtient :

$$k^* \leq \alpha(G[A]) + \sum_{x \in B_X} \alpha(G_x) \leq a(1 + |B_X|). \tag{5.2}$$

Notons $G_1^*, \ldots, G_{k^*}^*$ les composantes connexes de G^*. Pour tout $i, 1 \leq i \leq k^*$, soit n_i^* l'ordre de G_i^*. Comme le graphe G est sans $K_{1,a+2}$, chaque composante connexe de G^* l'est aussi. De plus, par construction, chaque composante connexe de G^* contient au moins deux sommets. On peut donc appliquer l'hypothèse d'induction sur chaque composante de G^*, et obtenir $\gamma_{\mathrm{p}}(G_i^*) \leq 2(an_i^* + 1)/(2a + 1)$ pour tout $i, 1 \leq i \leq k^*$. Pour chaque $i, 1 \leq i \leq k^*$, soit S_i^* un paire-dominant minimum de G_i^*. Soit

$$S^* = \{u, v\} \cup \left(\bigcup_{i=1}^{k^*} S_i^* \right).$$

Alors, S^* est un paire-dominant de G, et donc

$$\gamma_{\mathrm{p}}(G) \leq |S^*| = 2 + \sum_{i=1}^{k^*} |S_i^*|.$$

Ainsi, d'après l'équation (5.2),

$$\begin{aligned}
\gamma_{\mathrm{p}}(G) &\leq 2 + \sum_{i=1}^{k^*} \frac{2(an_i^* + 1)}{2a + 1} \\
&= 2 + \left(\frac{2}{2a+1} \right) \left(k^* + a \sum_{i=1}^{k^*} n_i^* \right) \\
&= 2 + \left(\frac{2}{2a+1} \right) (k^* + a(n - |B_X| - 3)) \\
&\leq 2 + \left(\frac{2}{2a+1} \right) (a(1 + |B_X|) + a(n - |B_X| - 3)) \\
&= \frac{2(an+1)}{2a+1}.
\end{aligned}$$

Ceci établit la borne supérieure voulue.

Il nous reste à montrer que la borne est serrée. Soit $p \geq 2$ un entier quelconque. Si $a = 0$, on pose $G_a = K_p$. Pour $a \geq 1$, soit G_a le graphe que l'on obtient à l'aide de p copies de l'étoile subdivisée $K^*_{1,a}$ et une copie de l'étoile $K_{1,1} = K_2$ en formant une clique avec les centres de chacune de ces étoiles ($p + 1$ sommets). Le graphe G_a est représenté sur la figure 5.3.

G_a est un graphe connexe sans $K_{1,a+2}$ d'ordre $n = (2a+1)p+2$. Tous les $ap+1$ sommets supports sont nécessaires dans un paire-dominant du graphe. Ils suffisent à dominer le graphe, mais comme ils forment un ensemble stable, chacun nécessite l'ajout d'un sommet pour former un paire-dominant. Par conséquent, le graphe G_a vérifie

$$\gamma_{\mathrm{p}}(G_a) = 2(ap + 1) = \frac{2(an + 1)}{2a + 1}.$$

Ceci complète la preuve du théorème 5.1.3. □

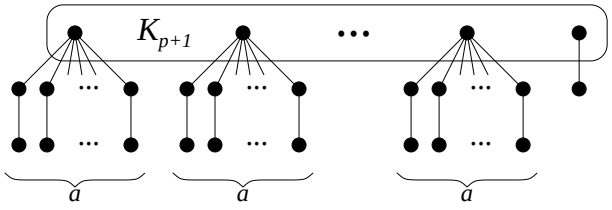


FIG. 5.3 – Le graphe G_a, sans $K_{1,a+2}$, d'ordre n, qui satisfait $\gamma_{\mathrm{p}}(G_a) = 2(an + 1)/(2a + 1)$

5.1.3 Paire-domination dans les graphes sans P_5.

Le principal résultat de cette partie est une borne supérieure du nombre de paire-domination des graphes sans P_5. Néanmoins, pour généraliser l'étude à toute longueur de chemin, nous allons observer ce qui se passe dans les graphes sans P_4 et sans P_6, les autres longueurs de chemin ne permettant pas de borne différente.

Le problème de la paire-domination dans les graphes sans P_4 est un problème facile, comme le montre la proposition suivante.

Proposition 5.1.5 [21] *Soit G un graphe connexe d'ordre $n \geq 2$. Si G ne contient pas de P_4 induit, alors $\gamma_{\mathrm{p}}(G) = 2$.*

Preuve : Si G est sans P_4, alors on apprend dans [58] que soit G n'est pas connexe, soit son complémentaire n'est pas connexe. Comme G est connexe, $\overline{G}$ n'est pas connexe. Soit V_1 un sous-ensemble de V tel que $\overline{G}[V_1]$ est une composante connexe de $\overline{G}$. Soit $V_2 = V \setminus V_1$. Pour tout $v_1 \in V_1$, pour tout

$v_2 \in V_2$, $v_1v_2 \in E(G)$, car sinon ils seraient voisins dans $\overline{G}$. Donc, choisissons $v_1 \in V_1$ et $v_2 \in V_2$, l'ensemble $\{v_1, v_2\}$ est un paire-dominant de G. □

Pour ce qui est des graphes sans P_6, on ne peut rien prouver de mieux que le théorème 5.1.1 de Haynes et Slater, puisque l'étoile subdivisée ne contient pas de P_6. Nous allons maintenant montrer le théorème principal de cette partie.

Théorème 5.1.6 [21] *Soit G un graphe connexe d'ordre $n \geq 2$. Si G n'est pas le graphe C_5 et ne contient aucun P_5 induit, alors*

$$\gamma_{\mathrm{p}}(G) \leq \frac{n}{2} + 1,$$

et cette borne est atteinte.

Preuve : Nous allons prouver cette inégalité par induction sur l'ordre n du graphe. Dans les cas de base, pour $n \leq 4$, soit le graphe ne contient pas de P_4, soit c'est un P_4. Dans tous les cas, on a $\gamma_{\mathrm{p}}(G) = 2$. Comme $2 \leq \frac{n}{2} + 1$, la borne est vérifiée. Considérons maintenant que nous avons un graphe sans P_5 d'ordre $n \geq 5$, et que le résultat est vrai pour tout graphe sans P_5 d'ordre inférieur à n, excepté le graphe C_5.

Nous allons d'abord traiter le cas où le graphe G ne contient pas de C_5. S'il ne contient pas de P_4, on utilise la proposition 5.1.5. Supposons donc qu'il contient un P_4, $P : (u_0, u_1, u_2, u_3)$. On définit les ensembles suivants :

$$\begin{aligned} \mathcal{I} &= N(P) \\ \mathcal{O} &= V \setminus (\mathcal{I} \cup P) \\ \mathcal{B} &= N(\mathcal{O}) \qquad (\mathcal{B} \subseteq \mathcal{I}) \end{aligned}$$

Nous allons d'abord prouver par l'absurde que le sous-graphe de G induit sur l'ensemble $\mathcal{B} \cup \mathcal{O}$ est connexe. Supposons qu'il ne le soit pas. Alors il existe deux sous-ensembles $X_1, X_2 \subset \mathcal{B} \cup \mathcal{O}$ qui ne sont pas connectés. Chacun de ces ensembles contient des sommets dans $\mathcal{B}$ et des sommets dans $\mathcal{O}$, par construction de $\mathcal{B}$. Soit b_1 (respectivement b_2) un sommet de $\mathcal{B} \cap X_1$ (respectivement $\mathcal{B} \cap X_2$) et o_1 (respectivement o_2) un de ses voisins dans $\mathcal{O}$. o_1, b_1, P, b_2, o_2 induit un P_5, ce qui contredit notre hypothèse initiale.

Par conséquent, $G[\mathcal{B} \cup \mathcal{O}]$ est connexe d'ordre au plus $n-4$. Il est évident qu'il ne contient pas de P_5 et que ce n'est pas le graphe C_5, on peut donc appliquer l'induction et obtenir un paire-dominant S' de cardinal au plus $\frac{n-4}{2} + 1$. On remarque que $\mathcal{I} \subset N(\{u_1, u_2\})$, ou bien on trouve un P_5 ou un C_5 induit sur $P \cup \mathcal{I}$. Donc $\{u_1, u_2\}$ domine $\mathcal{I}$, et enfin $S = \{u_1, u_2\} \cup S'$ est un paire-dominant de G. Finalement, $|S| = |S'| + 2 \leq \frac{n}{2} + 1$, la borne est vérifiée.

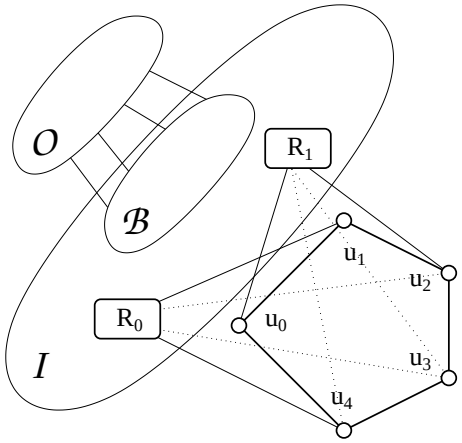


FIG. 5.4 – Certains des ensembles définis.

Désormais, on considère que le graphe contient un C_5 et au moins un autre sommet ; on note le cycle C: $(u_0, u_1, u_2, u_3, u_4)$. On définit :

$$\begin{aligned} \mathcal{I} &= N(C) \\ \mathcal{O} &= V \setminus (\mathcal{I} \cup C) \\ \mathcal{B} &= N(\mathcal{O}) \quad (\mathcal{B} \subseteq \mathcal{I}) \end{aligned}$$

De plus, pour tout $0 \leq i \leq 4$, on définit l'ensemble $R_i = \mathcal{I} \setminus (N(\{u_{i\oplus 2}, u_{i\oplus 3}\})$ où $\oplus$ représente l'addition modulo 5 (voir figure 5.4). Nous allons d'abord donner quelques propriétés de ces ensembles :

(i) $\forall x \in \mathcal{I}, |N(x) \cap C| \geq 1$.
Autrement, x et C induisent un P_5.

(ii) $G[\mathcal{B} \cup \mathcal{O}]$ est connexe.
La preuve est similaire à celle du 1er cas. Supposons qu'il ne soit pas connexe. Soient $b_1, b_2 \in \mathcal{B}$ deux sommets dans des composantes connexes distinctes. Soit o_1 (respectivement o_2) un voisin de b_1 (respectivement b_2) dans $\mathcal{O}$. Les sommets o_1, b_1, C, b_2, o_2 induisent un P_5, ce qui est impossible par hypothèse.

(iii) $\forall\, 0 \leq i \leq 4$, $\forall x \in R_i$, $x \in N(i \oplus 1) \cap N(i \oplus 4)$.
On le vérifie par l'absurde. Supposons que cette propriété soit fausse. D'après (ii), on sait que x est dans le voisinage d'au moins un sommet parmi $i \oplus 1$ et $i \oplus 4$. S'il n'est pas voisin de ces deux sommets, alors x et C induisent un P_5.

(iv) $\forall\, 0 \leq i \leq 4$, $\forall x \in R_i$, $x \notin \mathcal{B}$.
Autrement, l'un de ses voisins dans $\mathcal{O}$, x et $i \oplus 1, i \oplus 2, i \oplus 3$ induisent un P_5.

(v) $\forall\, 0 \leq i \neq j \leq 4$, $R_i \cap R_j = \emptyset$.
Ceci est une conséquence directe de la définition des R_i et de (iii).

A l'aide de ces propriétés, nous allons maintenant prouver la borne. Supposons tout d'abord que $\mathcal{B}$ est vide. $\mathcal{I}$ n'est pas vide, ou le graphe serait un C_5. D'après (i), $\{u_1, u_2, u_3, u_4\}$ domine le graphe, et $G[\{u_1, u_2, u_3, u_4\}]$ admet un couplage parfait. De plus, $\frac{n}{2} + 1 = \frac{5+|\mathcal{I}|}{2} + 1 \geq 4$, donc le cardinal de cet ensemble vérifie la borne.

Supposons donc maintenant que pour tout i, R_i n'est pas vide. D'après (ii), on sais que $G[\mathcal{B} \cup \mathcal{O}]$ est connexe ; soit n' l'ordre de ce sous-graphe. $n' = n - 5 - |\mathcal{I}| \leq n - 10$, car tous les R_i sont non vides et disjoints (d'après (v)). Soit S' un paire-dominant minimum de $G[\mathcal{B} \cup \mathcal{O}]$. On prends $S = S' \cup \{u_1, u_2, u_3, u_4\}$ pour former un paire-dominant de G. Si $G[\mathcal{B} \cup \mathcal{O}]$ n'est pas réduit à un C_5, on a par induction $|S'| \leq \frac{n-10}{2} + 1$, donc $|S| = |S'| + 4 \leq \frac{n-10}{2} + 1 + 4 < \frac{n}{2} + 1$. Si $G[\mathcal{B} \cup \mathcal{O}]$ est un C_5, alors S' contient 4 sommets, donc $|S| = 8$ et $n = 5 + 5 + \mathcal{I} \geq 15$. Finalement, $8 \leq \frac{15}{2} + 1$, la borne est valide.

Pour prouver la borne, il ne nous reste plus qu'à considérer le cas où $\mathcal{B}$ n'est pas vide et où il existe un i tel que R_i est vide. Sans perte de généralité, supposons que $i = 0$. On distingue 2 cas.

Premier cas : il existe un sommet $b \in \mathcal{B} \cap N(u_0)$.

Alors, $G[\mathcal{B} \cup \mathcal{O} \cup \{u_0\}]$ est connexe. Supposons d'abord que ce sous-graphe n'est pas un C_5, on peut donc appliquer l'induction. Soit S' un paire-dominant minimum de $G[\mathcal{B} \cup \mathcal{O} \cup \{u_0\}]$. Par induction, on a $|S'| \leq \frac{n-4}{2} + 1$. Puisque $R_0 = \emptyset$, $S = S' \cup \{u_2, u_3\}$ est un paire-dominant de G de cardinal $|S'| + 2 \leq \frac{n}{2} + 1$, la borne est valide.

Si $G[\mathcal{B} \cup \mathcal{O} \cup \{u_0\}]$ est un C_5, on le note $(u_0, u'_1, u'_2, u'_3, u'_4)$ (voir figure 5.5). Comme tous ces sommets sauf u_0 sont dans $\mathcal{B}$ ou $\mathcal{O}$, u'_2 et u'_3 sont dans $\mathcal{O}$ tandis que u'_1 et u'_4 sont dans $\mathcal{B}$ (et d'après (iv), dans aucun R_i). Montrons que $S = \{u_1, u'_1, u_4, u'_4\}$ est un paire-dominant de G. Pour tout $x \in R_1 \cup \{u_1\}$, on a $xu'_1 \in E$ car sinon, u'_3, u'_2, u'_1, u_0, x formerait un P_5 induit. De même, on a pour tout $x \in R_4 \cup \{u_4\}$, $xu'_4 \in E$. Donc $G[S]$ admet un couplage parfait et S domine $\mathcal{B}$, $\mathcal{O}$, u_0, R_1 et R_4. S domine aussi R_2 et R_3 d'après (iii). Supposons qu'il existe un sommet $x \in \mathcal{I} \setminus \mathcal{B}$ qui ne soit pas dominé. Nécessairement, il n'est dans aucun R_i. Si x est adjacent à u_1, u'_1, u_4 ou u'_4, il est dominé. Supposons donc qu'il ne l'est pas. Puisqu'il n'est pas dans R_3, il est adjacent à u_0. Il n'est pas dans $\mathcal{B}$, donc il n'est adjacent ni à u'_2 ni à u'_3. Alors, x, u_0, u'_1, u'_2, u'_3 induit un P_5, ce qui est absurde. Donc S domine effectivement G. Finalement, $|S| = 4 \leq \frac{9}{2} < \frac{n}{2} + 1$, la borne es vérifiée.

Deuxième cas : pour tout sommet $b \in \mathcal{B}, b \notin N(u_0)$.

On remarque avant tout que pour tout $x \in R_4 \cup \{u_4\}$, $\mathcal{B} \subset N(x)$. Autrement, étant donnés deux sommets $b \in \mathcal{B} \setminus N(x)$ et $o \in \mathcal{O} \cap N(b)$, comme $x \notin \mathcal{B}$ (d'après (iv)), o, b, C, x, u_0 induit un P_5. Donc $G[\mathcal{O} \cup \mathcal{B} \cup R_4 \cup \{u_4\}]$ est connexe. S'il s'agissait d'un C_5, 2 sommets seraient dans $\mathcal{O}$, 2 seraient dans $\mathcal{B}$, le cinquième étant u_4. Les deux sommets dans $\mathcal{O}$ avec n'importe quel sommet de $\mathcal{B}$, u_4 et u_0 induiraient un P_5. On peut donc appliquer l'induction,

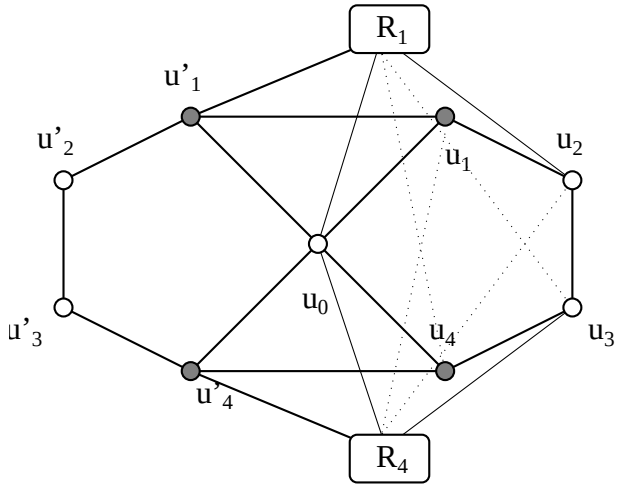


FIG. 5.5 – Premier cas, si le sous-graphe restant est un C_5

et choisir un paire-dominant S' de $G[\mathcal{O} \cup \mathcal{B} \cup R_4 \cup \{u_4\}]$ de cardinal au plus $\frac{n-4}{2}+1$. $S' \cup \{u_1, u_2\}$ est un paire-dominant de G de cardinal $|S'|+2 \leq \frac{n}{2}+1$, la borne tient.

Pour finir, il nous reste à montrer que la borne est serrée. Étant donné un entier k, considérons le graphe à $2k$ sommets construit ainsi : prenons une clique K_k, et à chacun de ses sommets, attachons une feuille. Un paire-dominant de ce graphe contient nécessairement tous les sommets de la cliques, qui sont des sommets supports. Il doit aussi contenir l'une des feuilles, pour former un couplage. Ceci nous fait $k+1$ sommets, et comme $k+1 = \frac{2k}{2}+1$, la borne est atteinte. □

5.1.4 Bilan sur la paire-domination

Ces deux bornes présentent un intérêt certain en elles-mêmes pour déterminer le nombre de paire-domination d'un graphe. Le nombre de branches de la plus grande étoile induite du graphe étant au plus le degré maximum $\Delta(G)$, la première borne nous donne très facilement une borne sur le nombre de paire-domination du graphe. Ainsi, d'un point de vue algorithmique, cette première borne est très utile.

Néanmoins, au moins du point de vue théorique, il serait préférable d'avoir une borne sur le nombre de paire-domination du graphe sans étoile subdivisée. C'est la que la deuxième approche, celle des graphes sans P_5, se montre plus pertinente. En effet, si l'approche de l'étoile offre des résultats plus généraux, l'approche des graphes sans P_5 traduit beaucoup mieux les véritables contraintes de la paire-domination. Nous avons tenté de continuer l'étude sur les graphe sans $K^*_{1,3}$, mais cette étude est difficile, car le

sous-graphe exclu n'est pas contenu dans le voisinage d'un sommet. Par conséquent, le nombre de cas augmente très vite et c'est pourquoi nous n'avons pas encore trouvé de résultat plus général pour les graphes sans étoile subdivisée.

5.2 Lien entre les nombres de paire-domination supérieure et de domination totale supérieure

Avec Michael A. Henning et son étudiant, John McCoy [24], nous avons étudié les liens entre la domination totale supérieure et la paire-domination supérieure. Cette partie relate les résultats de cette étude. Après quelques remarques générales présentées dans la partie 5.2.1, nous étudions dans la partie 5.2.2 les relations entre les deux paramètres. En particulier, nous montrons que les graphes G sans sommets isolés vérifient $\Gamma_t(G) \geq \frac{1}{2}\Gamma_{\mathrm{p}}G+1$. Dans la partie 5.2.3, nous étudions le cas des arbres : nous caractérisons les arbres qui atteignent la borne précédente, nous donnons la valeur exacte du nombre de paire-domination supérieure et de domination totale supérieure pour les chemins, et nous montrons que les arbres T non triviaux vérifient $\Gamma_t(T) \leq \Gamma_{\mathrm{p}}(T)$.

5.2.1 Propriétés générales

Voici d'abord quelques propriétés des paire-dominants minimaux et des dominants totaux minimaux, qui nous seront utiles par la suite.

L'observation suivante est montrée par Cockayne, Dawes et Hedetniemi dans [15].

Observation 5.2.1 [15] *Soit S un dominant total dans un graphe G sans sommet isolé. S est un dominant total minimal si et seulement si pour tout $v \in S$, $\mathrm{pn}(v, S) \neq \emptyset$.*

Nous montrons la propriété suivante pour les paire-dominants minimaux.

Propriété 5.2.2 [24] *Soit S un paire-dominant dans un graphe G sans sommet isolé. S est un paire-dominant minimal de G si et seulement si pour toute paire (u, v) de sommets de S, $S \setminus \{u, v\}$ n'est pas un paire-dominant de G.*

Preuve : Si S est un paire-dominant minimal, aucun sous-ensemble propre de S est un paire-dominant, donc la nécessité est évidente. Nous allons prouver la suffisance par contraposée. Supposons que S n'est pas un paire-dominant minimal de G. Nous allons montrer qu'il existe une paire de sommets $(u, v) \in S$ tel que $S \setminus (u, v)$ est un paire-dominant. Soit $S' \subset S$ un paire-dominant minimal de G. Soit M un couplage parfait dans $G[S]$ et M' un couplage parfait dans $G[S']$. Soit $H = (V, E')$ le graphe partiel de G

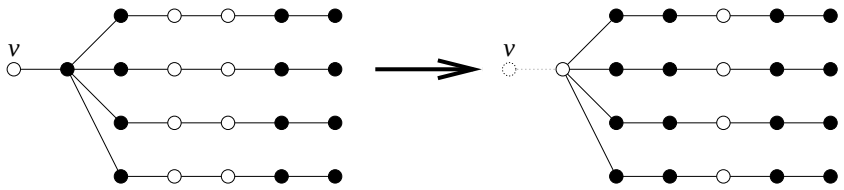


FIG. 5.6 – Un arbre T tel que $\Gamma_t(T-v) - \Gamma_t(T) = 4$

défini par $E' = M \triangle M'$. M et M' étant des couplages, les sommets de H sont de degré au plus 2. Ainsi, les composantes connexes de H sont des chemins (potentiellement triviaux) et des cycles. Soit $u \in S \setminus S'$. u est de degré 1 dans H, donc sa composante connexe dans H est nécessairement un chemin P non trivial. L'autre extrémité v du chemin P est nécessairement un sommet de S car les sommets de $V \setminus S$ sont de degré 0. De plus, v n'est pas un sommet de S' ou il serait de degré 0 ou 2, donc $v \in S \setminus S'$. Soit M_P l'ensemble des arêtes de P dans M, et M'_P l'ensemble des arêtes de P dans M', $M'_P = E(P) \setminus M_P$. Comme u et v sont dans $S \setminus S'$, les extrémités de P sont dans M_P. Par conséquent, M'_P est un couplage parfait des sommets de $P \setminus \{u, v\}$. Soit $D = S \setminus \{u, v\}$, on a $S' \subseteq D$. Comme S' est un dominant de G, D domine G. De plus, $(M \setminus M_P) \cup M'_P$ est un couplage parfait de D, donc D est un paire-dominant de G. Ceci montre la suffisance. □

L'observation suivante découle directement de la définition d'un paire-dominant et d'un dominant total.

Observation 5.2.3 *Un sommet support d'un graphe est nécessairement inclus dans tout paire-dominant et tout dominant total.*

Nous montrons maintenant que l'on ne peux pas borner la variation que peut induire le retrait d'un sommet au nombre de paire-domination supérieure et au nombre de domination totale supérieure d'un graphe.

Proposition 5.2.4 [24] *Pour tout entier k positif, il existe un arbre T et une feuille v de T tel que $\Gamma_t(T-v) - \Gamma_t(T) = k$.*

Preuve : Soit T l'arbre obtenu à partir de l'étoile $K_{1,k+2}$ en subdivisant $k+1$ arêtes exactement quatre fois (voir figure 5.6). On a alors $\Gamma_t(T) = 3k + 4$. En revanche, si on retire la feuille v liée au sommet de degré maximum dans T, on obtient $\Gamma_t(T-v) = 4k + 4$. □

Proposition 5.2.5 [24] *Pour tout entier pair $k \geq 0$, il existe un graphe G tel que pour tout sommet v de G, $\Gamma_{\mathrm{p}}(G-v) - \Gamma_{\mathrm{p}}(G) = k$.*

Preuve : Soient G_1 et G_2 deux copies de la clique K_{k+5}, et soit G le graphe obtenu à partir de $G_1 \cup G_2$ en ajoutant un couplage parfait de G_1 à G_2 (voir

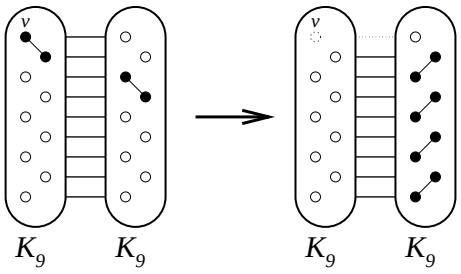


FIG. 5.7 – Un graphe G tel que $\Gamma_{\mathrm{p}}(G-v)-\Gamma_{\mathrm{p}}(G)=4$

figure 5.7). Autrement dit, $G = K_{k+5} \,\square\, K_2$. L'ensemble des sommets de G_1 forme un dominant minimal de G. Soit S un paire-dominant de G. Si tous les sommets de S sont dans le même $V(G_i)(i \in \{1,2\})$, alors $S = V(G_i)$, ou S ne domine pas tous les sommets de $V(G_{2-i}$. Or $V(G_i)$ n'admet pas de couplage parfait car il contient un nombre impair de sommets, donc S n'est pas un paire-dominant. Donc chacun des $V(G_i)(i \in \{1,2\})$ contient des sommets de S. Ensuite, il est facile de vérifier qu'un $\Gamma_{\mathrm{p}}(G)$-dominant (un paire-dominant minimal de G de cardinal maximum) contient 4 sommets, 2 dans chaque $V(G_i)$.

Soit $v \in V(G_i)$ un sommet de G, v' son partenaire dans $V(G_{3-i})$. On vérifie facilement que $V(G_{3-i}) \setminus \{v'\}$ est un $\Gamma_{\mathrm{p}}(G-v)$-dominant. $|V(G_{3-i}) \setminus \{v'\}| = k+4$, donc $\Gamma_{\mathrm{p}}(G-v)-\Gamma_{\mathrm{p}}(G)=k$. □

5.2.2 Relations entre les paramètres dans le cas général

Comme tout paire-dominant d'un graphe G sans sommets isolé est un dominant total de ce même graphe, l'inégalité $\gamma_t(G) \leq \gamma_{\mathrm{p}}(G)$ est toujours vérifiée. Dans le cas des domination supérieures, un paire-dominant minimal n'est pas toujours un dominant total minimal, comme le montre la proposition suivante.

Proposition 5.2.6 [24] *Pour tout entier k positif, il existe un graphe G tel que $\Gamma_{\mathrm{p}}(G)-\Gamma_t(G) \geq k$.*

Preuve : Soit G un graphe obtenu à partir d'un graphe connexe quelconque H d'ordre k en attachant à chaque sommet de H une feuille et deux chemins de longueur 2 disjoints (voir figure 5.8). Chaque sommet de H dans le nouveau graphe G est un sommet support, et a deux sommets supports voisins qui ne sont pas des sommets de H. Ainsi, le graphe G contient $3k$ sommets supports. D'après l'observation 5.2.3, ces $3k$ sommets sont dans tout dominant total et dans tout paire-dominant de G. De plus, ils forment le seul dominant total minimal de G, donc $\Gamma_t(G) = 3k$. Un paire-dominant de G contient aussi ces $3k$ sommets, mais il doit aussi admettre

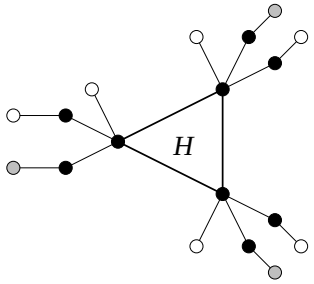


FIG. 5.8 – Le graphe construit sur $H = C_3$ tel que $\Gamma_{\rm p}(G) - \Gamma_t(G) = 3$

un couplage parfait. Donc il doit nécessairement contenir une feuille parmi les deux chemins de longueur 2 attachés à chaque sommet de H. Ainsi, $\Gamma_{\rm p}(G) \geq 4k \geq \Gamma_t(G) + k$. □

De plus, une égalité comparable à $\gamma_t(G) \leq \gamma_{\rm p}(G)$ n'est pas valide dans le cas des dominations supérieures, car un dominant total minimal n'est pas toujours contenu dans un paire-dominant minimal, comme le met en évidence la proposition suivante.

Proposition 5.2.7 [24] *Pour tout entier k impair, il existe un graphe G tel que $\Gamma_t(G) - \Gamma_{\rm p}(G) = k$.*

Preuve : Supposons que k est impair. Soient G_1 et G_2 deux copies du graphe K_{k+4}, et soit G le graphe obtenu à partir de $G_1 \cup G_2$ en ajoutant un couplage parfait entre G_1 et G_2 (voir le graphe de la figure 5.7). On a $G = K_{k+4} \,\square\, K_2$. L'ensemble des sommets de G_1 forme un $\Gamma_t(G)$-dominant, donc $\Gamma_t(G) = k + 4$. En revanche, comme k est impair, on vérifie de même que dans la preuve de la proposition 5.2.5 que $\Gamma_p(G) = 4$. Par conséquent, $\Gamma_t(G) - \Gamma_{\rm p}(G) = k$ □

Les deux propositions précédentes nous montrent que si l'on veut établir une borne entre le nombre de paire-domination supérieure et le nombre de domination totale supérieure d'un graphe, il faut utiliser un facteur multiplicatif. C'est ce que nous faisons pour proposer la borne suivante.

Théorème 5.2.8 [24] *Pour tout graphe G sans sommet isolé, on a*

$$\Gamma_t(G) \geq \frac{1}{2}\Gamma_{\rm p}(G) + 1\,.$$

Preuve : Soit G un graphe sans sommet isolé, soit S un $\Gamma_{\rm p}(G)$-dominant, et soit $M = \{e_1, e_2, \ldots, e_k\}$ un couplage parfait de $G[S]$, avec $e_i = u_i v_i$ pour $1 \leq i \leq k$. S est un dominant total de G. Soit $S' \subseteq S$ un dominant total minimal de G. Si $S' \cap \{u_i, v_i\} = \emptyset$ pour un certain $1 \leq i \leq k$, alors $S \setminus \{u_i, v_i\}$ est un paire-dominant de G, contredisant la minimalité de S.

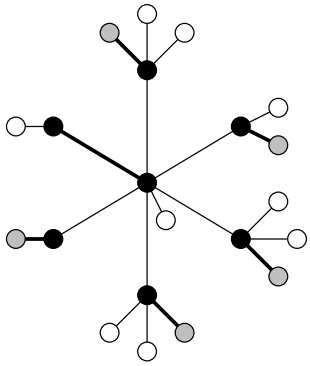


FIG. 5.9 – Un arbre construit sur l'étoile $K_{1,6}$ tel que $\Gamma_t(T) = \frac{1}{2}\Gamma_{\mathrm{p}}(T) + 1$

Donc $|S' \cap \{u_i, v_i\}| \geq 1$ pour tout $1 \leq i \leq k$. En renommant les sommets si nécessaire, on peut considérer que $u_i \in S' \cap \{u_i, v_i\}$ pour tout $1 \leq i \leq k$. Supposons que pour tout $1 \leq i \leq k$, $v_i \notin S'$. Comme S' est un dominant total, il existe une arête f dans $G[S']$. Sans perte de généralité, on suppose que $f = u_1u_2$. Comme l'ensemble $D = S \setminus \{v_1v_2\}$ contient S' qui domine G, D domine G. De plus, $M \setminus \{e_1, e_2\} \cup \{f\}$ est un couplage parfait de $G[D]$. D est donc un paire-dominant de G, contredisant la minimalité de S. Donc il existe $1 \leq i \leq k$ tel que $v_i \in S'$. Par conséquent, $|S'| = k + 1 = \frac{1}{2}\Gamma_{\mathrm{p}}(G) + 1$. □

5.2.3 Le cas des arbres

Nous commençons par caractériser les arbres qui atteignent l'égalité dans la borne du théorème 5.2.8.

Théorème 5.2.9 [24] *T est un arbre vérifiant $\Gamma_t(T) = \frac{1}{2}\Gamma_{\mathrm{p}}(T) + 1$ si et seulement si on peut le construire à partir d'une étoile (potentiellement triviale) en ajoutant au moins une feuille à chaque sommet de l'étoile (voir figure 5.9).*

Preuve : Si T est un arbre construit de la façon décrite, alors il est facile de vérifier qu'il vérifie l'égalité. Le seul dominant total minimal de T est l'ensemble S' des sommets de l'étoile initiale. Un couplage maximum sur $G[S']$ ne contient qu'une arête. Il faut donc ajouter au moins une feuille pour chacun des $\Gamma_t(G) - 2$ sommets de S' pour former un paire-dominant, de cardinal $\Gamma_t(T) + \Gamma_t(T) - 2$. Comme tout paire-dominant contient S, on en déduit que $\Gamma_{\mathrm{p}}(T) = 2\Gamma_t(T) - 2$ et on obtient l'égalité.

Soit T un arbre qui vérifie $\Gamma_t(T) = \frac{1}{2}\Gamma_{\mathrm{p}}(T) + 1$. On reprends les notations de la preuve du théorème 5.2.8. Soit S un $\Gamma_{\mathrm{p}}(G)$-dominant, $S' \subset S$ un dominant total minimal. D'après la preuve du théorème 5.2.8, on a $|S'| \geq$

$\frac{1}{2}\Gamma_{\rm p}(T)+1$ et par hypothèse, S' est un $\Gamma_t(T)$-dominant. Toujours en conservant les notations, on a $S' = \{u_1, \ldots, u_k\} \cup \{v_1\}$ et $u_1v_1 \in M$, M étant un couplage parfait de $T[S]$. Si $\Gamma_t(T) = 2$, T est une étoile ou une étoile double, et le résultat s'ensuit. Supposons donc que $\Gamma_t(T) = k + 1 \geq 3$. Montrons d'abord que $T[S']$ est une étoile. S'il existe une arête u_iu_j pour $2 \leq i < j \leq k$, alors l'ensemble $T[S \setminus \{v_i, v_j\}]$ admet le couplage $M \setminus \{e_i, e_j\} \cup \{u_iu_j\}$ et $S \setminus \{v_i, v_j\}$ est donc un paire-dominant de T, contredisant la minimalité de S. Donc le graphe $T[\{u_2, \ldots, u_k\}]$ est stable. S' est un dominant total, donc tous les $u_i(2 \leq i \leq k$ sont adjacents à u_1 ou v_1. S'il existe deux arêtes u_1u_i et v_1u_j avec $2 \leq i, j \leq k$ et $i \neq j$, alors à nouveau, $T[S \setminus \{v_i, v_j\}]$ admet le couplage $M \setminus \{e_1, e_i, e_j\} \cup \{u_1u_i, v_1u_j\}$, et $S \setminus \{v_i, v_j\}$ est donc un paire-dominant de T, contredisant la minimalité de S. Par conséquent, $T[S']$ est une étoile ayant pour centre u_1 ou v_1. En renommant les sommets si nécessaire, on suppose que u_1 est le centre de l'étoile.

On remarquera que tous les sommets de $V(T) \setminus S'$ sont des feuilles dans T. Soit u un sommet de degré au moins 2 dans $V(T) \setminus S'$. Si u est adjacent à deux sommets u' et u'' de S', le chemin de u' à u'' dans $T[S']$ avec les arêtes uu' et uu'' forment un cycle, ce qui est impossible car T est un arbre. Donc u est relié à au plus un sommet u' de S'. Soit v un voisin de u dans $V(T) \setminus S'$, soit $v' \in S'$ le sommet qui domine v. Si $v' = u'$, alors u', u, v forme un cycle de longueur 3 ; sinon, un chemin de u' à v' dans $T[S']$ et les arêtes $u'u$, $v'v$ et uv forment un cycle. Tous les sommets de $V(T) \setminus S'$ sont de degré 1 et sont donc des feuilles.

D'après l'observation 5.2.1, $\mathrm{pn}(x, S') \neq \emptyset$ pour tout $x \in S'$. Comme $T[S']$ est une étoile à au moins trois sommets, $\mathrm{ipn}(x) = \emptyset$ pour tout $x \in S'$ sauf u_1. Donc pour tout $x \neq u_1$ dans S', x a un voisin privé dans $V(T) \setminus S'$, donc x est un sommet support de T. Il nous reste à montrer que u_1 est un sommet support de T et la preuve sera complète. Supposons que ce ne soit pas le cas. Alors, l'ensemble des sommets de $S' \setminus \{u_1\}$ avec pour chacun de ces sommets une feuille qui lui est adjacente forme un dominant total minimal de T, de cardinal $2k$, contredisant $\Gamma_t(T) = k+1$. Donc u_1 est aussi un sommet support de T, et la preuve est complète. □

Nous allons maintenant établir le nombre de paire-domination supérieure et le nombre de domination totale supérieure d'un chemin.

Proposition 5.2.10 [24] *Pour tout chemin à $n \geq 2$ sommets,*

$$\Gamma_t(P_n) = 2\lfloor \frac{n+1}{3} \rfloor .$$

Preuve : Nous allons procéder par induction sur n. Pour $2 \leq n \leq 4$, il est très facile de vérifier que $\Gamma_t(P_n) = 2 = 2\lfloor \frac{n+1}{3} \rfloor$. Ceci établit les cas de base. Soit $n \geq 5$, supposons que le résultat soit vrai pour tout chemin à k sommets, $2 \leq k < n$. Soit P le chemin $(v_1, v_2, \ldots v_n)$ d'ordre n et soit $P' = P - \{v_1, v_2, v_3\}$.

n	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$\Gamma_{\mathrm{p}}(P_n)$	2	2	2	4	4	4	6	6	8	8	8

TAB. 5.1 – $\Gamma_{\mathrm{p}}(P_n)$ pour $n \leq 12$.

On montre que $\Gamma_t(P) = \Gamma_t(P') + 2$. Tout dominant total minimal de P' peut être étendu en un dominant total minimal de P en lui ajoutant les sommets v_1 et v_2, donc $\Gamma_t(P) \geq \Gamma_t(P') + 2$. Pour montrer l'autre inégalité, choisissons un $\Gamma_t(P)$-dominant qui contient v_1 s'il en existe. v_2 est un sommet support et donc dans S. $v_3 \notin S$ ou v_1 n'aurait pas de voisin privé, contredisant l'observation 5.2.1. Dans ce cas, $S \setminus \{v_1, v_2\}$ est un dominant total minimum de P', donc $\Gamma_t(P) = |S| \leq \Gamma_t(P') + 2$.

Supposons maintenant que pour tout $\Gamma_t(P)$-dominant S, $v_1 \notin S$. Pour dominer v_2, il faut que $v_3 \in S$. Supposons que $v_4 \in \mathrm{pn}(v_3, S)$, alors $v_5 \notin S$. L'ensemble $D = S \setminus \{v_3\} \cup \{v_1, v_5\}$ est un dominant total de P de cardinal supérieur à $\Gamma_t(P)$, donc trop grand pour être minimal. S'il n'est pas minimal, cela signifie que v_5 domine un sommet qui était le seul voisin privé d'un sommet de S, c'est à dire que $n \geq 7$ et que v_6 est le seul voisin privé de $v_7 \in S$. Par conséquent, $D \setminus \{v_7\}$ est un dominant total minimal de P, de même cardinal que S donc maximum, et D contient v_1. Ceci contredit l'hypothèse qu'aucun $\Gamma_t(P)$-dominant ne contient v_1. Donc $v_4 \notin \mathrm{pn}(v_3, S)$, et $S \setminus \{v_2, v_3\}$ est un dominant total minimal de P'. Donc $\Gamma_t(P) = |S| \leq \Gamma_t(P')+2$. Finalement $\Gamma_t(P) = \Gamma_t(P')+2$, et par induction, pour tout $n \geq 2$, $\Gamma_t(P_n) = 2\lfloor \frac{n+1}{3} \rfloor$. □

Proposition 5.2.11 [24] *Pour tout chemin à $n \geq 2$ sommets,*

$$\Gamma_{\mathrm{p}}(P_n) = 8\lfloor \frac{n+1}{11} \rfloor + 2\lfloor \frac{(n+1) \bmod 11}{3} \rfloor .$$

Preuve : On prouve ceci par induction sur n. Pour $2 \leq n \leq 12$, il est facile de calculer $\Gamma_{\mathrm{p}}(P_n)$ (voir tableau 5.1).

Soit $n \geq 13$. Supposons que le résultat soit vrai pour tous les chemins de longueur inférieure à $n-1$. Soit P le chemin $(v_1, v_2, \ldots, v_n)$ de longueur $n-1$ et $P' = P - \{v_1, v_2, \ldots, v_1 1\}$.

On montre que $\Gamma_{\mathrm{p}}(P) = \Gamma_{\mathrm{p}}(P') + 8$. Tout paire-dominant minimal de P' peut être étendu en un paire-dominant minimal de P en ajoutant les sommets $\{v_1, v_2, v_3, v_4, v_7, v_8, v_9, v_1 0\}$, donc $\Gamma_{\mathrm{p}}(P) \geq \Gamma_{\mathrm{p}}(P') + 8$.

Montrons que $\Gamma_{\mathrm{p}}(P) \leq \Gamma_{\mathrm{p}}(P') + 8$. Soit S un $\Gamma_{\mathrm{p}}(P)$-dominant et $S' = S \cap V(P')$. Pour tout i, $1 \leq i \leq n$, on note $V_{\leq i}$ l'ensemble $\{v_k \mid 1 \leq k \leq i\}$ et $f(i) = 8\lfloor \frac{i+1}{11} \rfloor + 2\lfloor \frac{(i+1) \bmod 11}{3} \rfloor$. On remarque que pour tout $i \geq 2$, $f(i+1) \geq f(i) \geq f(i+1) - 2$. On considère 3 cas :

Premier cas : $v_{11} \in S$ et $v_{12} \in \mathrm{pn}(v_{11}, S)$. Alors $v_{13} \in S$. Tout d'abord, supposons que $v_{12} \notin S$. Alors S' est un paire-dominant minimal du chemin à

$n-12$ sommets $P'-\{v_{12}\}$ et $S\setminus S'$ est un paire-dominant minimal du chemin P_{12} induit par $V_{\leq 12}$. Donc $|S'| \leq \Gamma_{\mathrm{p}}(P_{n-12}) = f(n-12) \leq f(n-11) = \Gamma_{\mathrm{p}}(P')$ et $|S \setminus S'| \leq \Gamma_{\mathrm{p}}(P_{12}) = 8$, par conséquent, $\Gamma_{\mathrm{p}}(P) = |S| \leq \Gamma_{\mathrm{p}}(P') + 8$.

Supposons maintenant que $v_{12} \in S$. L'ensemble $S' \cup v_{11}$ est un paire-dominant minimal du chemin P_{n-10} induit sur $(V(P') \cup \{v_{11}\}$, donc on a $\Gamma_{\mathrm{p}}(P_{n-10}) \geq |S'| + |v_{11}| = |S| - |S \cap V_{\leq 10}|$. On constate que comme v_{11} et v_{12} sont dans S, $S \cap V_{\leq 10}$ ne peut pas être l'unique $\Gamma_{\mathrm{p}}(P_{10})$-dominant de cardinal 8. En effet, ce paire-dominant contient tous les sommets de P_{10} sauf les deux sommets centraux v_5 et v_6. Si $S \cap V_{\leq 10}$ contenait les mêmes sommets, v_{10} ne serait pas un voisin privé de v_9 et $S \setminus \{v_9, v_{10}\}$ serait aussi un paire-dominant de P, contredisant la minimalité de S. Donc $|S \cap V_{\leq 10}| \leq 6$ et $\Gamma_{\mathrm{p}}(P_{n-10}) \geq |S-6| = \Gamma_{\mathrm{p}}(P)-6$. Par hypothèse d'induction, $\Gamma_{\mathrm{p}}(P_{n-11}) = f(n-11) \geq f(n-10) - 2 = \Gamma_{\mathrm{p}}(P_{n-10}) - 2$, impliquant que $\Gamma_{\mathrm{p}}(P') \geq \Gamma_{\mathrm{p}}(P) - 8$.

Deuxième cas : $v_{12} \in S$ et $\mathrm{pn}(v_{12}, S) = \{v_{11}\}$. Alors, $v_{10} \notin S$. Donc $|S \cap V_{\leq 10}| \leq 6$, et donc $|S \setminus S'| \leq 7$ (il n'est pas impossible que $v_{11} \in S$). Grâce au premier cas, on peut supposer que si $v_{11} \in S$, $v_{12} \notin \mathrm{pn}(v_{11}, S)$. Avec cette hypothèse, on sait que $S' \setminus \{v_{12}\}$ est un paire-dominant minimal de P', et donc que $\Gamma_{\mathrm{p}}(P') \geq |S'|-1 = |S|-|S \setminus S'|-1 \geq |S|-8 = \Gamma_{\mathrm{p}}(P)-8$. Donc, encore une fois, $\Gamma_{\mathrm{p}}(P') \geq \Gamma_{\mathrm{p}}(P) - 8$.

Troisième cas : Supposons que nous ne sommes dans aucun des deux premiers cas. Donc si $v_{11} \in S$, alors $v_{12} \notin \mathrm{pn}(v_{11}, S)$ et si $v_{12} \in S$, alors $\mathrm{pn}(v_{12}, S) \neq \{v_{11}\}$. Ceci implique que S' est un paire-dominant minimal de P'. Dans le cas contraire, S' contient un sous-ensemble propre S'' qui paire-domine P', et $S'' \cup (S \setminus S')$ est un sous-ensemble propre de S qui paire-domine P, ce qui est contradictoire avec la minimalité de S. Donc $\Gamma_{\mathrm{p}}(P') \geq |S'| = |S| - |S \setminus S'|$. De plus, $|S \setminus S'| \leq 8$, et donc $\Gamma_{\mathrm{p}}(P') \geq |S| - 8 = \Gamma_{\mathrm{p}}(P) - 8$.

Dans chacun des trois cas, $\Gamma_{\mathrm{p}}(P') \geq \Gamma_{\mathrm{p}}(P) - 8$. On peut donc appliquer l'induction et obtenir le résultat voulu. □

Nous avons vu qu'en général, il n'y a pas de relation simple entre la domination totale supérieure et la paire-domination supérieure, c'est à dire que dans certains graphes, le nombre de paire-domination supérieure est supérieur au nombre de domination totale supérieure, et dans d'autres, c'est l'inverse. Nous allons montrer maintenant que ce n'est pas le cas des arbres. En particulier, on montre que tout arbre T non trivial vérifie $\Gamma_t(T) \leq \Gamma_{\mathrm{p}}(T)$.

Néanmoins, ce résultat ne découle pas totalement d'une inclusion des ensembles, comme c'est le cas dans la paire-domination et la domination totale (non supérieure). En effet, il est faux d'affirmer que tout dominant total minimal d'un arbre T est ou peut être complété en un paire-dominant minimal de T, ce qui permettrait d'obtenir notre inégalité. Par exemple, si je considère l'arbre construit en ajoutant à un chemin $(v_1, v_2, \ldots, v_{15})$ de longueur 14 trois sommets, connectés respectivement aux sommets v_3, v_8 et v_{13}, j'obtiens l'arbre de la figure 5.10. Cet arbre admet un dominant total

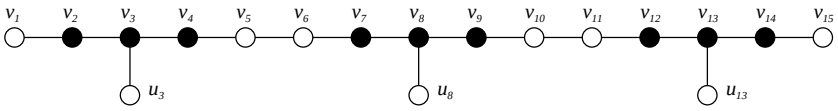


FIG. 5.10 – Un arbre ayant un dominant total minimal non inclus dans un paire-dominant minimal.

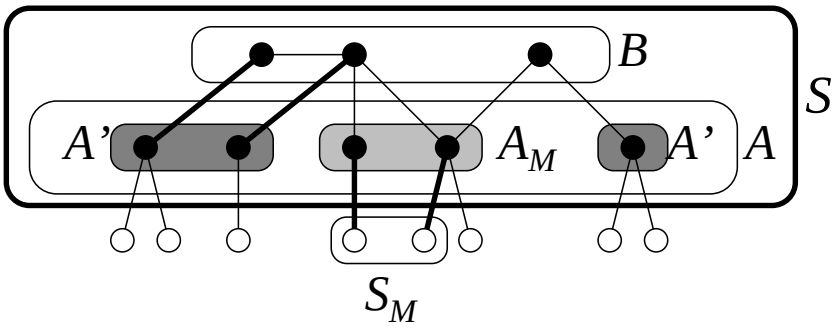


FIG. 5.11 – Les ensembles décrits dans le lemme 5.2.12.

minimal

$$S = \bigcup_{i=0}^{2} \{v_{5i+2}, v_{5i+3}, v_{5i+4}\}$$

qui ne peut pas être complété en un paire-dominant minimal de T. En effet, si on considère un paire-dominant D qui contient S, au plus un des sommets v_7 et v_9 est partenaire de v_8. Donc v_6 ou v_{10} est dans D. Mais alors, v_4 ou v_{12} n'a plus de voisin privé, et on ne peut plus former de paire-dominant minimal contenant S.

Nous commençons notre preuve par le lemme suivant :

Lemme 5.2.12 [24] *Soit T un arbre non trivial et S un dominant total minimal de T. Si $T[S]$ est connexe, alors soit S est un paire-dominant minimal de T, soit S peut être complété en un paire-dominant minimal de T.*

Preuve : Si $|S| = 2$, le résultat est évident. Supposons que $|S| \geq 3$. Tout au long de la preuve, on pourra se référer à la figure 5.11. Comme $T[S]$ est connexe et T est un arbre, on observe que tout sommet de $V \setminus S$ est une feuille de T. Soit A le plus petit sous-ensemble de S qui domine $V \setminus S$. Tout sommet de A a une feuille comme voisin, donc tout sommet de A est un sommet support de T. Pour tout sommet $a \in A$, on choisit un unique sommet $a' \in V \setminus S$ voisin de a, on a $a' \in \text{epn}(a, S)$.

Soit $B = S \setminus A$. Soit $b \in B$. On a $\text{epn}(b, S) = \emptyset$. D'après l'observation 5.2.1, $\text{ipn}(b, S) \neq \emptyset$. Soit $b' \in \text{ipn}(b, S)$, b est le seul voisin de b' dans

$T[S]$. Si $b' \in B$, alors le sommet b' est une feuille de T car il n'a pas de voisin dans $V \setminus S$, mais alors comme $|S| \geq 3$, $S \setminus \{b\}$ est aussi un dominant total de T, ce qui contredit la minimalité de S. Donc $b' \in A$. Soit

$$A' = \bigcup_{b \in B} \{b'\} \subseteq A\,.$$

On a $|A'| = |B|$, et tout sommet de A' est de degré 1 dans $T[S]$ et est le voisin privé interne d'un sommet de B. Soit M un couplage maximum dans $T[S]$. Si M est un couplage parfait de $T[S]$, alors S est un paire-dominant de T, et le résultat est vrai. Supposons qu'il existe au moins un sommet qui n'est pas couplé. Si un sommet $b \in B$ n'est pas couplé, alors son voisin privé $b' \in A'$ n'est pas couplé non plus. $M \cup \{bb'\}$ est alors un couplage de $T[S]$, ce qui contredit la maximalité de M. Donc tout sommet de B est couplé. De plus, on peut choisir un couplage maximum M tel que $bb' \in M$ pour tout $b \in B$ (si $e \neq bb'$ est une arête de M incidente à b, on la remplace par bb' en gardant un couplage de même cardinal). Soit A_M l'ensemble de tous les sommets de S non couplés par M. On a $A_M \subseteq A'$. Soit

$$S_M = \bigcup_{a \in A_M} \{a'\}\,.$$

Tout sommet de S_M est un voisin privé externe d'un sommet de A_M. De plus, $|S_M| = |A_M|$ et $N(S_M) = A_M$. Soit $D = S \cup S_M$. Comme S domine T, D aussi. Par construction, $T[D]$ admet un couplage parfait, à savoir M auquel on ajoute les arêtes joignant A_M et S_M. D est donc un paire-dominant de T. Il nous reste à montrer qu'il est minimal. Supposons que ce ne soit pas le cas, donc qu'il existe un sous-ensemble propre $D' \subset D$ qui soit un paire-dominant de T. D'après l'observation 5.2.3, D' contient l'ensemble A de sommets supports de T. S'il existe un sommet $b \in B$ qui ne soit pas dans D', alors son voisin privé $b' \in A \subseteq D'$ est isolé dans $T[D']$, ce qui est impossible pour un paire-dominant. Donc $S \subseteq D'$ et $D \setminus D' \subseteq S_M$. Soit $C = D' \cap S_M$ et soit $A_C = N(C)$. On a $|A_C| = |C| < |A_M|$. Soit M' un couplage parfait de $T[D']$. Comme tout sommet de C est une feuille, le couplage contient nécessairement les arêtes joignant C aux sommets de A_C. Donc la restriction du couplage M' au sous-graphe $T[S \setminus A_C]$ est un couplage dans $T[S]$, qui couple $|S| - |A_C| > |S| - |A_M|$ sommets de S, ce qui contredit le fait que M, qui couple $|S| - |A_M|$, est un couplage maximum de $T[S]$. On en déduit donc que D est un paire-dominant minimal de T. □

Nous pouvons maintenant montrer notre résultat principal sur les arbres :

Théorème 5.2.13 [24] *Pour tout arbre T non trivial, $\Gamma_t(T) \leq \Gamma_{\mathrm{p}}(T)$.*

Preuve : Nous allons procéder par induction sur le nombre de sommets $n \geq 2$ de l'arbre T. Si $n = 2$, alors $\Gamma_t(T) = \Gamma_{\mathrm{p}}(T) = 2$, ce qui nous donne le cas de base. Supposons maintenant que $n \geq 3$ et que pour tout arbre T'

d'ordre n', $1 < n' < n$, le résultat soit vrai : $\Gamma_t(T') \leq \Gamma_{\mathrm{p}}(T')$. Soit T un arbre d'ordre n. Soit S un dominant total minimal d'ordre maximum de T. Si $T[S]$ est connexe, alors le résultat se déduit du lemme 5.2.12. Supposons donc que $T[S]$ n'est pas connexe et comporte $k \geq 2$ composantes connexes.

On note $S_1, \ldots, S_k$ les sous-ensembles de sommets de S sur lesquels sont induits les composantes connexes. Soit $V_1, \ldots, V_k$ une partition de $V(T)$ telle que pour tout i, $1 \leq i \leq k$, $S_i \subseteq V_i$ et S_i domine V_i dans T : $V_i \subseteq N[S_i]$. Une telle partition existe car S domine $V(T)$, mais elle n'est pas forcément unique. Pour tout i, $1 \leq i \leq k$, soit $T_i = T[V_i]$. Chaque T_i est connexe, car dominé par un ensemble connexe, donc chaque T_i est un arbre. On construit un nouveau graphe F d'ordre k dont chaque sommet représente l'un des arbres T_i et dont deux sommets sont adjacents si et seulement si les T_i correspondants sont reliés par une arête de T. T étant un arbre, on vérifie sans mal que F est un arbre. En renommant les T_i si nécessaire, on peut supposer que T_1 correspond à une feuille de F.

Soit $T' = T - V(T_1)$, et soit $S' = S \cap V(T') = S \setminus S_1$. Soit $e = uv$ l'arête de T allant de T_1 à T', avec $u \in V(T_1)$ et $v \in v(T')$. T_1 correspondant à une feuille de F, T' est un arbre. De plus, S_1 est un dominant total minimal de T_1, $T_1[S_1]$ est connexe, et tout sommet de $V(T_1) \setminus S_1$ est une feuille de T_1. Nous allons diviser le problème en 3 cas.

Premier cas : $u \in S_1$. Alors $v \in V(T') \setminus S'$. Considérons la forêt $T' - v$. Chaque composante connexe de $T'-v$ contient au moins deux sommets de S'. Comme v est dominé par S_1 et par S', le sommet v n'est pas un S-voisin privé d'aucun sommet. Donc tout S-voisin privé d'un sommet de S' dans le graphe T est aussi un S'-voisin privé de ce sommet dans $T' - v$, impliquant que S' est un dominant total minimal dans $T' - v$, et donc que $\Gamma_t(T' - v) \geq |S'|$. Tout Γ_t(T'-v)-dominant peut être étendu en un dominant total minimal de T en lui ajoutant S_1, donc $|S| = \Gamma_t(T) \geq \Gamma_t(T'-v)+|S_1| \geq |S'|+|S_1| = |S|$. On doit avoir l'égalité tout au long de cette chaîne d'inégalité, et donc en particulier, $\Gamma_t(T' - v) = |S'|$. Grâce à l'hypothèse d'induction appliquée à chaque composante connexe de la forêt $T' - v$, on a $\Gamma_t(T' - v) \leq \Gamma_{\mathrm{p}}(T' - v)$. Soit P' un $\Gamma_{\mathrm{p}}(T' - v)$-dominant. On a $|P'| \geq |S'|$. D'après le lemme 5.2.12, il existe un paire-dominant minimal de T_1 égal à S_1 ou le contenant, notons cet ensemble S'_1. Alors, $P' \cup S'_1$ est un paire-dominant minimal de T, et on a $\Gamma_{\mathrm{p}}(T) \geq |P'| + |S'_1| \geq |S'| + |S_1| = |S| = \Gamma_t(T)$. Donc $\Gamma_{\mathrm{p}}(T) \geq \Gamma_t(T)$, comme souhaité.

Deuxième cas : $u \notin S_1$ et $v \in S'$. Dans ce cas, $u \notin \mathrm{pn}(v, S)$ donc S' est un dominant total minimal de T', et $\Gamma_t(T') \geq |S'|$. Tout dominant total minimal de T' peut être étendu en un dominant total minimal de T en lui ajoutant l'ensemble S_1. Par conséquent, $|S| = \Gamma_t(T) \geq \Gamma_t(T')+|S_1| \geq |S'|+|S_1| \geq |S|$, et en particulier, $\Gamma_t(T') = |S'|$. En appliquant l'hypothèse d'induction à l'arbre T', on a $\Gamma_t(T') \leq \Gamma_{\mathrm{p}}(T')$. Soit P' un $\Gamma_{\mathrm{p}}(T')$-dominant, $|P'| \geq |S'|$. Comme à la fin du premier cas, avec le lemme 5.2.12, on prends S'_1 un paire-dominant minimal de T_1 égal ou contenant S_1. Alors, $P' \cup S'_1$ est un

paire-dominant minimal de T, et on a $\Gamma_{\mathrm{p}}(T) \geq |P'| + |S'_1| \geq |S'| + |S_1| = |S| = \Gamma_t(T)$. Donc $\Gamma_{\mathrm{p}}(T) \geq \Gamma_t(T)$, comme souhaité.

Troisième cas : $u \notin S_1$ et $v \notin S'$. D'une part, si v n'est pas le S-voisin privé d'un sommet de S, alors tout S-voisin privé d'un sommet de S' dans T est aussi un S'-voisin privé d'un sommet de S' dans $T' - v$, donc S' est un dominant total minimal de $T' - v$. D'autre part, si $v \in \mathrm{epn}(v', S)$ dans T, pour un certain v' dans S', alors soit l'ensemble S' (si $\mathrm{pn}(v', S) \neq \{v\}$), soit $S' \setminus \{v'\}$ est un dominant total minimal de $T' - v$. Dans les deux cas, on peut déduire que $\Gamma_t(T' - v) \geq |S'| - 1$. En appliquant l'hypothèse d'induction à chaque composante connexe de la forêt $T' - v$, on vérifie que $\Gamma_t(T' - v) \leq \Gamma_{\mathrm{p}}(T' - v)$. Soit P' un $\Gamma_{\mathrm{p}}(T' - v)$-dominant. On a $|P'| \geq |S'| - 1$.

Comme le lemme 5.2.12 en montre la possibilité, soit $P_1 \supseteq S_1$ un paire-dominant minimal de T_1. Si $u \in P_1$, alors $|P_1| = |S_1| + 1$ et l'ensemble $P' \cup P_1$ est un paire-dominant minimal de T, ce qui nous donne $\Gamma_{\mathrm{p}}(T) \geq |P'| + |P_1| \geq (|S'| - 1) + (|S_1| + 1) = |S| = \Gamma_t(T)$, comme souhaité. Supposons donc désormais que $u \notin P_1$. Soit $x \in S_1$ le sommet qui domine u, et y son partenaire dans P_1. On considère deux cas, selon la parité de $|S'|$.

- **Si $|S'|$ est pair :** Alors, $|P'| \geq |S'| - 1$, or comme $|P'|$ est pair, $\Gamma_{\mathrm{p}}(T' - v) = |P'| \geq |S'|$. Si P' domine v, alors $P' \cup P_1$ est un paire-dominant minimal de T, et $\Gamma_{\mathrm{p}}(T) \geq |P'| + |P_1| \geq |S'| + |S_1| = |S| = \Gamma_t(T)$, comme souhaité. Supposons donc que P' ne domine pas v. Considérons l'ensemble P_1, si $\mathrm{epn}(y, P_1) = \emptyset$, alors en remplaçant y par le sommet u, on obtient un paire-dominant minimal de T_1. On lui ajoute l'ensemble P' pour obtenir un paire-dominant minimal de T, ce qui nous donne encore une fois $\Gamma_{\mathrm{p}}(T) \geq |P'| + |P_1| \geq |S'| + |S_1| = |S| = \Gamma_t(T)$. En revanche, si $|\mathrm{epn}(y, P_1)| \geq 1$, alors y a pour voisin une feuille $y' \in \mathrm{epn}(y, P_1)$ qui n'est pas dans P_1. Soit $D' = (P_1 \cup \{u, y'\}) \cup P'$. D' est un paire-dominant minimal de T car u et x sont couplés, de même que y et y', et $u \in \mathrm{ipn}(x, D')$, $v \in \mathrm{epn}(u, D')$, $y' \in \mathrm{ipn}(y, D')$. Donc $\Gamma_{\mathrm{p}}(T) \geq |D'| \geq |S| + 2 = \Gamma_t(T) + 2$. De nouveau, $\Gamma_{\mathrm{p}}(T) \geq \Gamma_t(T)$, comme souhaité.
- **Si $|S'|$ est impair :** Comme S' est un dominant total minimal de T', $\Gamma_t(T') \geq |S'|$. En appliquant l'hypothèse d'induction à l'arbre T', on sait que $\Gamma_{\mathrm{p}}(T') \geq \Gamma_t(T')$ donc $\Gamma_{\mathrm{p}}(T') \geq |S'| + 1$. Soit D' un $\Gamma_{\mathrm{p}}(T')$-dominant, si $v \notin D'$, alors $D' \cup P_1$ est un paire-dominant minimal de T, et donc $\Gamma_{\mathrm{p}}(T) \geq |D'| + |P_1| \geq |S'| + 1 + |S_1| = |S| + 1 = \Gamma_t(T) + 1$, comme souhaité. Supposons en revanche que $v \in D'$. Dans l'arbre $T'_1 = T_1 - u$, si u était le seul S-voisin privé d'un sommet $x \in S_1$, alors $S_1 \setminus \{x\}$ est un dominant total minimal de T'_1 ; sinon, $\mathrm{pn}(x, S) \geq 2$, l'ensemble S_1 est un dominant total minimal de T'_1. Par conséquent, $\Gamma_t(T'_1) \geq |S_1| - 1$. En appliquant l'hypothèse d'induction à l'arbre T'_1, on obtient $\Gamma_{\mathrm{p}}(T'_1) \geq \Gamma_t(T'_1) \geq |S_1| - 1$. Tout $\Gamma_{\mathrm{p}}(T'_1)$-dominant peut être complété en un paire-dominant minimal de T en lui ajoutant l'ensemble D', d'où $\Gamma_{\mathrm{p}}(T) \geq |D'| + \Gamma_{\mathrm{p}}(T'_1) \geq (|S' + 1) + (|S_1| - 1) =$

$|S| = \Gamma_t(T)$, ce que l'on cherchait à obtenir.
Dans tous les cas étudiés, on a pu conclure que $\Gamma_{\mathrm{p}}(T) \geq \Gamma_t(T)$, on peut donc appliquer l'induction pour obtenir notre théorème. □

Ce résultat, sans doute le plus intéressant de cette partie, la conclut. Il est intéressant de remarquer combien la domination totale supérieure et la paire-domination supérieure peuvent être différente, alors que les problèmes d'ensembles minimums sont si proches l'un de l'autre.

5.3 Perspectives

Au cours de ce chapitre, nous avons tenté de fournir des bornes à la domination grâce à des conditions structurelles.

En premier lieu, nous avons étudié la paire-domination, à la suite des travaux de Favaron et Henning sur les graphes cubiques sans griffes. Nous avons montré que nous pouvions donner des bornes bien plus satisfaisantes que celles du cas général en considérant la taille de la plus grande étoile induite. Cependant, tous les graphes atteignant la borne que nous proposons contiennent une étoile subdivisée. Par conséquent, il nous a paru judicieux d'exclure l'étoile subdivisée. C'est ce que nous avons fait en excluant le P_5 induit, qui est l'étoile subdivisée à deux branches. Il reste à étudier les étoiles subdivisées plus grandes. Il est probablement possible de trouver une borne en fonction de la taille de la plus grande étoile subdivisée induite, comme nous l'avons fait pour l'étoile simple. En outre, il serait très profitable de caractériser précisément les graphes pour lesquels ces bornes sont atteintes.

Plus généralement, beaucoup d'études de la domination ont été faites en excluant des sous-graphes induits. Pourtant, il n'y a pas de relation directe entre le nombre de domination d'un graphe et le nombre de domination de ses sous-graphes, contrairement à la coloration. Par conséquent, cette approche n'est peut-être pas la plus pertinente pour étudier la domination. Récemment, Böhme et Mohar [6] ont étudié la domination en fonction de mineurs exclus. Cette autre approche est intéressante, car elle revient à exclure une infinité de sous-graphe, et donne une information structurelle globale sur le graphe. Cette recherche est récente (2003), et il y a sans doute des choses à faire dans cette optique.

Chapitre 6

Une présentation ludique du problème : la chasse à la bête

6.1 Présentation

Les problèmes d'empilement et de recouvrement que nous avons étudiés tout au long de cette thèse peuvent aussi être présentés sous une toute autre forme, celle d'un jeu : *la chasse à la bête*. Ce jeu combinatoire a été proposé par Éric Duchène, et est inspiré du problème d'exclusion des pentominos. Il a été utilisé de nombreuses fois par les membres de l'ERTé "Maths à Modeler" lors d'opérations de vulgarisation et dans des classes.

Tel qu'il est présenté dans ces situations, le jeu se joue sur une grille. On décide d'abord de la forme de la bête à chasser, c'est à dire d'un polymino. Ensuite, le joueur choisi un ensemble de cases de la grille où il place des pièges. Son but est d'empêcher la bête de se poser : il faut que pour toute position de la bête sur la grille, elle couvre au moins une case contenant un piège. Il existe toujours une solution, puisqu'en plaçant des pièges sur chaque case, on est sûr de piéger toute bête. L'enjeu est de minimiser le nombre de pièges.

Si l'on autorise la bête à prendre plusieurs formes, le problème devient alors une généralisation du *problème d'exclusion des pentominos*, proposé par Solomon W. Golomb dans [34]. Ce problème peut être énoncé ainsi :

> Quel est le nombre minimum $\kappa_{k,n}$ de *pièges* à placer sur la grille $k \times n$ pour exclure tout pentomino ?

Ce problème a été étudié par Bosch [7, 8] qui a proposé un programme linéaire en nombre entier pour calculer $\kappa_{n,n}$ quand $n \leq 12$. Plus tard, Gravier, Moncel et Payan [39, 38] ont donné $\kappa_{k,n}$ pour $k \leq 5$ et n quelconque.

Dans le cas particulier où on choisit comme bête un pentomino en forme de "+", le problème correspond au problème de *domination* dans les graphes. Cela résulte du fait que le "+" est le voisinage étendu d'un sommet dans la grille.

6.2 Quelques résultats

Ce qui est particulièrement intéressant dans ce problème, c'est que nous pouvons facilement utiliser la dualité de ce problème avec le problème d'empilement pour obtenir des résultats. Formulé dans le contexte de la chasse à la bête, nous pouvons affirmer le lemme :

Lemme 6.2.1 *Soit P un polymino (une forme de bête) et G une grille. Si on peut placer x polyminos P sur la grille G sans qu'il ne se chevauchent, alors il faut au moins x pièges pour chasser la bête P sur G.*

Preuve : Supposons que l'on ai placé x polymino P sur la grille, sans qu'il ne se chevauchent. Soient $p_1, \dots p_x$ les ensembles de sommets correspondant à ces positions, $p_i \cap p_j = \emptyset$ pour tout $i \neq j$, $1 \leq i, j \leq x$. Soit un ensemble S quelconque de sommets, de cardinal inférieur à x, où l'on place des pièges. Par le principe des cages à pigeons, il existe un ensemble p_i, $1 \leq i \leq x$ tel que $p_i \cap S = \emptyset$. Par conséquent, on peut poser une bête sur cet ensemble de sommets p_i. □

Nous allons ici caractériser le nombre optimum de pièges à placer sur les grilles rectangulaires pour chasser les bêtes recouvrant moins de 5 cases.

Tout d'abord, quand la bête recouvre 2 cases (domino), le résultat est très facile :

Théorème 6.2.2 *Pour chasser le domino sur une grille $m \times n$, une solution optimale comprend $\lfloor \frac{mn}{2} \rfloor$ pièges.*

Il existe deux formes de trimino. Le premier, que nous appellerons *trimino droit*, est constitué de trois cases alignées. Le second forme un "L", nous l'appellerons *trimino coudé*.

Théorème 6.2.3 *Soient $m \geq n$ deux entiers positifs.*

- *Pour chasser le trimino droit sur une grille $m \times n, m \geq 3$, une solution optimale comprend $\lfloor \frac{mn}{3} \rfloor$ pièges.*
- *Pour chasser le trimino coudé sur une grille $m \times n$, une solution optimale comprend $\min(\lfloor \frac{n}{2} \rfloor m, \lfloor \frac{m}{2} \rfloor n)$ pièges.*

Preuve : La preuve de la première assertion est facilement vérifiable par dualité. Un ensemble de pièges optimal est l'ensemble $\{(x_i, x_j) \mid i + j \equiv 1 \pmod 3, 1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n\}$ (voir figure 6.2, partie gauche). La figure 6.1 montre comment faire des empilements de triminos droits de cardinal $\lfloor \frac{mn}{3} \rfloor$.

La preuve de la deuxième assertion est un peu plus subtile. Voici d'abord deux ensembles, de cardinaux respectifs $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor m$ et $\lfloor \frac{m}{2} \rfloor n$, qui chassent le trimino coudé sur la grille $m \times n$ (voir figure 6.2, partie droite). :

$$\{(x_i, x_j) \mid i \text{ pair}, 1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq m\}$$
$$\{(x_i, x_j) \mid j \text{ pair}, 1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq m\}$$

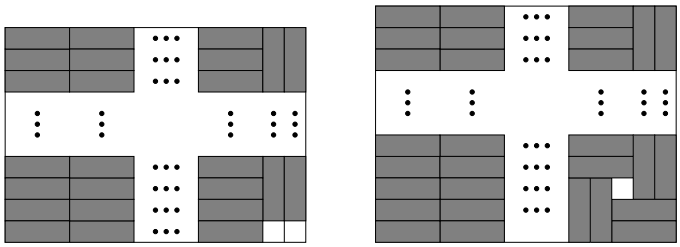


FIG. 6.1 – Un empilement de $\lfloor \frac{mn}{3} \rfloor$ trimino droit sur une grille $m \times n$. Le cas où m ou n n'est pas congru à 2 mod 3 se déduit de la figure de gauche, le cas où m et n sont congrus à 2 mod 3 est présenté sur la figure de droite.

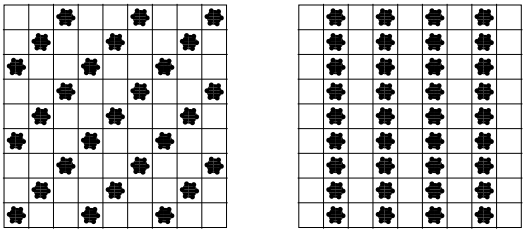


FIG. 6.2 – Pour $m = n = 9$, un ensemble de pièges qui chassent le trimino droit à gauche, le trimino coudé à droite.

On constate sans peine que ces ensemble chassent bien le trimino coudé, car un trimino coudé couvre nécessairement des sommets sur 2 lignes et deux colonnes consécutives.

Pour prouver que l'une de ces solutions est optimale, il nous faut d'abord remarquer que sur une grille 2×2, il faut nécessairement 2 sommets pour chasser le trimino coudé. Sur une grille $m \times n$, on peut placer $\lfloor \frac{m}{2} \rfloor \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ carrés 2×2, ce qui suffit à montrer l'optimalité dans le cas où m ou n est pair. Il reste le cas où m et n sont impairs. Supposons sans perte de généralité que $n \leq m$. Dans la figure 6.3, on voit comment on peut placer $\lfloor \frac{m}{2} \rfloor \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$

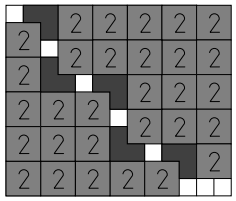
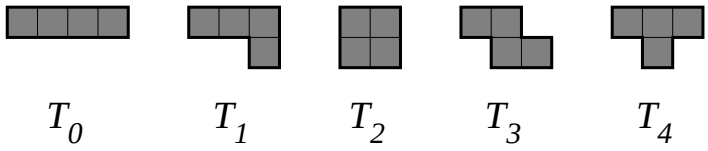


FIG. 6.3 – Un découpage de carrés 2×2 et de triminos coudés sur la grille 13×11.

carrés 2×2 de telle façon qu'il reste une bande non couverte au milieu, dans laquelle on peut placer $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ trimino coudés. Sur chaque carré il est nécessaire de placer 2 pièges, sur chaque trimino, il faut en placer un, et on obtient donc la borne voulue. □

Il existe 5 tétraminos différents, représentés sur la figure suivante :



Théorème 6.2.4 *Soient $m \geq n$ deux entiers positifs.*

- *Pour chasser le tétramino T_0 sur une grille $m \times n, m \geq 4$, une solution optimale comporte $\lfloor \frac{mn}{4} \rfloor$ pièges.*
- *Pour chasser le tétramino T_1 sur une grille $m \times n, m, n \geq 2$, une solution optimale du trimino long (avec $\lfloor \frac{mn}{3} \rfloor$ pièges) est aussi une solution optimale.*
- *Il existe une solution optimale commune pour chasser les tétraminos T_2 et T_3 sur une grille $m \times n$ qui comprend $\lfloor \frac{m}{2} \rfloor \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ pièges.*
- *Pour chasser la bête T_4 sur la grille $m \times n$, le nombre $\mathcal{O}$ de sommets d'une solution optimale vérifie $\frac{nm-n-m}{3} \leq \mathcal{O} \leq \lceil \frac{nm}{3} \rceil - 1 - \mathcal{E}$ sommets, avec $\mathcal{E} = 1$ si $n \equiv m \bmod 3$ et 0 sinon.*

Preuve : Un ensemble optimal chassant le tétramino T_0 est par exemple $\{(x_i, x_j) \mid i + j \equiv 1 \pmod 4, 1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n\}$. La preuve de son optimalité se fait de façon tout à fait similaire à la preuve de l'optimalité de l'ensemble chassant le trimino droit.

Chasser le trimino T_1 quand m et n sont supérieurs à 1 revient à chasser le trimino droit. Il est évident qu'un ensemble chassant le trimino droit chasse aussi le tétramino T_1. Pour montrer la réciproque, on vérifie manuellement qu'il faut au moins 2 pièges sur un rectangle 2×3 et 3 pièges sur un rectangle 3×3, et on utilise ensuite la même construction que sur la figure 6.1 en groupant les rectangles 1×3 en rectangles 2×3 et 3×3 comme il faut.

Pour chasser les tétraminos T_2 et T_3, on prend l'ensemble $\{(x_i, x_j) \mid i, j$ pairs, $1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n\}$. Clairement, cet ensemble a pour cardinal $\lfloor \frac{m}{2} \rfloor \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$. On vérifie facilement que cet ensemble chasse bien T_2 et T_3. Pour vérifier qu'il est optimal pour T_2, il suffit de constater qu'un empilement maximum de T_2 sur la grille $m \times n$ comporte $\lfloor \frac{m}{2} \rfloor \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ T_2. Pour vérifier qu'il est optimal pour T_3, on peut d'abord observer que dans un rectangle 2×4, il faut au moins 2 pièges, que dans un rectangle 2×6, il en faut au moins 3, après quoi il suffit de partitionner les sommets de la grille en de tels ensembles pour obtenir le résultat souhaité.

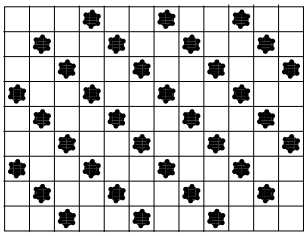


FIG. 6.4 – L'ensemble qui chasse le tétramino T_4 sur la grille 6×9.

Pour chasser le tétramino T_4 sur une grille $m \times n$, on, peut utiliser l'ensemble $S \setminus \{(x_1, x_1), (x_m, x_n)\}$ (voir figure 6.4) avec :

$$S = \{(x_i, x_j) \mid i - j \equiv 0 \bmod 3, 1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n\}.$$

L'ensemble S a pour cardinal $\lceil \frac{nm}{3} \rceil$. Or (x_1, x_1) est toujours dans S, mais (x_m, x_n) n'est dans S que si $n \equiv m \bmod 3$. Donc cet ensemble comporte $\lceil \frac{nm}{3} \rceil - 1 - \mathcal{E}$ pièges, avec $\mathcal{E} = 1$ si $n \equiv m \bmod 3$ et 0 sinon. Ceci nous donne la borne supérieure.

Pour prouver la borne inférieure, nous formulerons le problème légèrement différemment. Soit S un ensemble qui chasse le tétramino T_4 sur la grille $m \times n$. On note a_i, $1 \leq i \leq m$ le nombre de sommets de S sur la $i$ème ligne. S'il est impossible de poser un tétramino T_4, alors toute case de la grille pas dans S a au plus 2 cotés qui donnent sur un sommet qui n'est pas dans S. Sur la 1ère ligne, il y a $n - a_1$ cases qui sont hors de S, donc qui ont au plus 2 voisins hors de S. Il y a au plus a_2 cotés de ces cases donnant sur une case de S dans la ligne 2 , au plus $2a_1$ cotés donnant sur une case de S dans la ligne 1, et enfin $2 + (n - a_1)$ côtés donnant sur l'extérieur de la grille. Donc $a_2 + 2a_1 + 2 + (n - a_1) \geq 2(n - a_1)$. Par conséquent, $a_2 + 3a_1 \geq n - 2$. En procédant de même sur les autres lignes, on obtient finalement $a_{i-1} + a_{i+1} + 4a_i \geq 2n - 2$ pour $1 < i < m$ et $a_{m-1} + 3a_m \geq n - 2$. Si on somme toutes ces équations, on obtient $6 \sum_{i=1}^{m} a_i - a_1 - a_m \geq 2(nm - n - m)$. Comme tous les a_i sont positifs et $\sum_{i=1}^{m} a_i = |S|$, on en déduit $|S| \geq \frac{nm-n-m}{3}$. □

Conclusion

Au cours de cette thèse, nous avons étudié plusieurs problèmes de codes et de domination.

Dans le chapitre 2, nous avons commencé par étudier deux généralisations des problèmes de codes correcteurs d'erreur. La première est une généralisation commune aux codes parfaits de Hamming et de Lee. Ces métriques peuvent être définies comme produit du graphe complet et du cycle, respectivement. On montre des résultats d'existence et d'inexistence de certains codes parfaits sur des structures définies comme le produit mixte de K_2 et de cycles. Néanmoins, nos résultats ne sont encore que partiels. Il serait intéressant d'étudier l'existence de codes dans tous les cas que nous n'avons pas completés. Une autre perspective serait d'étudier une généralisation encore plus large des problèmes de codes de Hamming et de Lee, en étudiant l'existence de codes parfaits sur des produits de cliques et de cycles de tailles quelconques.

Ensuite, nous nous sommes intéressés à une version pondérée des codes parfaits dans la métrique de Lee, appelée (a, b)-codes. Pour ces codes encore, nous proposons des résultats d'existence ainsi que des résultats d'inexistence de tels codes. Il reste encore de nombreuses situations à étudier, et on pourrait en particulier tenter de résoudre les cas des $(0, b)$-codes et des $(1, b)$-codes. Pour les premiers, nous conjecturons qu'il n'existe un $(0, b)$-code en dimension d si et seulement si b divises $2d$. Pour les seconds, il serait intéressant d'étudier en particulier les $(1, b)$-codes quand b est pair.

Dans la seconde partie, nous avons étudié différentes variantes de la domination dans les graphes. Le chapitre 4 est consacré à l'étude de la domination dans les produits de graphes. Ce travail s'inscrit dans les recherches liées à la résolution de la conjecture de Vizing. Nous avons commencé par fournir quelques nouvelles bornes sur le nombre de domination totale du produit direct de graphes en fonction d'autres paramètres de domination.

Une notion de domination itérée fait l'objet de recherches récentes, sous le nom de domination de puissance. Complétant largement le travail de Dorfling et Henning sur le produit cartésien de chemin, nous déterminons le cardinal optimal d'un dominant de puissance pour les autres produits de chemins. Il serait intéressant d'étendre ce résultat au produit d'autres graphes

que les chemins, en commençant par les cycles, les arbres, et caetera...

Enfin, nous avons prouvé une inégalité similaire à celle de la conjecture de Vizing pour la domination totale supérieure, montrant que le nombre de domination totale supérieure du produit cartésien de deux graphes est au moins le double du produit de ceux des facteurs. Par la même occasion, nous avons pu montrer que le nombre de domination totale supérieure d'un graphe est au plus le double de son nombre de domination supérieure. Nous avons montré un certain nombre de propriétés des graphes vérifiant l'égalité, mais nous n'avons pas encore réussi à les caractériser complètement.

Dans le chapitre 5, nous abordons des questions structurelles sur l'existence de dominants de petit cardinal selon les classes de graphes. En ce qui concerne la paire-domination, Henning et Favaron ont adopté cette approche pour la classe des graphes cubiques sans griffes. Nous étendons ces résultats dans la famille des graphes sans étoiles de taille fixée. Haynes et Slater ont caractérisé les graphes dans lesquels tous les paire-dominants contiennent tous les sommets sauf un : il s'agit essentiellement des étoiles subdivisées. C'est donc naturellement que nous avons donné une borne supérieure pour la paire-domination dans les graphes sans P_5, l'une des plus petites d'entre elles. De plus, nous avons montré que cette borne est atteinte pour une famille infinie de graphes. Il serait très intéressant de généraliser ce résultat pour des étoiles subdivisées plus grandes, et on pourrait même espérer un résultat général comme nous l'avons proposé pour les étoiles.

Les problèmes de domination supérieure ont attiré l'attention dernièrement. Comme un grand nombre de paramètres de domination sont étudiés par la communauté, il parait important de les relier entre eux. C'est dans cette optique que nous avons étudié les liens entre la domination totale supérieure et la paire-domination supérieure, en particulier dans le cas des arbres.

Enfin, l'étude structurelle de la domination pourrait sans doute être approfondies en étudiant les graphes en fonction de mineurs exclus. Cette approche, adoptée récemment par Böhme et Mohar [6], est intéressante car elle revient à exclure une infinité de sous-graphe, et donne une information structurelle globale sur le graphe.

Bibliographie

[1] R. Aharoni et T. Szabó, *Vizing's Conjecture for chordal graphs*, soumis.

[2] A.M. Barcalkin et L.F. German, *The external stability number of the cartesian product of graphs*, Bul. Akad. Shtiince RSS Moldoven 1 (1977), 15–21, 93.

[3] T.L. Baldwin, L. Mili, M.B. Boisen Jr., et A. Adapa, *Power system observability with minimal phasor measurement placement*, IEEE Trans. Power Syst. 8 (1993), 707–715.

[4] C. Berge, *Theory of graphs and its applications*, Methuen, London (1962).

[5] N. Biggs, *Perfect codes in graphs*, J. Combin. Theory Ser. B 15 (1973), 289–296.

[6] T. Böhme et B. Mohar, *Domination, packing and excluded minor*, Electronic J. Combin. 10 (2003), #N9.

[7] R.A. Bosh, *A Pentomino Exclusion Problem*, Mathematical Programming Newsletter, Optima 60(3) (dec. 1998).

[8] R.A. Bosh, *Peaceably coexisting armies of queens*, Mathematical Programming Newsletter, Optima 62(6) (jun. 1999).

[9] B. Brešar, *Vizing-like conjecture for the upper domination of Cartesian products of graphs - the proof*, Electronic J. Combin. 12 (2005), #N12.

[10] B. Brešar, S. Klavžar et D. Rall, *Dominating direct product of Graphs*, Discrete Math. 307 (2007) 1636-1642.

[11] B. Brešar, S. Klavžar et D. F. Rall, *Dominating direct products of graphs*, soumis.

[12] M. Chellali et T.W. Haynes, *Total and paired-domination numbers of a tree*, AKCE Int. J. Graphs Comb. 1 (2004), 69–75.

[13] M. Chellali et T.W. Haynes, *On paired and double domination in graphs*, Utilitas Math. 67 (2005), 161–171.

[14] W.E. Clark et S. Suen, *An Inequality Related to Vizing's Conjecture*, Elec. J. Combinatorics 7 (2000), N4.

[15] E.J. Cockayne, R.M. Dawes et S.T. Hedetniemi, *Total domination in graphs*, Networks 10 (1980), 211–219.

[16] E.J. Cockayne et S.T. Hedetniemi, *Towards a theory of domination in graphs*, Networks 7 (1977), 247–261.

[17] G. Cohen, I. Honkala, S. Litsyn et A. Lobstein, *Covering Codes* (1997), Elsevier.

[18] G.D. Cohen, I.S. Honkala, S. Litsyn et H.F. Mattson, Jr., *Weighted coverings and packings*, IEEE Trans. Inform. Th. 41 (1995), 1856–1967

[19] C.F. De Jaenisch, *Traité des applications de l'analyse mathématique au jeu des échecs*, Saint Petersbourg (1862).

[20] P. Dorbec et S. Gravier, *On open packings and total coverings of two-dimensionnal grid graphs*, Geombinatorics vol XV (4) (2006), 160–165.

[21] P. Dorbec et S. Gravier, *Paired-domination in P_5-free graphs*, soumis.

[22] P. Dorbec, S. Gravier et M.A. Henning, *Paired-domination in generalized claw-free graphs*, J. Combinatorial Optimisation 14 (1) (July 2007), 1–7.

[23] P. Dorbec, S. Gravier, S. Klavžar, et S. Špacapan, *Some results on total domination in direct products of graphs*, Discuss. Math. Graph Theory 26 (2006), 103–112.

[24] P. Dorbec, M.A. Henning et J. McCoy, *Upper Total Domination versus UpperPaired-Domination*, Quaestionnes Mathematicae 30 (1) (2007), 1–12 .

[25] P. Dorbec, M.A. Henning et D. Rall, *On the upper total domination number of Cartesian products of graphs*, à paraître dans J. Combinatorial Optimization.

[26] P. Dorbec et M. Mollard, *Perfect Codes in Cartesian Products of 2-Paths and Infinite Paths*, Electron. J. Combin. 12 (2005), #R65.

[27] P. Dorbec, M. Mollard, S. Klavžar, et S. Špacapan, *Power domination in product Graphs*, soumis.

[28] M. Dorfling et M. A. Henning, *A note on power domination in grid graphs*, Discrete Appl. Math. 154 (2006), 1023–1027.

[29] M. El-Zahar, S. Gravier et A. Klobučar, *On the total domination of cross products of graphs*, Les Cahiers du laboratoire Leibniz, no. 97 (2004).

[30] M. El-Zahar et C.M. Pareek, *Domination number of products of graphs*, Ars Combin. 31 (1991), 223–227.

[31] M. Farber, *Characterizations of strongly chordal graphs*, Discrete Math. 43 (1983), no. 2-3, 173–189.

[32] O. Favaron et M.A. Henning, *Paired-domination in claw-free cubic graphs*, Graphs Combin. 20 (2004), 447–456.

[33] M. J. E. Golay, *Notes on digital coding*, Proc. IEEE 37 (1949), 657.

[34] S.W. Golomb, *Polyominoes – Puzzles, Patterns, Problems and Packings*, Princeton Science Library. (1994).

[35] S.W. Golomb et L.R. Welch, *Algebraic coding and the Lee metric*, Proc. Sympos. Math. Res. Center, Madison, Wis. (1968), 175–194, John Wiley, New York.

[36] S.W. Golomb et L.R. Welch, *Perfect Codes in the Lee metric and the packing of polyominoes*, SIAM J. Appl. Math. 18 (1970), 302–317.

[37] S. Gravier, M. Mollard et C. Payan, *Variations on tilings in Manhattan metric*, Geometriae Dedicata 76 [3] (1999), 265–274.

[38] S. Gravier, J. Moncel et C. Payan. *A generalization of the Pentomino Exclusion Problem : the Δ-dislocation in graphs*, Les cahiers du laboratoire Leibniz, 72 (2003).

[39] S. Gravier et C. Payan. *On the Pentomino Exclusion Problem*, Disc. and Comp. Geometry, 26 (2001), 375-386.

[40] J. Guo, R. Niedermeier, et D. Raible, *Improved algorithms and complexity results for power domination in graphs*, Lecture Notes Comp. Sci. 3623 (2005), 172–184.

[41] R. Hammack, *Isomorphic components of direct products of bipartite graphs*, Discuss. Math. Graph Theory 26(2) (2006), sous presse.

[42] R. W. Hamming, *Error detecting and error correcting codes*, Bell Syst. Tech. J. 29 (1950), 147–160.

[43] F. Harary et T. W. Haynes, *Double domination in graphs*, Ars Combin. 55 (2000) 201–213.

[44] T.W. Haynes, S.M. Hedetniemi, S.T. Hedetniemi, et M.A. Henning, *Domination in graphs applied to electric power networks*, SIAM J. Discrete Math. 15 (2002) 519–529.

[45] T.W. Haynes, S.T. Hedetniemi, et P.J. Slater (eds). *Fundamentals of Domination in Graphs*, Marcel Dekker, Inc. New York (1998).

[46] T.W. Haynes, S.T. Hedetniemi, et P.J. Slater (eds), *Domination in Graphs : Advanced Topics*, Marcel Dekker, New York (1998).

[47] T.W. Haynes et P.J. Slater, *Paired-domination in graphs*, Networks 32 (1998), 199–206.

[48] T.W. Haynes et P.J. Slater, *Paired-domination and the paired-domatic number*, Congr. Numer. 109 (1995), 65–72.

[49] M. A. Henning et D. F. Rall, *On the total domination number of Cartesian products of graph*, Graphs and Combinatorics 21 (2005), 63–69.

[50] W. Imrich et S. Klavžar, *Product Graphs : Structure and Recognition*, J. Wiley & Sons, New York, 2000.

[51] M.S. Jacobson et L.F. Kinch, *On the Domination of the Products of Graphs : I*, Ars Combinatoria 18 (1983), 33–44.

[52] M.S. Jacobson et L.F. Kinch, *On the Domination of the Products of Graphs II : Trees*, J. Graph Theory 10 (1986), 97–106.

[53] P.K. Jha, S. Klavžar et B. Zmazek, *Isomorphic components of Kronecker product of bipartite graphs*, Discuss. Math. Graph Theory 17 (1997) 301–309.

[54] C.-S. Liao et D.-T. Lee, *Power domination problem in graphs*, Lecture Notes Comp. Sci. 3595 (2005), 818–828.

[55] R. Nowakowski et D.F. Rall, *Associative graph products and their independence, domination and coloring numbers*, Discuss. Math. Graph Theory 16 (1996), 53–79.

[56] D. Rall, *Total domination in categorical products of graphs*, Discuss. Math. Graph Theory, in press.

[57] J. Schönheim, *Mixed codes*, Proc Calgary Internat. conf. on combinatorial structures and their applications (1970), New York : Gordon and Breach, 385.

[58] D. Seinsche, *On a property of the class of n-colorable graphs*. J. Combin. Theory Ser. B 16 (1974), 191–193.

[59] V.G. Vizing, *The cartesian product of graphs*, Vyčisl. Sistemy No. 9 (1963), 30–43.

[60] V.G. Vizing, *Some unsolved problems in graph theory*, Uspehi Mat. Nauk 23 (6(144)) (1968), 117–134.

[61] P.M. Weichsel, *The Kronecker product of graphs*, Proc. Amer. Math. Soc. 13 (1962), 47–52.

RÉSUMÉ

Dans cette thèse, nous étudions deux problèmes de théorie des graphes largement étudiés ces trois dernières décennies: les codes correcteurs d'erreur et la domination.
Nous étudions d'abord deux généralisations des codes correcteurs d'erreurs : les codes parfaits sur des alphabets mixtes et les codes pondérés de rayon un. Ces problèmes ont beaucoup été étudiés sur la métrique de Hamming. Nous les étudions dans la métrique de Lee, et nous montrons des résultats aussi bien d'existence que d'inexistence. Nous montrons aussi que le rapport de dualité entre la domination et les codes est fort pour la grille carrée lorsque l'on considère des boules sans le centre.
Puis, nous étudions la domination dans les produits de graphes. Depuis que Vizing a conjecturé en 1968 que la domination est surmultiplicative pour le produit cartésien de graphes, les relations entre des variantes du nombre de domination d'un produit de graphes et ses facteurs ont attiré beaucoup d'attention. Après avoir donné quelques bornes sur le nombre de domination totale du produit direct de graphes, nous déterminons le nombre de domination de puissance des produits de chemins. Puis, nous montrons une conjecture "à la Vizing" pour le nombre de domination totale supérieure du produit cartésien.
Ensuite, nous étudions la domination avec une approche structurelle. En continuation de l'étude de Favaron et Henning, nous fournissons plusieurs bornes supérieures sur le nombre de paire-domination des graphes sans étoiles, pour chaque nombre de branches, et des graphes sans P_5. Nous proposons aussi des familles infinies de graphes pour lesquels ces bornes sont atteintes.
Enfin, nous comparons la domination totale supérieure et la paire-domination supérieure, deux variantes de la domination qui ont attiré l'attention récemment, et nous donnons des bornes précises pour les arbres.

MOTS-CLÉS

Domination, codes correcteurs, théorie des graphes, combinatoire

CLASSIFICATION MATHÉMATIQUE

05B40, 05C69, 05C70, 94B05.