
Programmation Mathématique
Responsable: A. Lisser
Nombre de pages: 2

TD 3

Exercice I

Dans $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ structuré en espace euclidien grâce au produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$ (rappel $\langle A, B \rangle = \text{tr}(AB)$), on considère l'ensemble suivant :

$$\Omega_1 = \{M \in \mathcal{P}_n(\mathbb{R}) \mid \text{tr}M = 1\}.$$

Montrer que Ω_1 est un convexe compact de $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$.

Exercice II

Soit $n \geq 2$ et $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ la fonction polynomiale de degré 5 définie par :

$$x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mapsto f(x) = (1 + x_n)^3 \sum_{i=1}^{n-1} x_i^2 + x_n^2.$$

Montrer que 0 est le seul point critique de f , qu'il est minimum local stricte de f , mais qu'il n'est pas minimum global de f .

Exercice III

Dans le processus de minimisation d'une fonction f deux fois différentiable sur \mathbb{R}^n , la direction de Newton à partir d'un point x_k où $\nabla f(x_k) \neq 0$ et $\nabla^2 f(x_k)$ est définie positive est obtenue

- soit en minimisant $d \mapsto \langle \nabla f(x_k), d \rangle + \frac{1}{2} \langle \nabla^2 f(x_k) d, d \rangle$ sur \mathbb{R}^n
- soit en minimisant $d \mapsto \langle \nabla f(x_k), d \rangle$ sous la contrainte $\langle \nabla^2 f(x_k) d, d \rangle \leq 1$.

Montrer que les directions obtenues comme solutions de ces deux problèmes de minimisation sont les mêmes à une constante positive multiplicative près.

Exercice IV

On considère dans \mathbb{R}^2 le problème de minimisation suivant :

$$\begin{aligned} (\mathbb{P}) \quad & \min f(x_1, x_2) = x_1^3 + x_2^2 \\ & \text{s.c.} \quad g(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2 \leq 9. \end{aligned}$$

- 1 Déterminer les points vérifiant les conditions nécessaires d'optimalité du premier ordre.
- 2 En déduire les solutions de (\mathbb{P}) .