

Correction du td 3: Optimisation sans contraintes

Paul Dorbec, Cédric Bentz, David Forge

4 juin 2009

1 Rappels

Question 1.1 Calculez le déterminant puis inversez la matrice

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Correction :

Le déterminant est -4 , l'inverse est $\frac{1}{4} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & -4 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

2 Optimisation sans contraintes en 2D

Nous cherchons un minimum à la fonction

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x_1, x_2) & \longrightarrow & x_1^4 - 2x_1^3 + \frac{1}{6}x_2^2 - 3x_1 - x_1x_2 \end{array}$$

Question 2.1 Utilisez la méthode de la plus forte pente puis de la plus forte pente accélérée ($p=2$). Dessinez les itinéraires empruntés sur un graphique en 2 dimensions.

Correction :

$$\text{On a } \nabla f \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4x_1^3 - 6x_1^2 - 3 - x_2 \\ \frac{1}{3}x_2 - x_1 \end{pmatrix}$$

Soit $x^0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. On trouve la direction de la plus forte pente $-\nabla f(x^0) = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix}$.

On minimise donc $g_0(\lambda) = f(x^0 - \lambda \nabla f(x^0)) = 81\lambda^4 - 54\lambda^3 - 6\lambda$. On trouve $\lambda_0 \approx 0.582$, notre premier pas nous conduit donc au point $x^1 = x^0 - \lambda_0 \nabla f(x^0) = \begin{pmatrix} 1.746 \\ 0 \end{pmatrix}$

On réitère pour obtenir les valeurs :

i	x_i	$-\nabla f(x_i)$	$g_i(\lambda)$	λ_i	x_{i+1}
0	$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix}$	$81\lambda^4 - 54\lambda^3 - 6\lambda$	0.582	$\begin{pmatrix} 1.746 \\ 0 \end{pmatrix}$
1	$\begin{pmatrix} 1.746 \\ 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 \\ 1.746 \end{pmatrix}$	$0.508\lambda^2 - 3.049\lambda - 6.590$	3	$\begin{pmatrix} 1.746 \\ 5.238 \end{pmatrix}$
2	$\begin{pmatrix} 1.746 \\ 5.238 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 5.238 \\ 0 \end{pmatrix}$	$752\lambda^4 + 716\lambda^3 + 214\lambda^2 - 27\lambda - 11$	0.05	$\begin{pmatrix} 2.01 \\ 5.238 \end{pmatrix}$
3	$\begin{pmatrix} 2.01 \\ 5.238 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 \\ 0.264 \end{pmatrix}$	$0.012\lambda^2 - 0.07\lambda - 11.904$	3	$\begin{pmatrix} 2.01 \\ 6.03 \end{pmatrix}$

Pour la plus forte pente accélérée, après avoir fait 2 pas de la plus forte pente standard, nous devons faire un pas accéléré, en utilisant la direction $x^2 - x^0$. On minimise donc la fonction $g_2(\lambda) = f(x^0 + \lambda(x^2 - x^0)) = 9.29\lambda^4 - 10.65\lambda^3 - 4.57\lambda^2 - 5.238\lambda$. On trouve $\lambda_2 = 1.172$ et on atteint le point $x_3 = x^0 + \lambda_2(x^2 - x^0) = \begin{pmatrix} 2.05 \\ 6.137 \end{pmatrix}$, qui est à peu de chose près le minimum global.

3 Optimisation sans contrainte en 3D

Nous cherchons un minimum à la fonction

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x_1, x_2, x_3) & \longrightarrow & x_1^4 + x_1^2 + 2x_2^2 + x_3^2 - 6x_1 + 3x_2 - 2x_3(x_1 + x_2 + 1) \end{array}$$

Question 3.1 Vérifiez que la fonction est convexe.

Correction :

On calcule le Hessien :

$$\begin{pmatrix} 12x_1^2 + 2 & 0 & -2 \\ 0 & 4 & -2 \\ -2 & -2 & 2 \end{pmatrix}$$

Il y a une erreur d'énoncé, la fonction n'est pas convexe, si on multiplie ce Hessien (en $x_1 = 0$) à gauche et à droite par $(2, 1, 2)$, on obtient -4 .

Question 3.2 *Cherchez un minimum à la fonction objectif en utilisant la méthode de la plus forte pente, avec une recherche dichotomique une fois la direction fixée.*

Question 3.3 *Idem, en utilisant la méthode de Newton.*