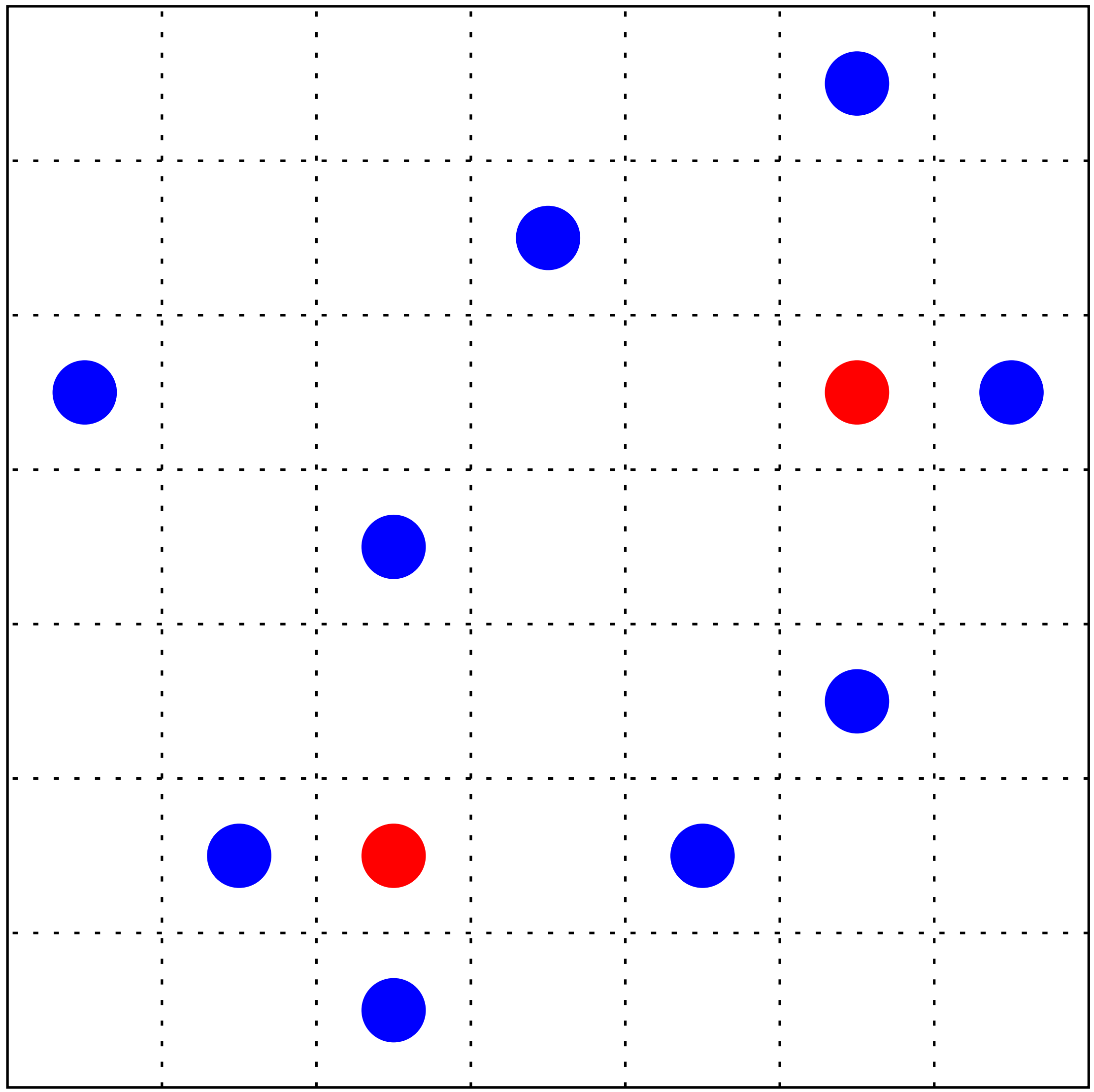
Chaînes de Markov, Génération Aléatoire, et Couplage Depuis le Passé (9)

Petite École de Combinatoire

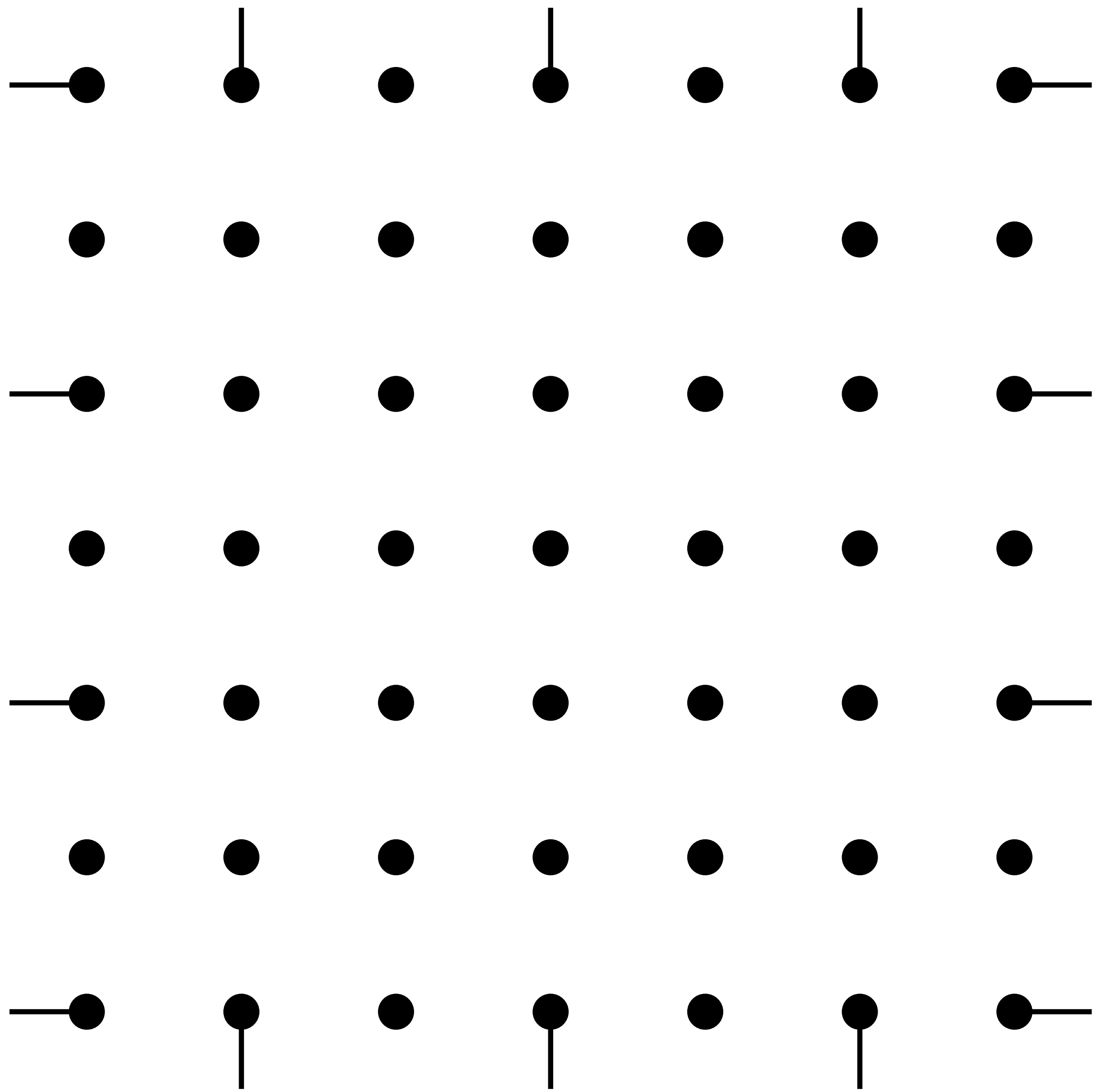
P. Duchon

LaBRI

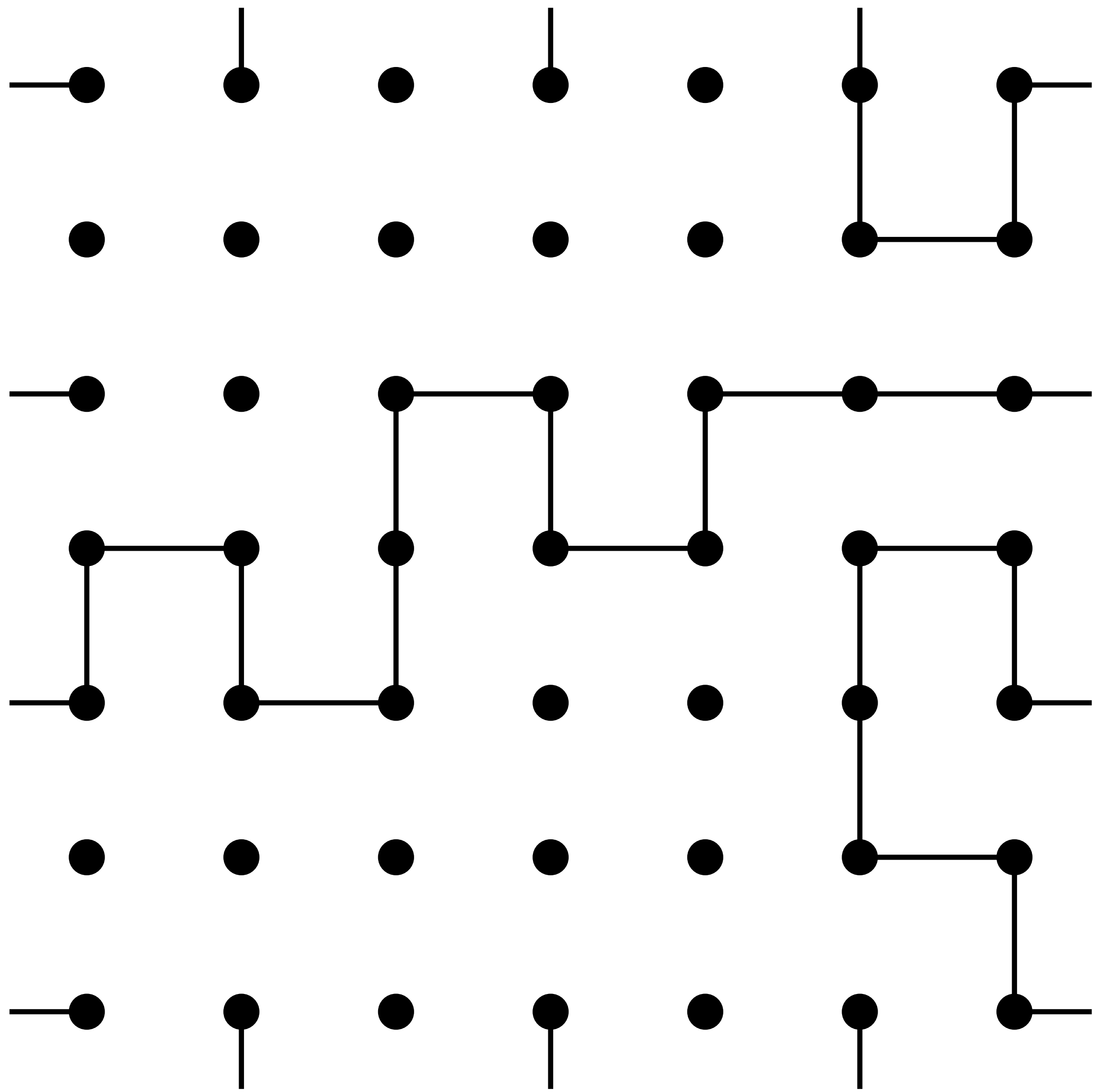
ASM: matrices à signes alternants



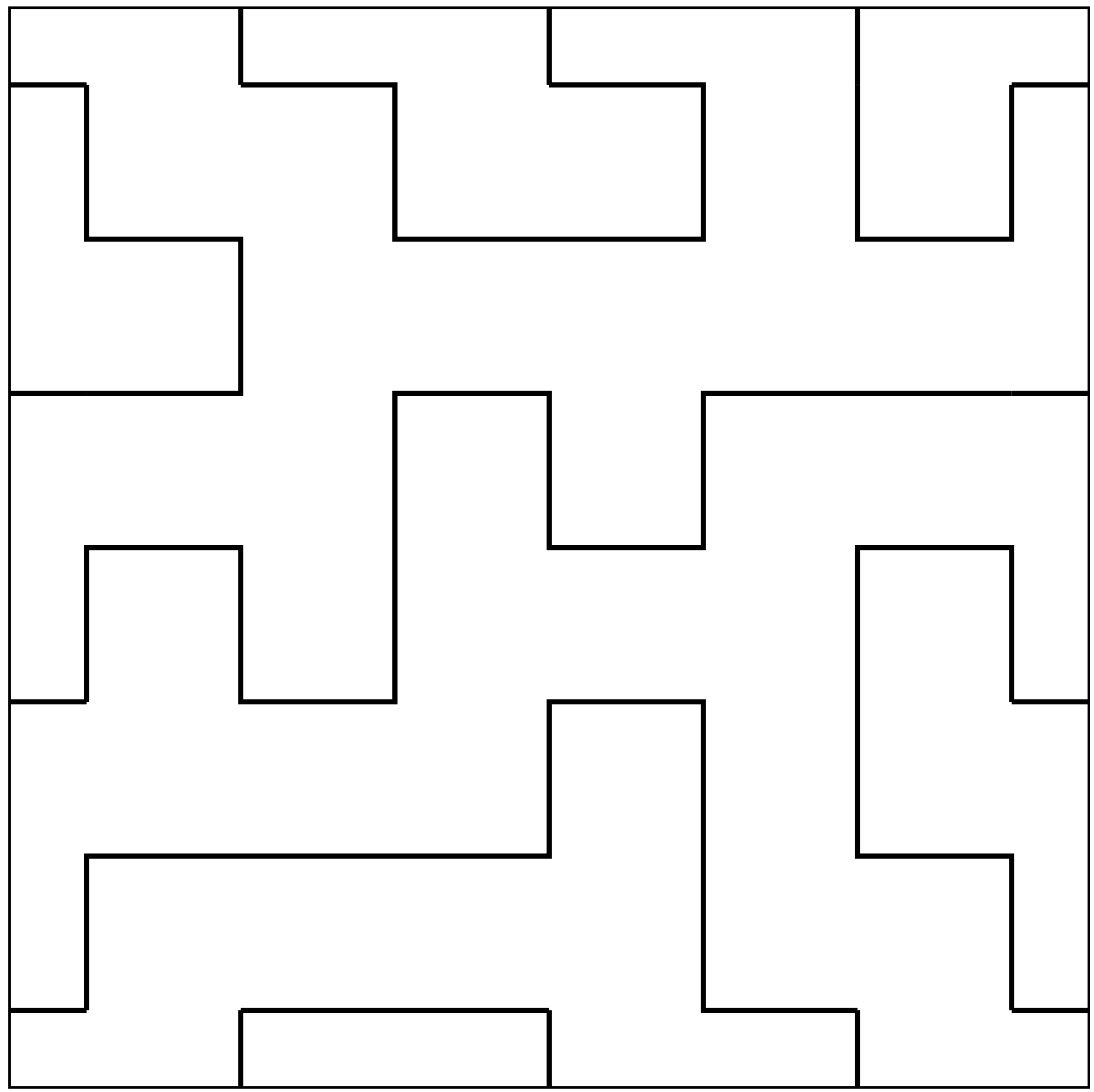
FPL: boucles compactes



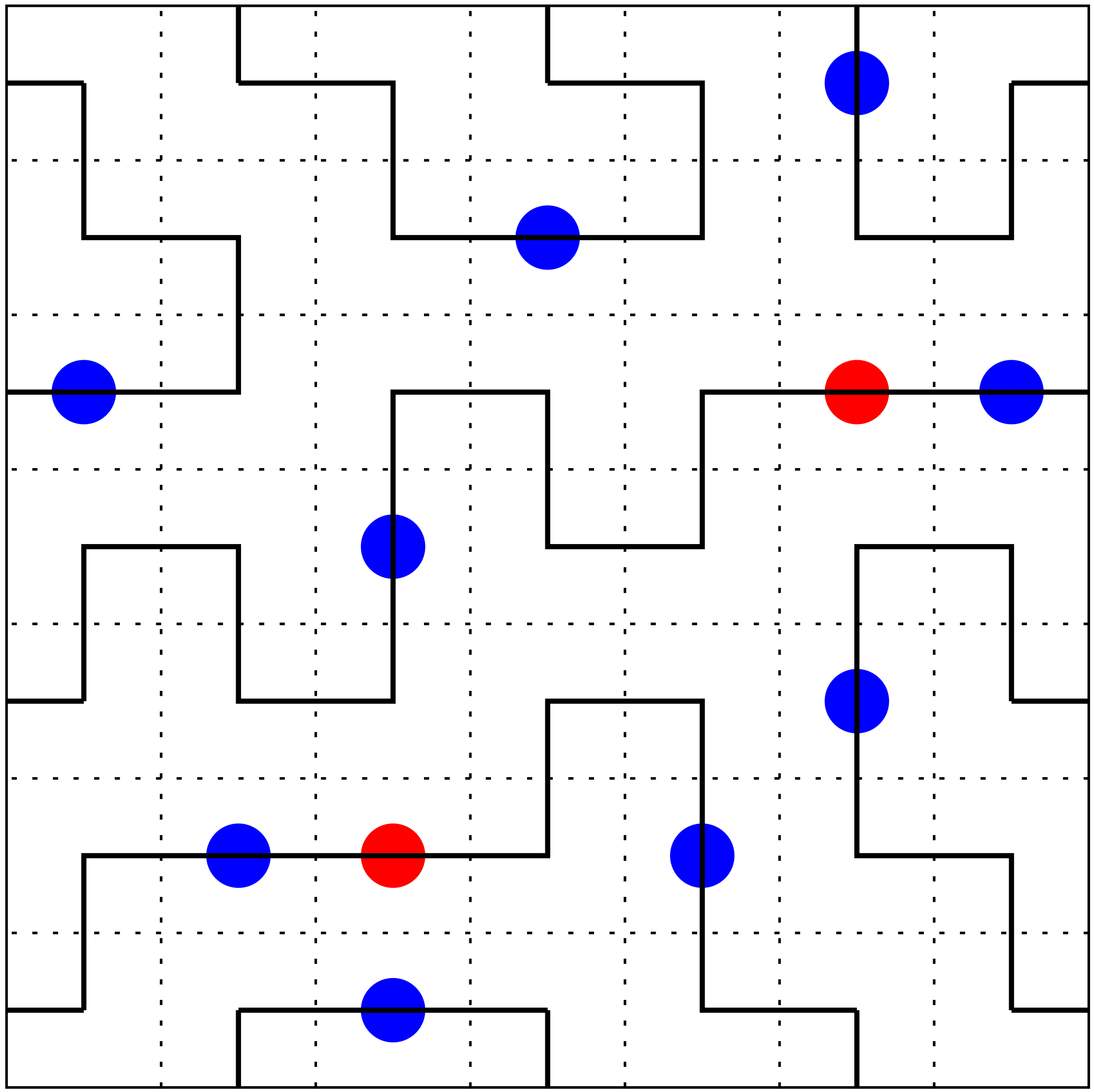
FPL: boucles compactes



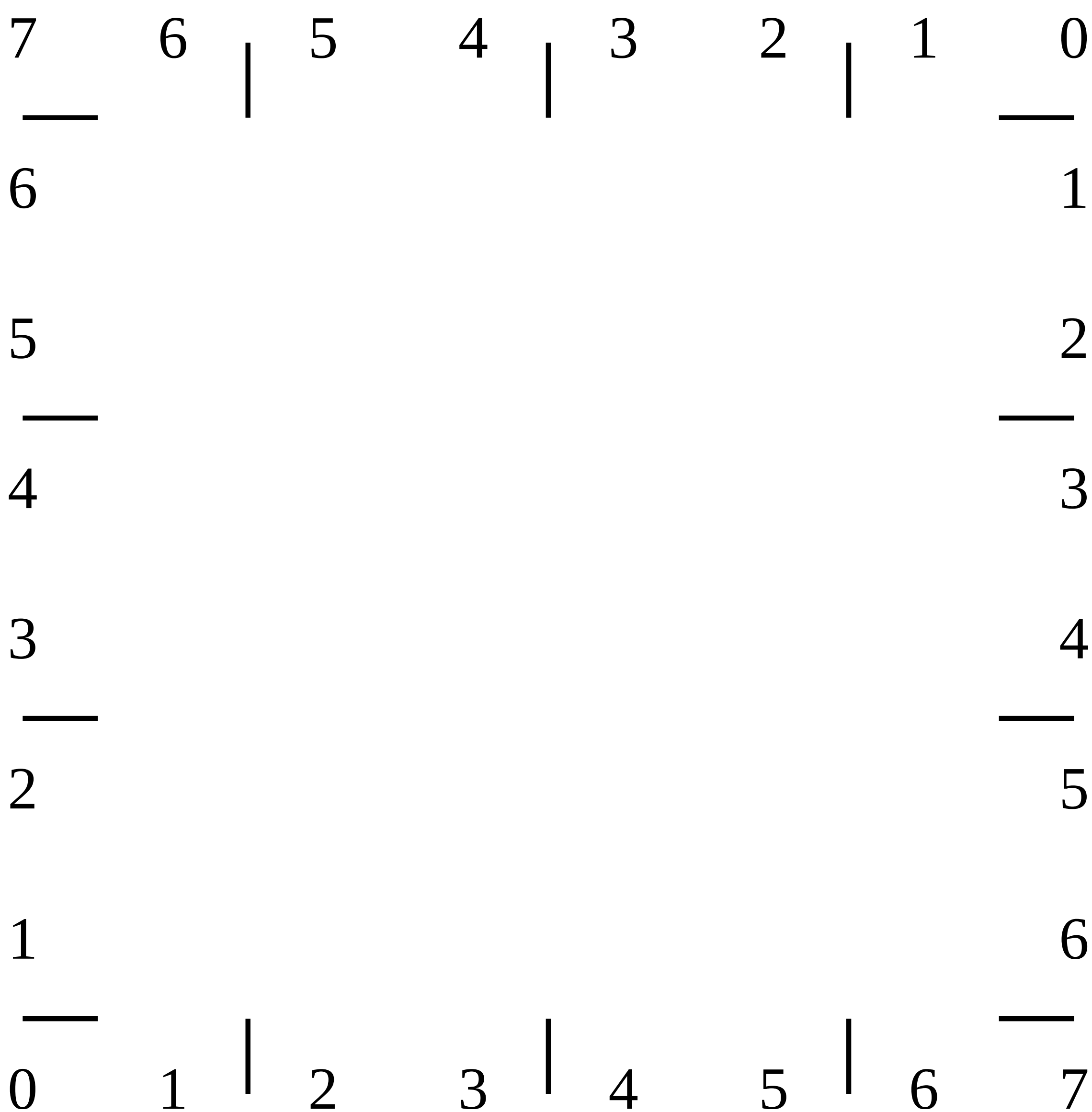
FPL: boucles compactes



Bijection!



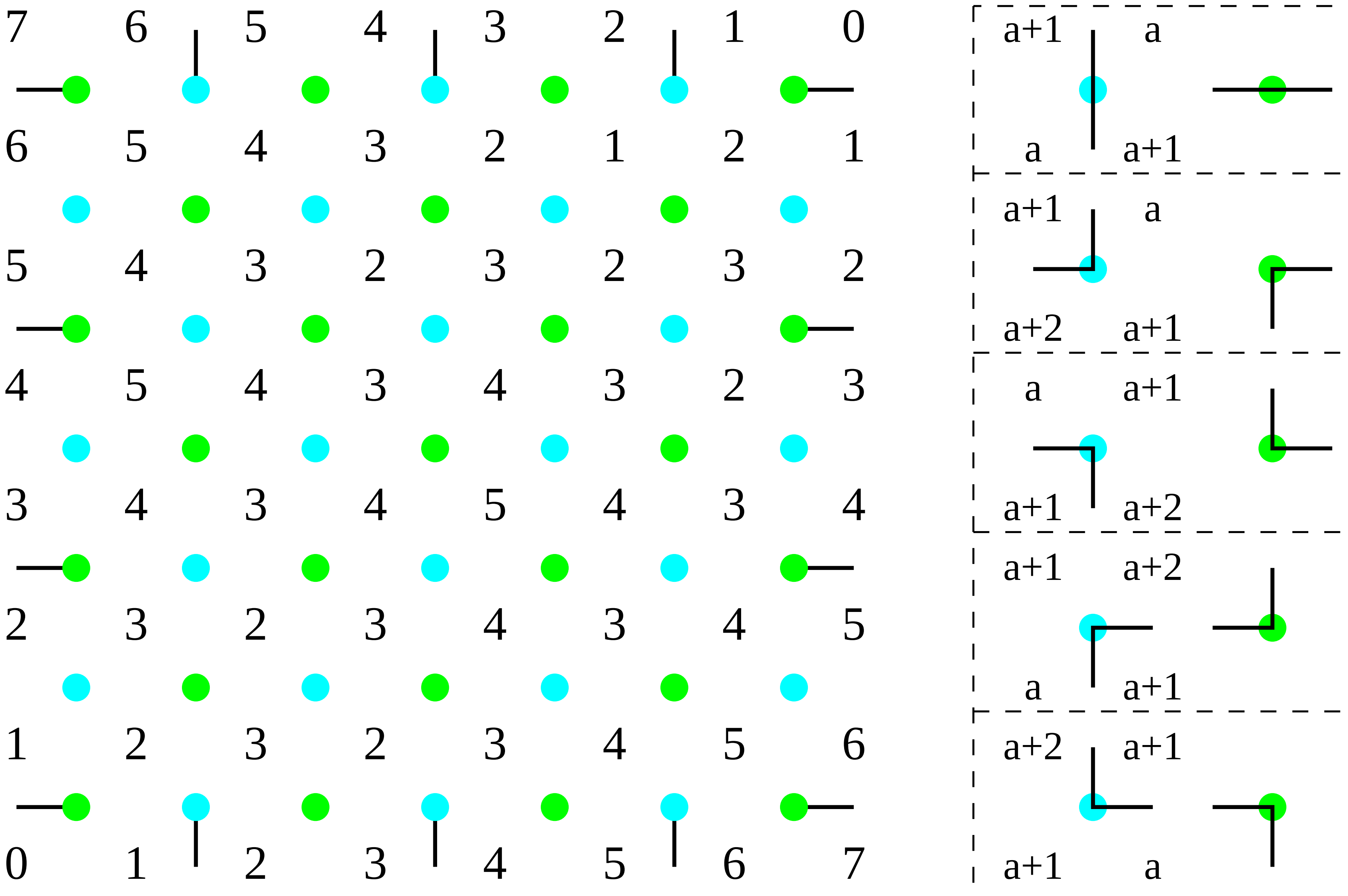
Tableaux...



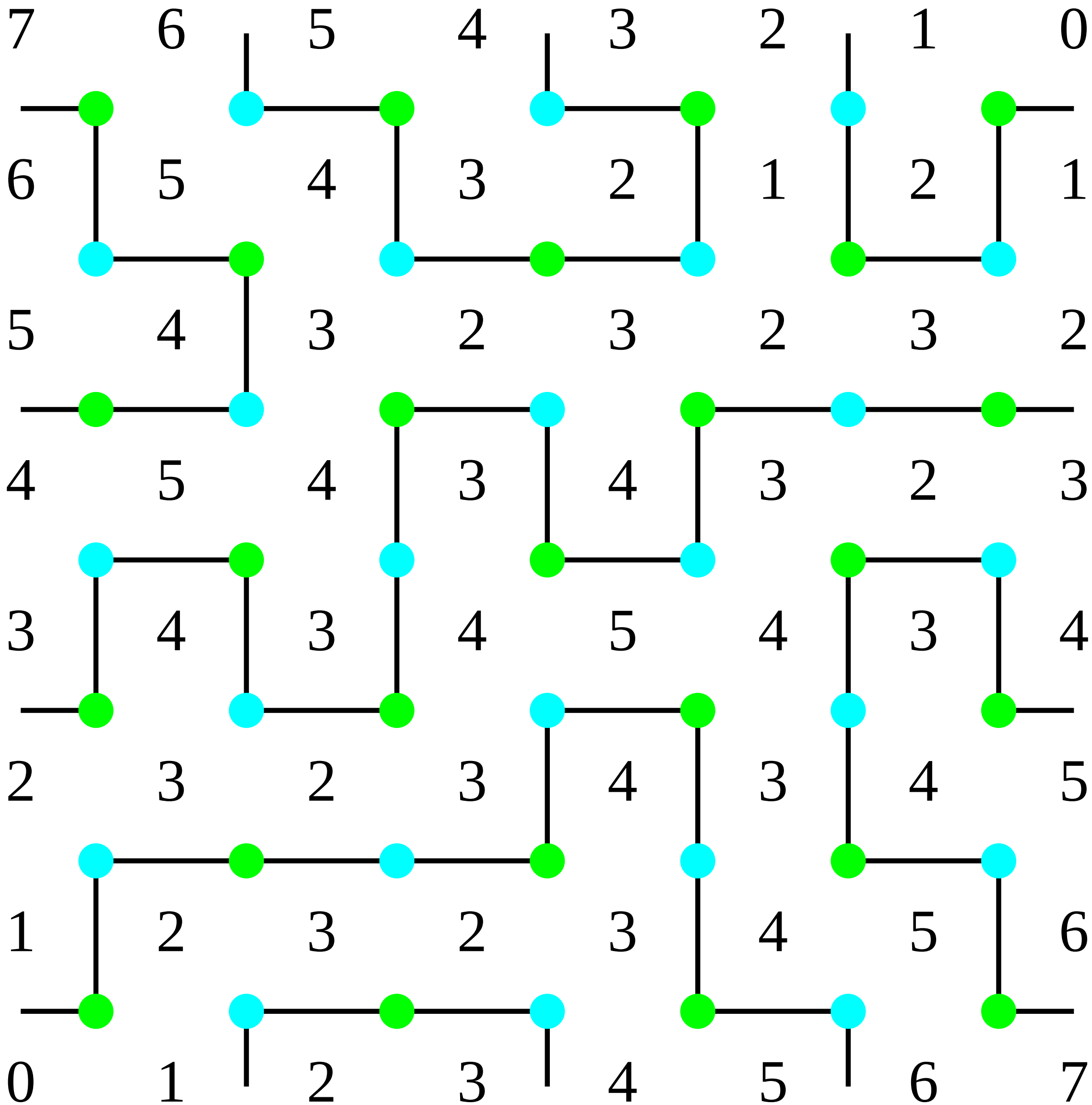
Tableaux. . .

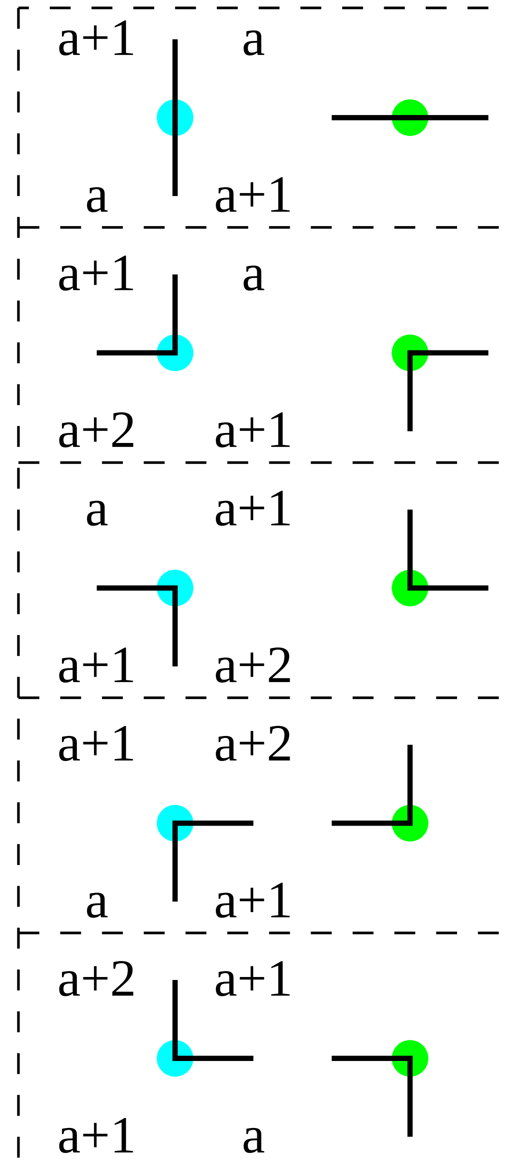
7	6	5	4	3	2	1	0
6	5	4	3	2	1	2	1
5	4	3	2	3	2	3	2
4	5	4	3	4	3	2	3
3	4	3	4	5	4	3	4
2	3	2	3	4	3	4	5
1	2	3	2	3	4	5	6
0	1	2	3	4	5	6	7

…vers FPL


7 6 5 4 3 2 1 0
6 5 4 3 2 1 2 1
5 4 3 2 3 2 3 2
4 5 4 3 4 3 2 3
3 4 3 4 5 4 3 4
2 3 2 3 4 3 4 5
1 2 3 2 3 4 5 6
0 1 2 3 4 5 6 7
a+1 a
a a+1
a+1 a
a+2 a+1
a a+1
a+1 a+2
a+1 a+2
a a+1
a+2 a+1
a+1 a

Tableaux = FPL





Minimum

7	6	5	4	3	2	1	0
6	5	4	3	2	1	0	1
5	4	3	2	1	0	1	2
4	3	2	1	0	1	2	3
3	2	1	0	1	2	3	4
2	1	0	1	2	3	4	5
1	0	1	2	3	4	5	6
0	1	2	3	4	5	6	7

Maximum

7	6	5	4	3	2	1	0
6	7	6	5	4	3	2	1
5	6	7	6	5	4	3	2
4	5	6	7	6	5	4	3
3	4	5	6	7	6	5	4
2	3	4	5	6	7	6	5
1	2	3	4	5	6	7	6
0	1	2	3	4	5	6	7

Fonctions de mise à jour

$F_{i,j,\delta}(T)$: (avec $1 \leq i \leq N-1$, $1 \leq j \leq N-1$, $\delta = \pm 2$)

- $T' = T$;
- $T'_{i,j} = T_{i,j} + \delta$
- Si T' est un tableau valide, $F_{i,j,\delta}(T) = T'$
- Sinon, $F_{i,j,\delta}(T) = T$

Fonctions de mise à jour

$F_{i,j,\delta}(T)$: (avec $1 \leq i \leq N-1$, $1 \leq j \leq N-1$, $\delta = \pm 2$)

- $T' = T$;
- $T'_{i,j} = T_{i,j} + \delta$
- Si T' est un tableau valide, $F_{i,j,\delta}(T) = T'$
- Sinon, $F_{i,j,\delta}(T) = T$

Fonctions croissantes : $T \leq U \Rightarrow F(T) \leq F(U)$

Fonctions de mise à jour

$F_{i,j,\delta}(T)$: (avec $1 \leq i \leq N-1$, $1 \leq j \leq N-1$, $\delta = \pm 2$)

- $T' = T$;
- $T'_{i,j} = T_{i,j} + \delta$
- Si T' est un tableau valide, $F_{i,j,\delta}(T) = T'$
- Sinon, $F_{i,j,\delta}(T) = T$

Fonctions croissantes : $T \leq U \Rightarrow F(T) \leq F(U)$
$F_{i,j,\delta}(T) = T' \Leftrightarrow F_{i,j,-\delta}(T') = T$

Fonctions de mise à jour

$F_{i,j,\delta}(T)$: (avec $1 \leq i \leq N-1$, $1 \leq j \leq N-1$, $\delta = \pm 2$)

- $T' = T$;
- $T'_{i,j} = T_{i,j} + \delta$
- Si T' est un tableau valide, $F_{i,j,\delta}(T) = T'$
- Sinon, $F_{i,j,\delta}(T) = T$

Fonctions croissantes : $T \leq U \Rightarrow F(T) \leq F(U)$
$F_{i,j,\delta}(T) = T' \Leftrightarrow F_{i,j,-\delta}(T') = T$: on fabrique une chaîne qui laisse invariante la loi uniforme sur les tableaux, pour peu que $\mathbb{P}(i,j,\delta) = \mathbb{P}(i,j,-\delta)$

Fonctions de mise à jour

$F_{i,j,\delta}(T)$: (avec $1 \leq i \leq N-1$, $1 \leq j \leq N-1$, $\delta = \pm 2$)

- $T' = T$;
- $T'_{i,j} = T_{i,j} + \delta$
- Si T' est un tableau valide, $F_{i,j,\delta}(T) = T'$
- Sinon, $F_{i,j,\delta}(T) = T$

Fonctions croissantes : $T \leq U \Rightarrow F(T) \leq F(U)$
$F_{i,j,\delta}(T) = T' \Leftrightarrow F_{i,j,-\delta}(T') = T$: on fabrique une chaîne qui laisse invariante la loi uniforme sur les tableaux, pour peu que $\mathbb{P}(i,j,\delta) = \mathbb{P}(i,j,-\delta)$
(Par exemple, (i,j,δ) uniforme)

CFTP monotone

Pour obtenir un tableau aléatoire uniforme, on compose (dans l'ordre inverse : ${G^0}_{-k} = F_{-k} \circ F_{-k+1} \circ \ldots \circ F_{-1}$) des fonctions de mise à jour indépendantes, jusqu'à obtenir une fonction constante.

Détection de coalescence : ${G^0}_{-k}$ est constante, si et seulement si ${G^0}_{-k}(\min) = {G^0}_{-k}(\max)$