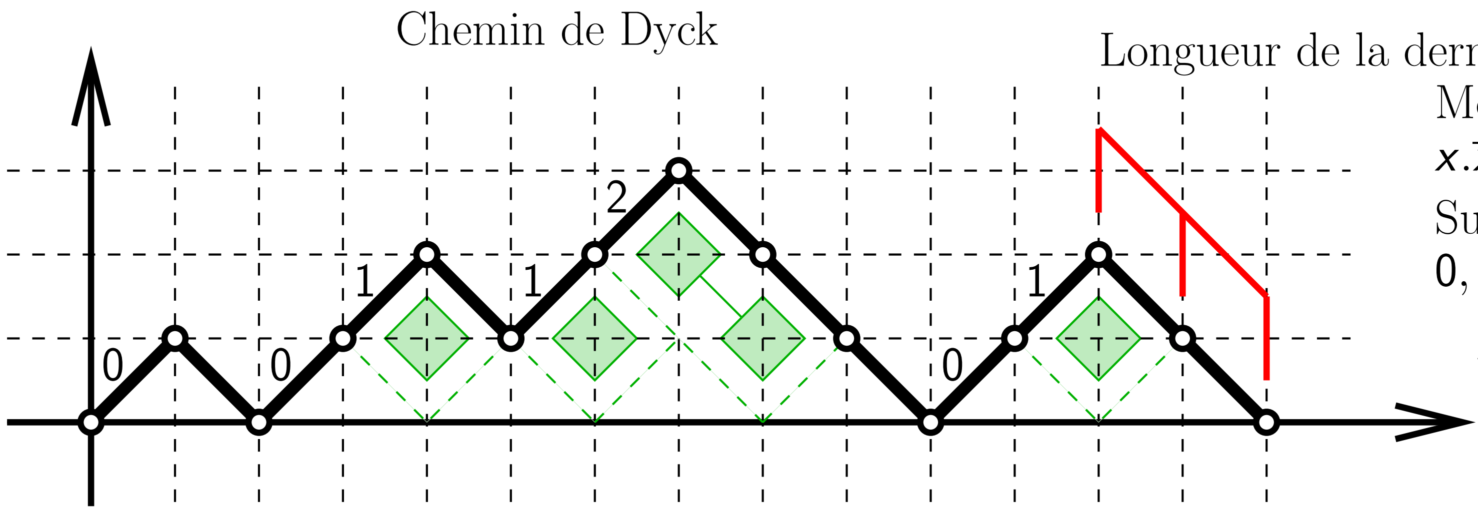
Bijections autour des nombres de Segner (Catalan)

Yvan Le Borgne,
LaBRI, Bordeaux (France)
Groupe de travail

7 octobre 2005

Chemins de Dyck et Suites quasi-décroissantes

Une suite d'entiers est *quasi-décroissante* $s = (s_k)_{k=1\dots n}$ si c'est un "processus des hauteurs" pour un chemin de Dyck : $s_1 = 0$ et $0 \le s_{k+1} \le 1 + s_k$.



Mot de Dyck

$x.\overline{x}.x.\overline{x}.x.x.\overline{x}.x.x.\overline{x}.\overline{x}.\overline{x}.x.x.\overline{x}.\overline{x}.$

Suite quasi-décroissante

$0, 0, 1, 1, 2, 0, 1$

Aire :

$5 = 0 + 0 + 1 + 1 + 2 + 0 + 1$

Il existe au moins une bijection entre suites quasi-décroissantes et chemins de Dyck préservant les tailles des objets.
(insertion d'un pic dans la dernière descente)
On en cherche d'autres.

Un même algorithme pour décrire plusieurs bijections

Entrée : Une suite quasi-décroissante
———— $s = (s_k)_{k=1\dots n}$.
Paramètre : Un mode d'insertion
———————— $m = (A \to BA\overline{B}x, \overline{A} \to \overline{A}\overline{x})$.

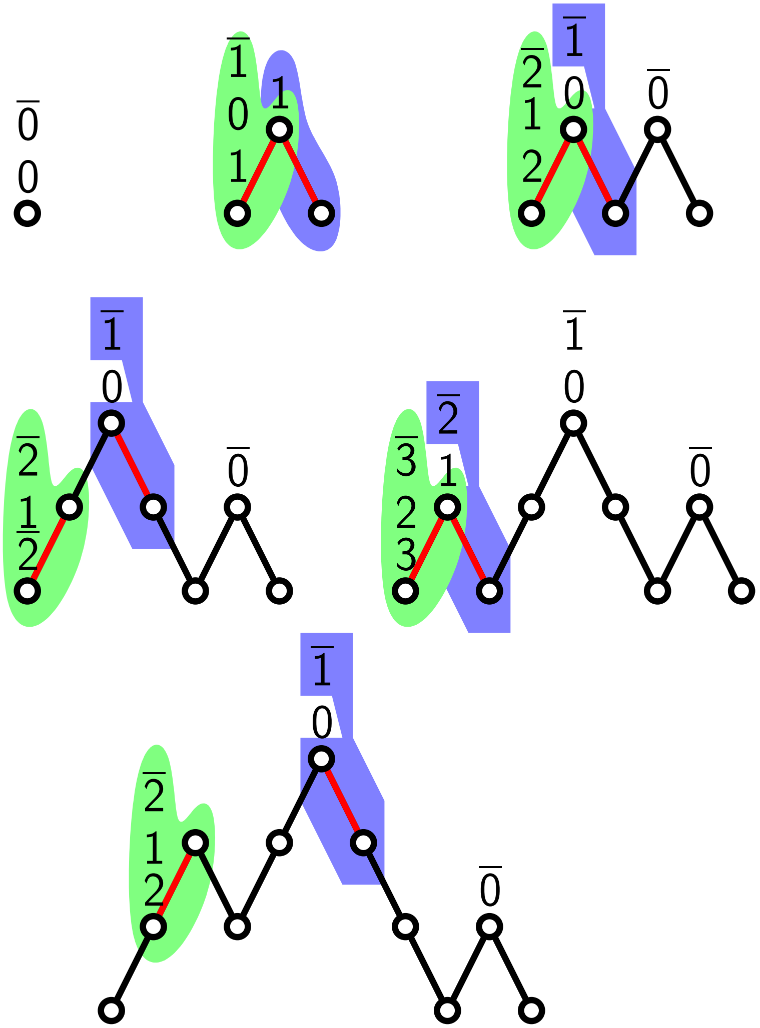
- *Chemin* $:= 0\overline{0}$;
- Pour tout s_k, k allant de 1 à n faire

-•- Effacer dans *Chemin* les marques
—— de rang strictement supérieur à s_k;
-•- Réécrire les marques s_k et $\overline{s_k}$ dans
—— *Chemin* selon le mode d'insertion m
—— (où $A = s_k$ et $B = 1 + s_k$);
FinPour

Sortie : *Chemin*
(où les marques ont été effacées).

Exemple : $s = 0, 1, 1, 2, 1.$

$0\overline{0} \to 10\overline{1}x\overline{0}\overline{x} \to$
$21\overline{2}x0\overline{1}\overline{x}x\overline{0}\overline{x} \to 21\overline{2}xx0\overline{1}\overline{x}\overline{x}x\overline{0}\overline{x} \to$
$32\overline{3}x1\overline{2}\overline{x}xx0\overline{1}\overline{x}\overline{x}x\overline{0}\overline{x} \to \dots$



Les réécritures uniformes bijectives

$$\left\{\begin{array}{ll} & (xB\overline{B}, \overline{x}A\overline{A}) \\ \equiv_{pic} & (x, B\overline{B}\overline{x}A\overline{A}) \\ \equiv_{pic} & (xB, \overline{B}, \overline{x}A\overline{A}) \\ \equiv_{montee} & (Bx, \overline{B}, \overline{x}A\overline{A}) \end{array}\right. \quad \Longleftrightarrow \; ech \quad \left\{\begin{array}{ll} & (xA\overline{A}, \overline{x}B\overline{B}) \\ \equiv_{pic} & (x, A\overline{A}\overline{x}B\overline{B}) \\ \equiv_{pic} & (xA, \overline{A}, \overline{x}B\overline{B}) \\ \equiv_{montee} & (Ax, \overline{A}, \overline{x}B\overline{B}) \end{array}\right.$$

$$\Updownarrow_{mir} \qquad\qquad\qquad \Updownarrow_{mir}$$

$$\left\{\begin{array}{ll} & (A\overline{A}x, B\overline{B}\overline{x}) \\ \equiv_{pic} & (A\overline{A}xB\overline{B}, \overline{x}) \\ \equiv_{pic} & (A\overline{A}xB, \overline{B}\overline{x}) \\ \equiv_{descente} & (A\overline{A}xB, \overline{x}\overline{B}) \end{array}\right. \quad \Longleftrightarrow \; ech \quad \left\{\begin{array}{ll} & (B\overline{B}x, A\overline{A}\overline{x}) \\ \equiv_{pic} & (B\overline{B}xA\overline{A}, \overline{x}) \\ \equiv_{pic} & (B\overline{B}xA, \overline{A}\overline{x}) \\ \equiv_{descente} & (B\overline{B}xA, \overline{x}\overline{A}) \end{array}\right.$$

$$\left\{\begin{array}{ll} & (AB\overline{B}x, \overline{x}\overline{A}) \\ \equiv_{descente} & (AB\overline{B}x, \overline{A}\overline{x}) \end{array}\right. \quad \Longleftrightarrow \; ech \quad \left\{\begin{array}{ll} & (BA\overline{A}x, \overline{x}\overline{B}) \\ \equiv_{descente} & (BA\overline{A}x, \overline{B}\overline{x}) \end{array}\right.$$

$$\Updownarrow_{mir} \qquad\qquad\qquad \Updownarrow_{mir}$$

$$\left\{\begin{array}{ll} & (Ax, \overline{x}B\overline{BA}) \\ \equiv_{montee} & (xA, \overline{x}B\overline{BA}) \end{array}\right. \quad \Longleftrightarrow \; ech \quad \left\{\begin{array}{ll} & (Bx, \overline{x}A\overline{AB}) \\ \equiv_{montee} & (xB, \overline{x}A\overline{AB}) \end{array}\right.$$

$$\left\{\begin{array}{ll} & (BA\overline{B}x, \overline{A}\overline{x}) \\ \equiv_{descente} & (BA\overline{B}x, \overline{x}\overline{A}) \end{array}\right. \quad \Longleftrightarrow \; ech \quad \left\{\begin{array}{ll} & (AB\overline{A}x, \overline{B}\overline{x}) \\ \equiv_{descente} & (AB\overline{A}x, \overline{x}\overline{B}) \end{array}\right.$$

$$\Updownarrow_{mir} \qquad\qquad\qquad \Updownarrow_{mir}$$

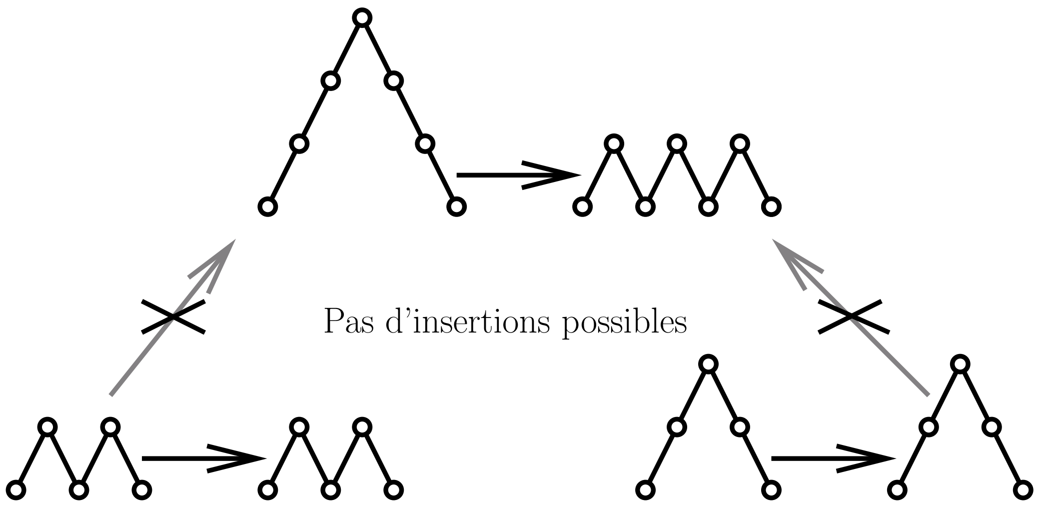
$$\left\{\begin{array}{ll} & (xA, \overline{x}B\overline{AB}) \\ \equiv_{montee} & (Ax, \overline{x}B\overline{AB}) \end{array}\right. \quad \Longleftrightarrow \; ech \quad \left\{\begin{array}{ll} & (xB, \overline{x}A\overline{BA}) \\ \equiv_{montee} & (Bx, \overline{x}A\overline{BA}) \end{array}\right.$$

Plan

On présente les généralisations de l'algorithme qui ont permis de décrire des bijections pertinentes pour les sujets suivants :

- Une interprétation combinatoire dans le cadre de la méthode du noyau pour les chemins de Dyck.
- Le problème de la symétrie des q, t-Catalan définis par Haiman et Haglund.
- $[Kreweras] = [Delest/Viennot] \circ Reflexion \circ [Viennot/Delest]$, un exemple de symétrie sur des objets énumérés par la suite de Catalan.

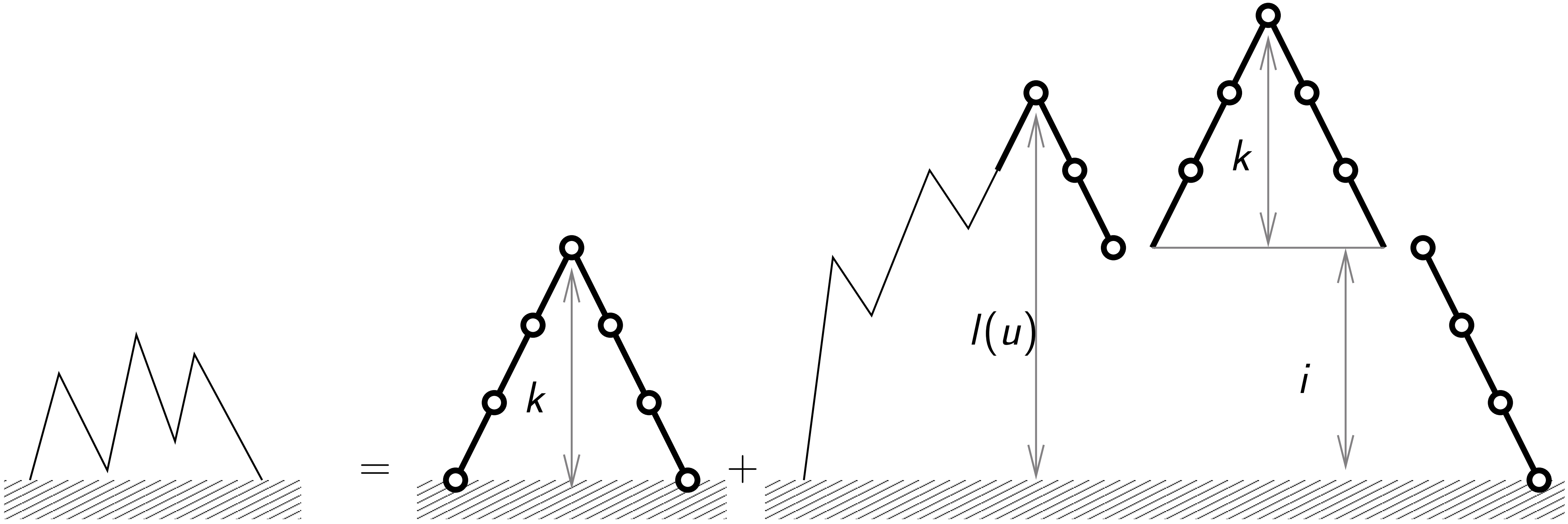
Mais il y a des bijections qui ne pourront pas être décrites par un algorithme d'insertion :



Une équation fonctionnelle pour la méthode du noyau

Chemins de Dyck
avec au plus un pic

Chemin de Dyck
avec au moins deux pics



$$D(t;s) = \sum_{k=0}^{\infty}(ts)^k = \frac{1}{1-ts} + \sum_{k=1}^{\infty}(ts)^k \sum_{i=0}^{l(u)-1} s^i = \frac{ts}{1-ts}\frac{1-s^{l(u)}}{1-s}$$

$$\longrightarrow \frac{ts}{1-ts}\frac{D(t;1)-D(t;s)}{1-s}$$

Utilisation du développement de Taylor

$$D(t;s) = \frac{1}{1-ts} + \frac{ts}{1-ts}\frac{D(t;1)-D(t;s)}{1-s}$$

On utilise le développement de Taylor $D(t;s) = \sum_{n\geq 0} \frac{(s-1)^k}{k!}\frac{\partial^k}{\partial s^k}D(t;1)$.

On pose $u = s-1$ et en considérant le développement selon u on obtient :

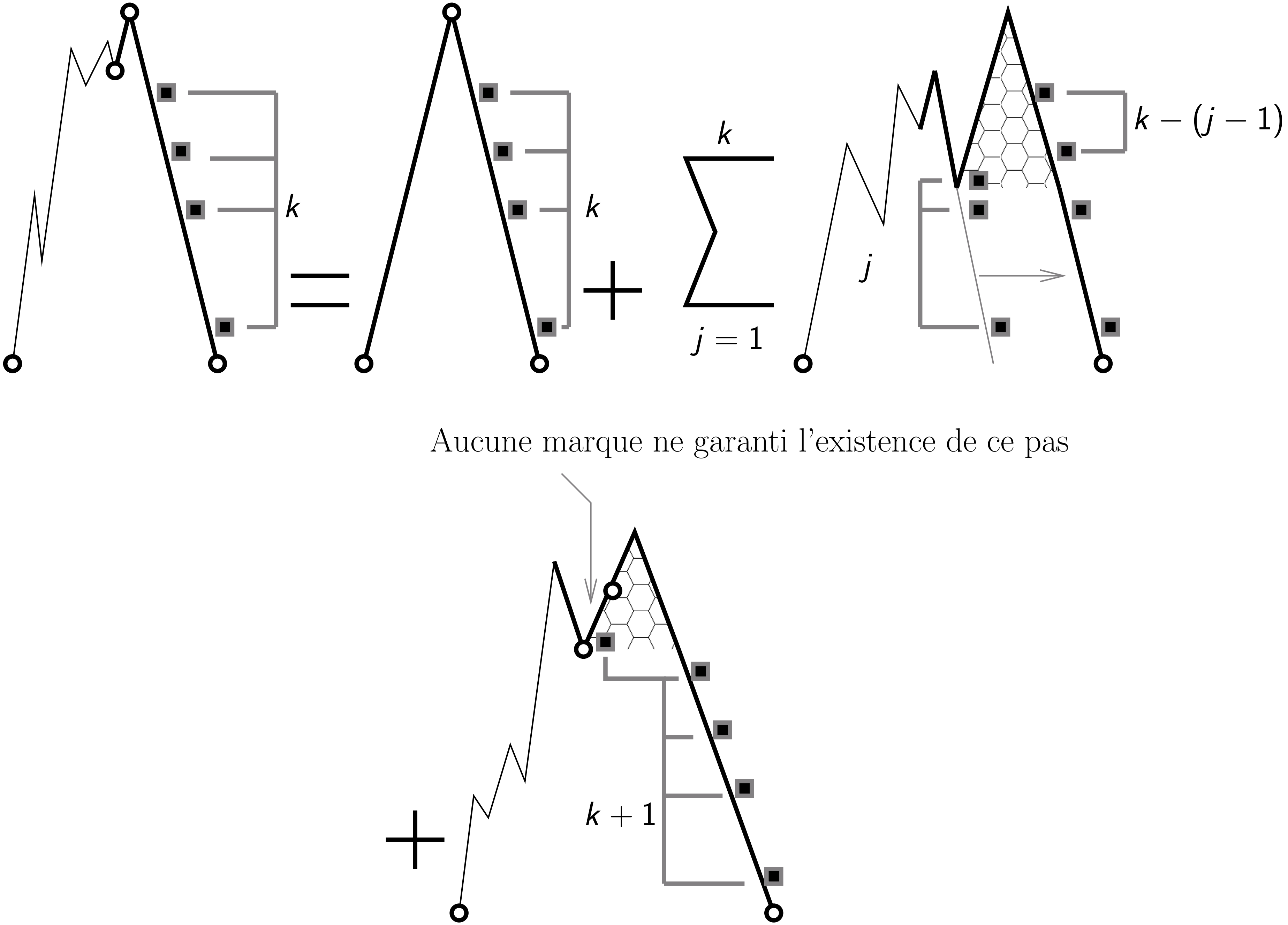
$$\frac{1}{n!}\frac{\partial^n}{\partial s^n}D(t;1) = \frac{t^n}{(1-t)^{n+1}} + \sum_{k=1}^{n}\frac{t^{n-k+1}}{(1-t)^{n-k+2}}\frac{1}{k!}\frac{\partial^k}{\partial s^k}D(t;1) + \frac{t}{1-t}\frac{1}{(n+1)!}\frac{\partial^{n+1}}{\partial s^{n+1}}D(t;1).$$

On tronque au rang N ce système linéaire (S_∞) sur les $(\frac{\partial^k}{\partial s^k}D(t;1))_{k\geq 0}$ en supposant $\frac{\partial^N}{\partial s^N}D(t;1)) = 0$ pour obtenir (S_N).
La résolution de (S_N) conduit à

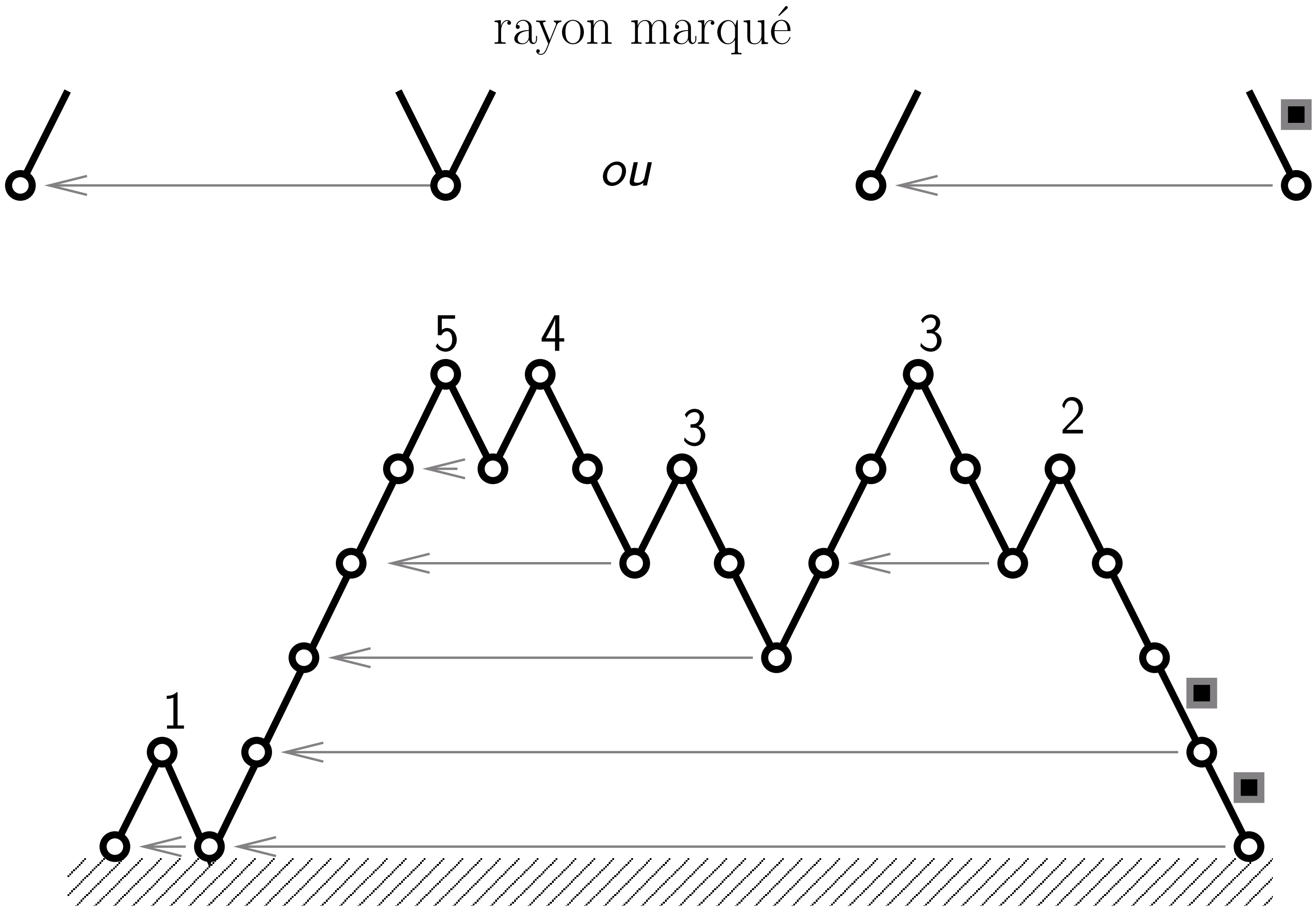
$$D_N(t;1) = \frac{T_{N-2}(-t)}{T_{N-1}(-t)}$$

où $T_N(t)$ est un polynôme de Tchebycheff.

Interprétation combinatoire du système

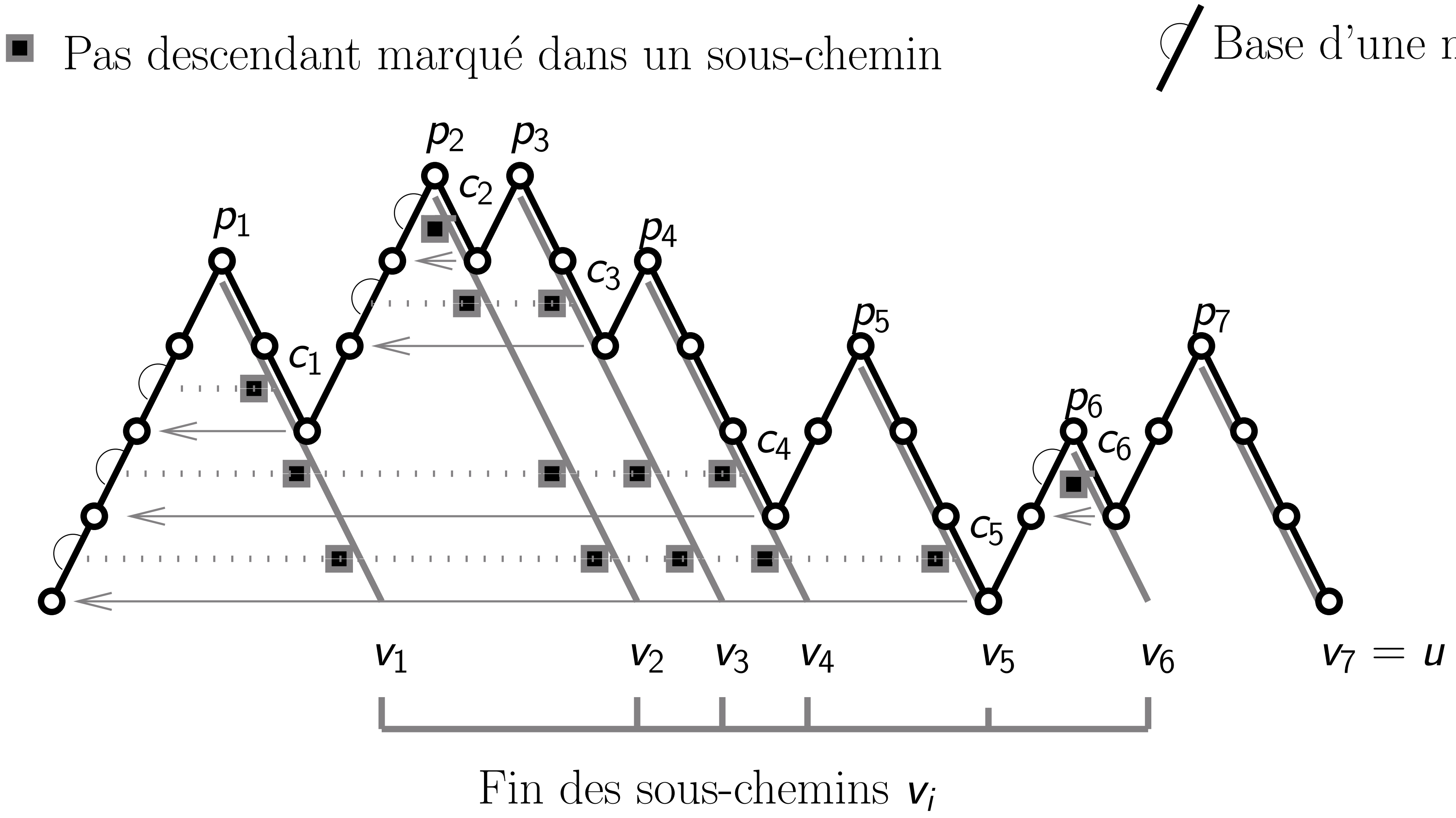


La hauteur de rayon d'un chemin de Dyck



Pour toute taille n, il y a autant de chemins de Dyck de hauteur de rayon au plus N que de chemins de Dyck de hauteur au plus $2N-1$.

Historique de la construction d'un chemin de Dyck



Application périodique de deux règles de réécriture

Entrée : Une suite quasi-décroissante

$s = (s_k)_{k=1\dots n}$.

Paramètre : Deux modes d'insertion

$m_1 = (B\overline{B}x, \overline{x}A\overline{A})$;

$m_2 = (A\overline{A}x, \overline{x}B\overline{B})$;

• *Chemin* $:= 0\overline{0}$;

• Pour tout s_k, k allant de 1 à n faire

-•- Effacer dans *Chemin* les marques

de rang strictement supérieur à s_k;

-•- Réécrire les marques s_k et $\overline{s_k}$ dans

Chemin selon m_1 si s_k est pair,

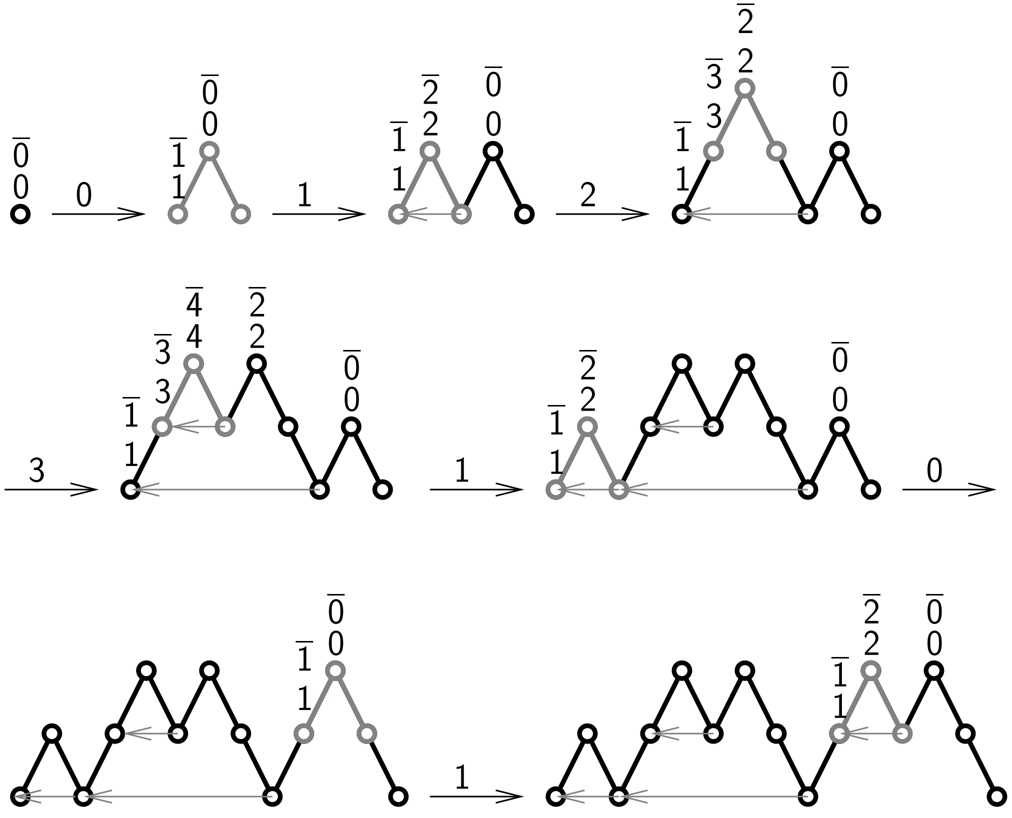
selon m_2 si s_k est impair;

FinPour

Sortie : *Chemin*

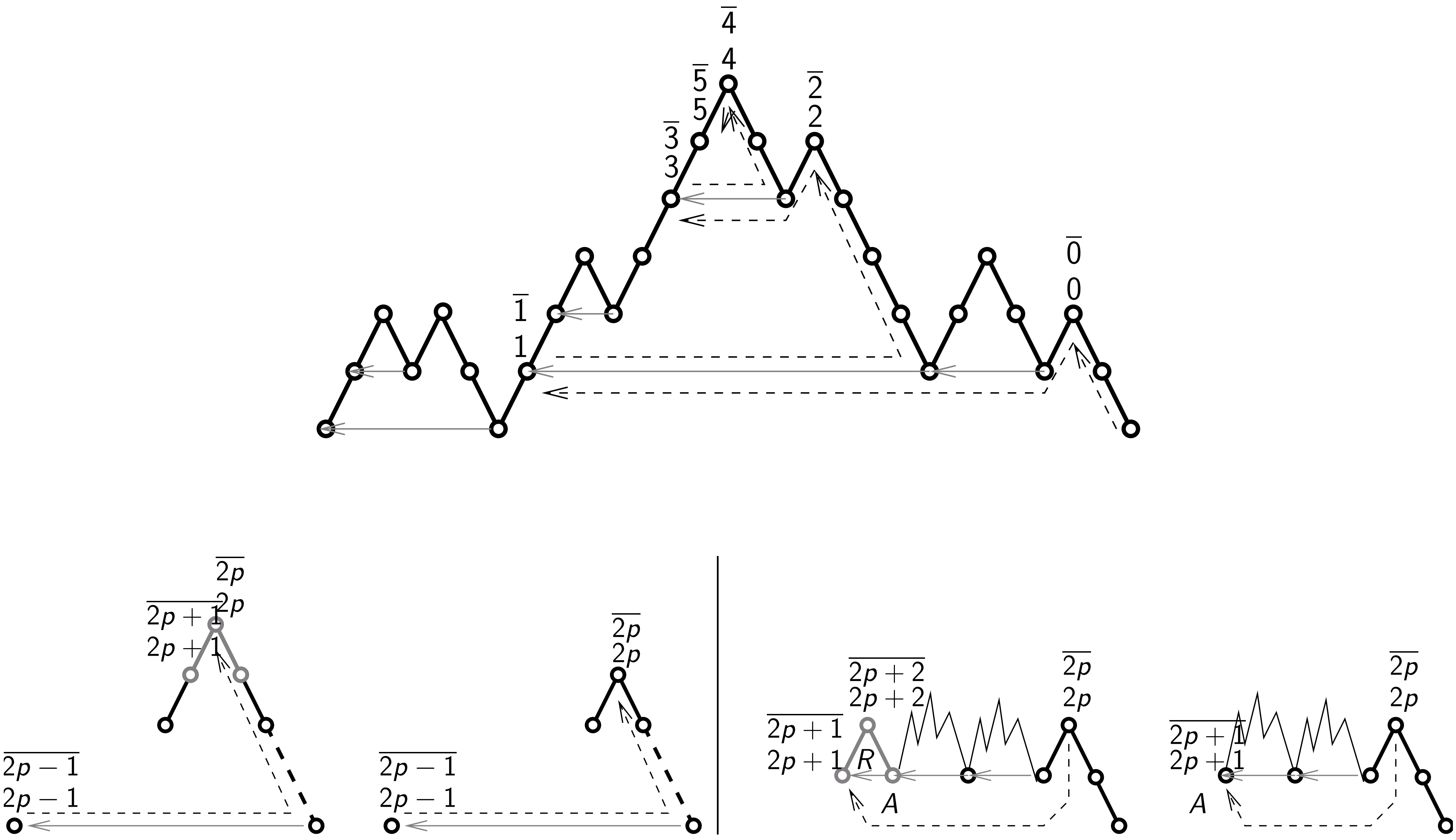
(où les marques ont été effacées).

Exemple: $s = 0, 1, 2, 3, 1, 0, 1$

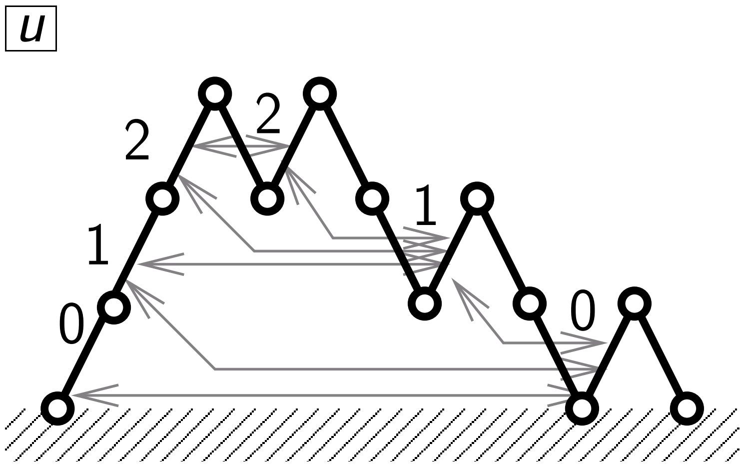


Une suite quasi-décroissante de hauteur 4 vers un chemin de hauteur de rayon 2.

Esquisse de preuve pour le caractère bijectif



L'aire et la statistique de Haiman



Paire de pas montants comptées par *dinv*.

$\boxed{dinv(u) = 7}$

La série génératrice des q, t-Catalan est

$$C(q,t;y) = \sum_{u \in Dyck} q^{aire(u)} t^{dinv(u)} y^n$$

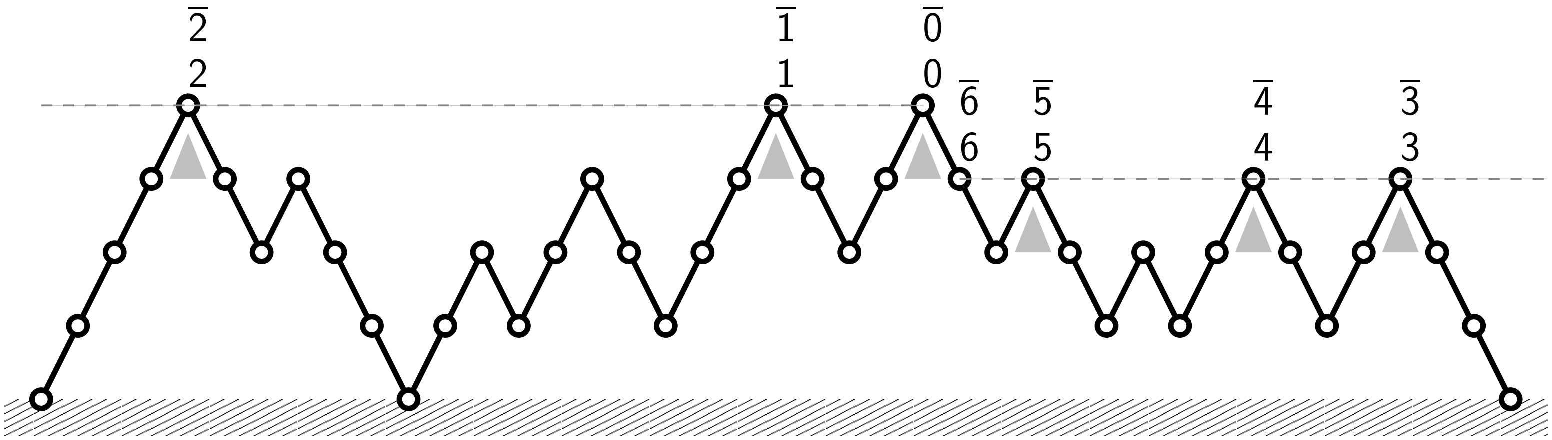
où n est la taille de u, et $dinv(u)$ la valeur de la statistique de Haiman pour u.
On aimerait prouver à l'aide d'une bijection que

$$C(q,t;y) = C(t,q;y).$$

(il existe une définition naturellement symétrique)

Une procédure d'insertion pour la statistique de Haiman

- L'insertion d'un pic dans la dernière descente définie une bijection f telle que l'aire du chemin $f(s)$ soit égale à la somme des valeurs de s ($\sum_{k=1}^{n} s_k$).
- On cherche une bijection g telle que la somme des valeurs de s soit $dinv(g(s))$, la statistique de Haiman de $g(s)$.
- Le nombre de sommets à hauteur maximum et de sommet à hauteur quasi-maximum à droite du dernier maximum fournit un analogue à la dernière descente. (*cf.* parcours en largeur d'un arbre planaire)



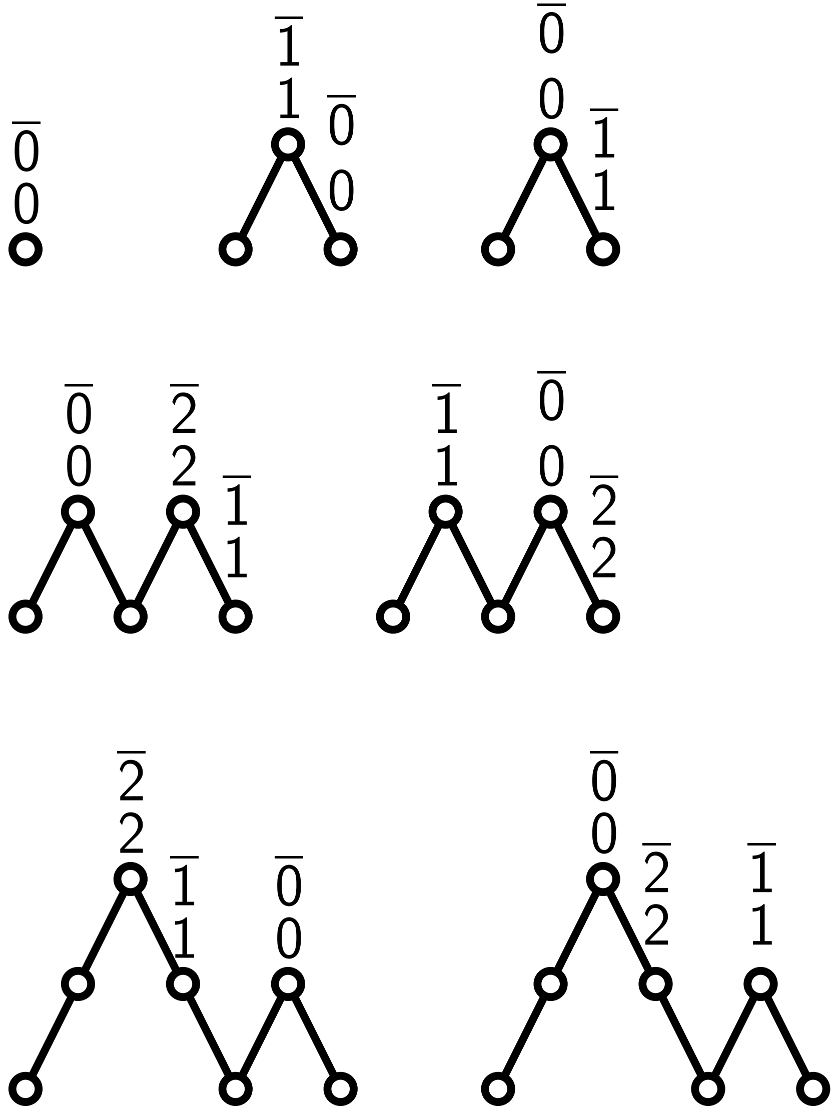
Suites quasi-décroissantes et statistique de Haiman

Entrée : Une suite quasi-décroissante
$s = (s_k)_{k=1\ldots n}$.
Paramètre : Un mode d'insertion
$m = (B\overline{B}x, \overline{x}A\overline{A})$;

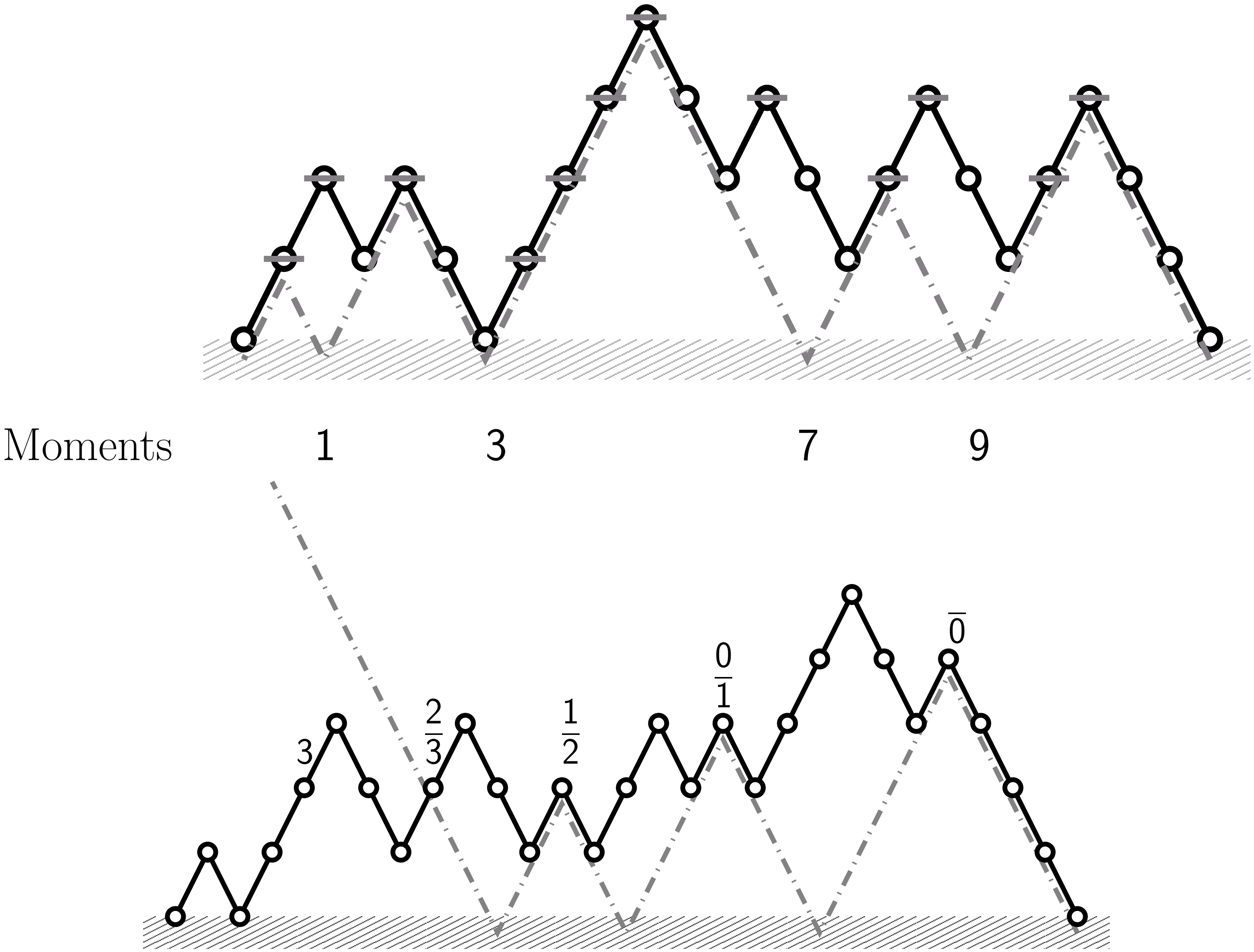
- *Chemin* $:= 0\overline{0}$;
- Pour tout s_k, k allant de 1 à n faire

-•- Effacer dans *Chemin* les marques
de rang strictement supérieur à s_k;
-•- Réécrire les marques s_k et $\overline{s_k}$ dans
Chemin selon le mode m;
-•- Permuter cycliquement les marques;
$(A := A + 1 \mod s_k + 1, \overline{A} := \ldots)$;
FinPour

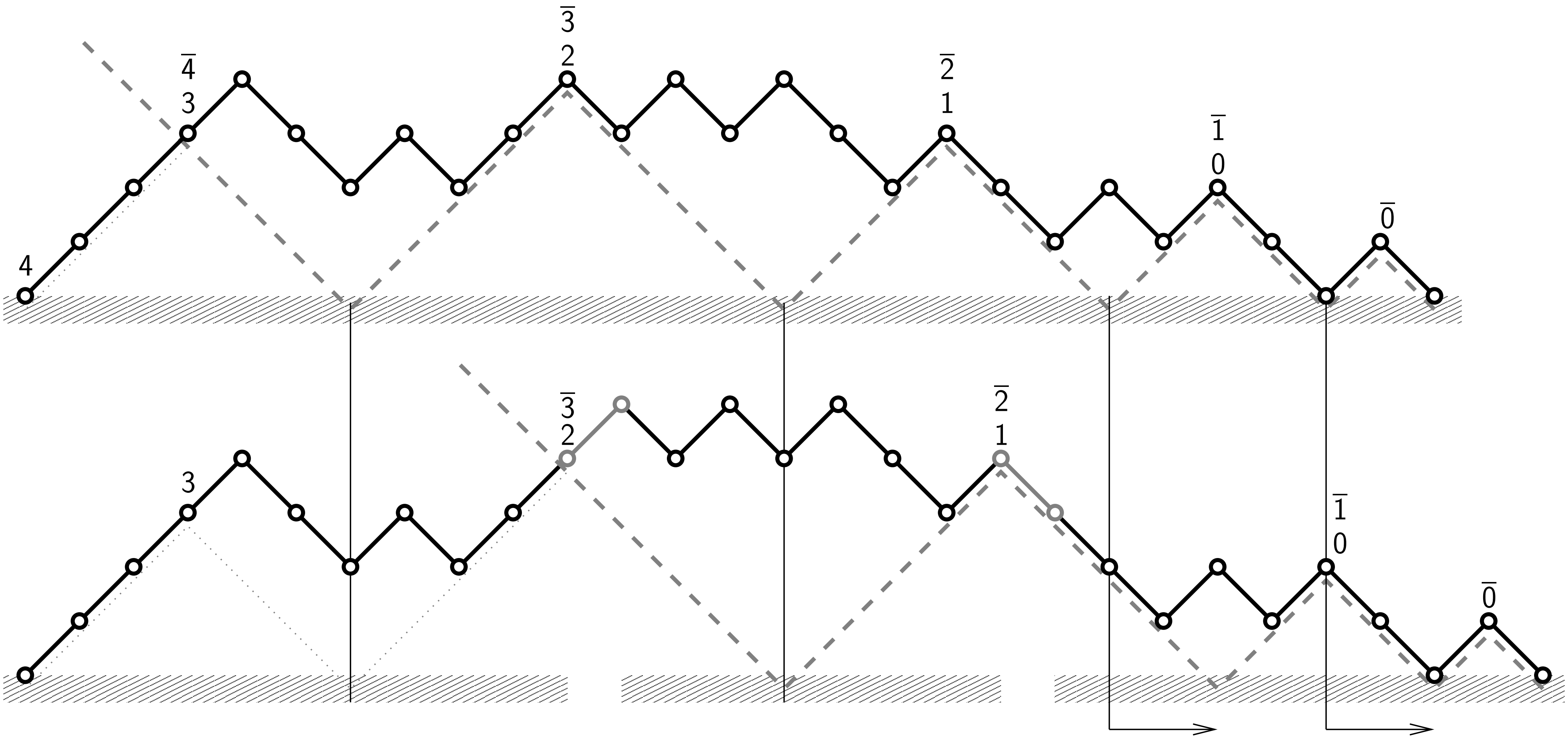
Sortie : *Chemin*
(où les marques ont été effacées).



L'aire et la statistique de Haglund

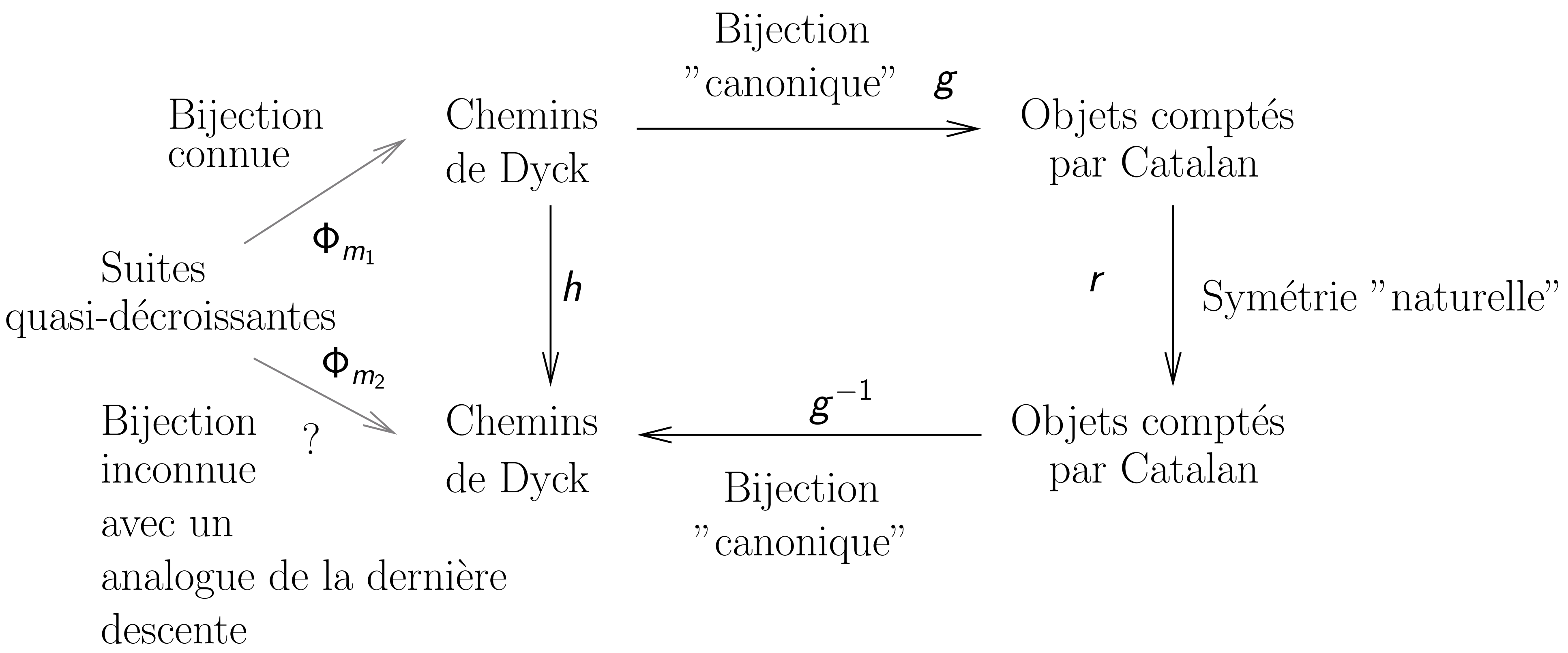


Une procédure d'insertion pour la statistique de Haglund



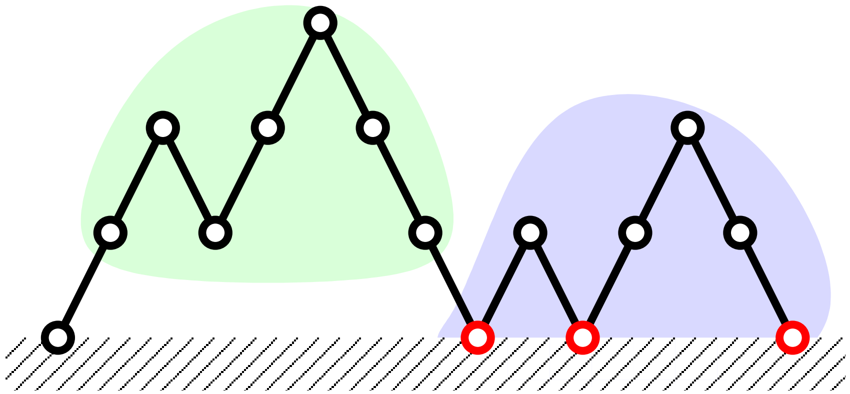
Conjecture : Il existe un mode d'insertion utilisant 2 types de marques supplémentaires permettant d'actualiser ces marques.

Symétries naturelles sur les objects comptés par Catalan

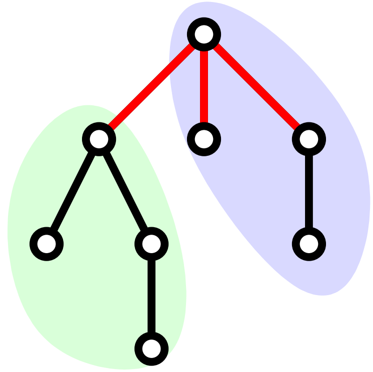


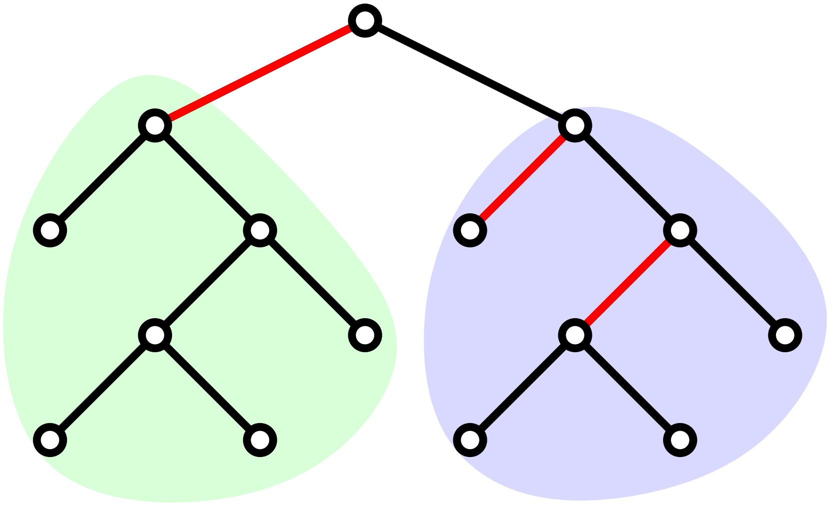
Exemple : La symétrie des triangulations de polygones

Chemin de Dyck

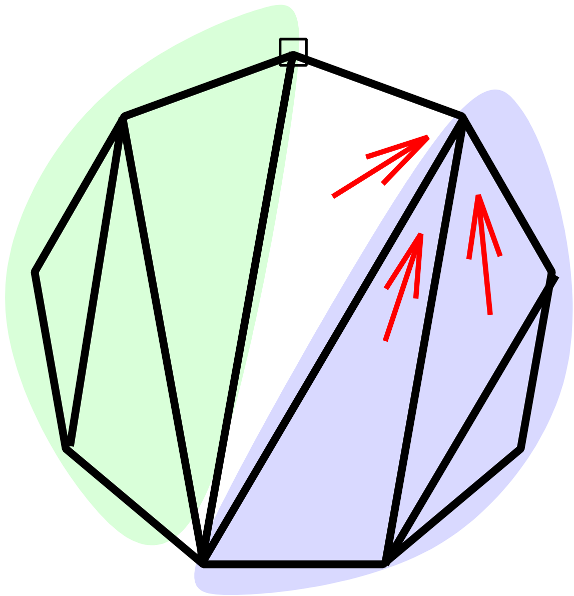


Arbre planaire



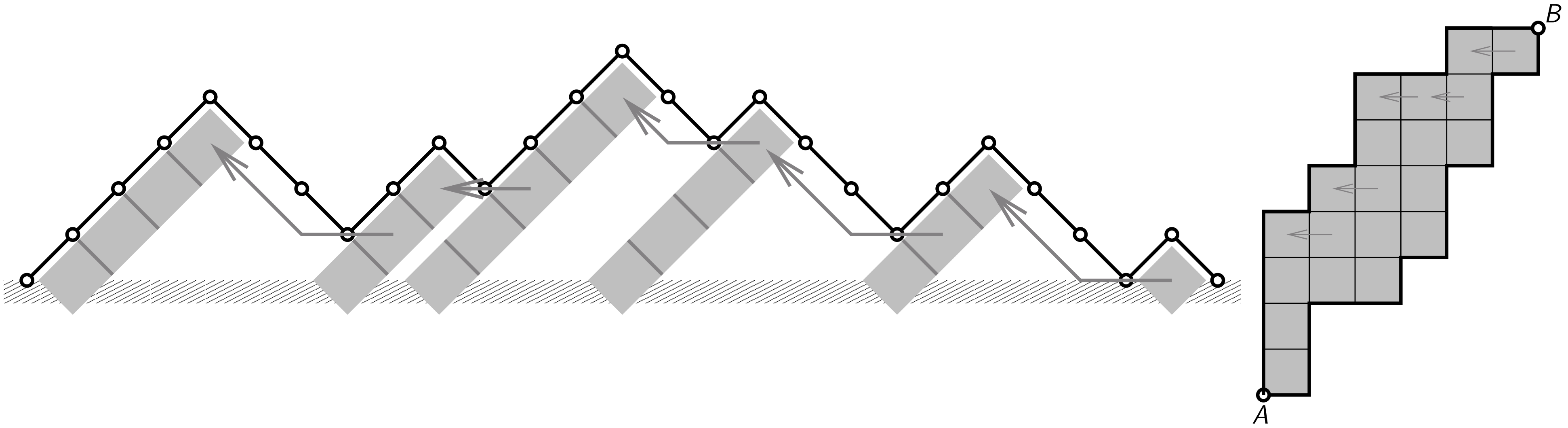


Arbre binaire

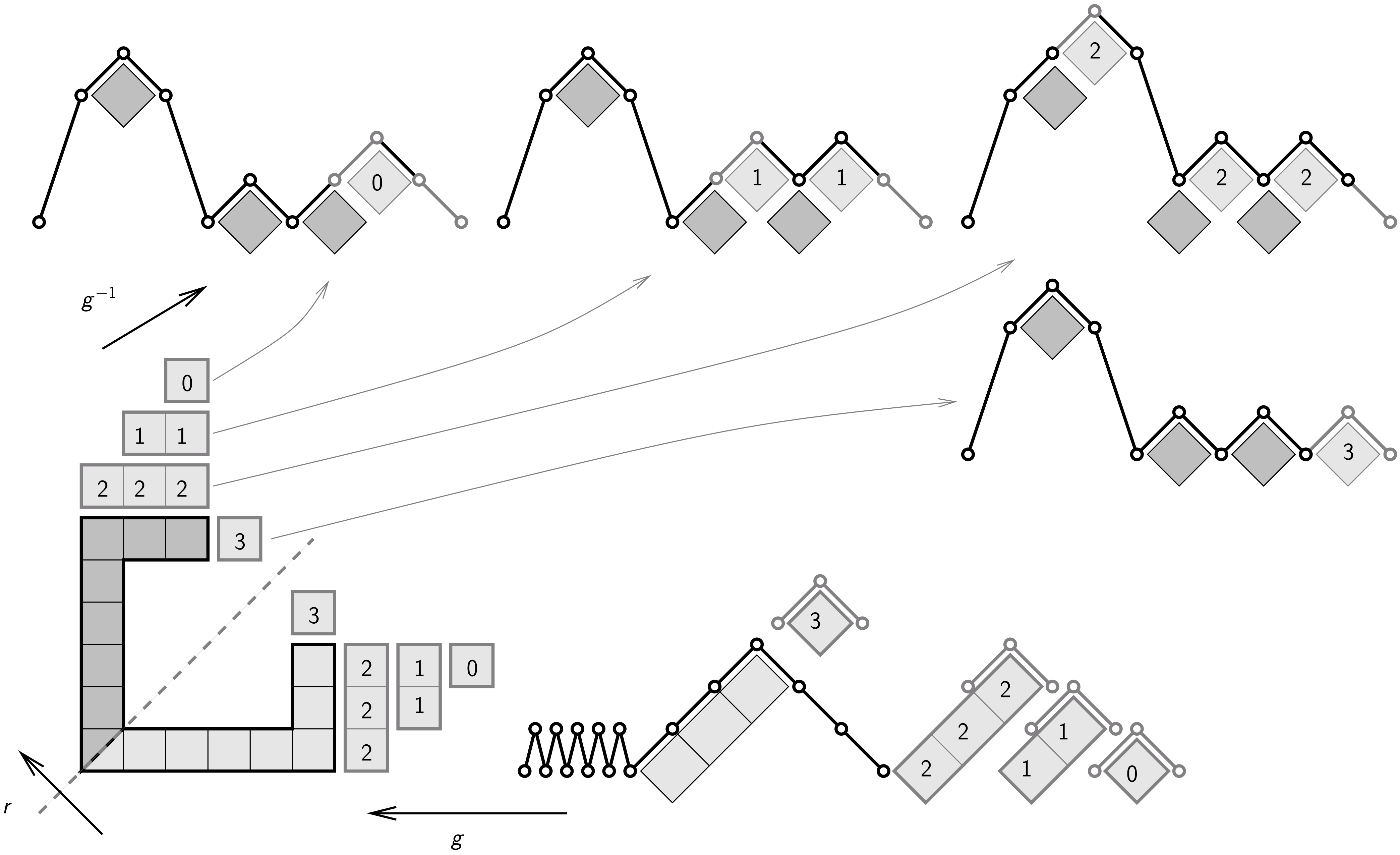


Triangulation de polygone

Polyominos parallélogrammes et Chemins de Dyck



Reflexion par rapport à la première diagonale



Une variante de l'algorithme

Entrée : Une suite quasi-décroissante

$s = (s_k)_{k=1\dots n}$.

Paramètre : Deux modes d'insertion

$m_1 = \sigma \circ (xB, \overline{x}A\overline{BA})$;

$m_2 = (xA, \overline{x}B\overline{BA})$;

- *Chemin* $:= 0\overline{0}$;
- Pour tout s_k, k allant de 1 à n faire

-•- Effacer dans *Chemin* les marques de rang strictement supérieur à s_k;

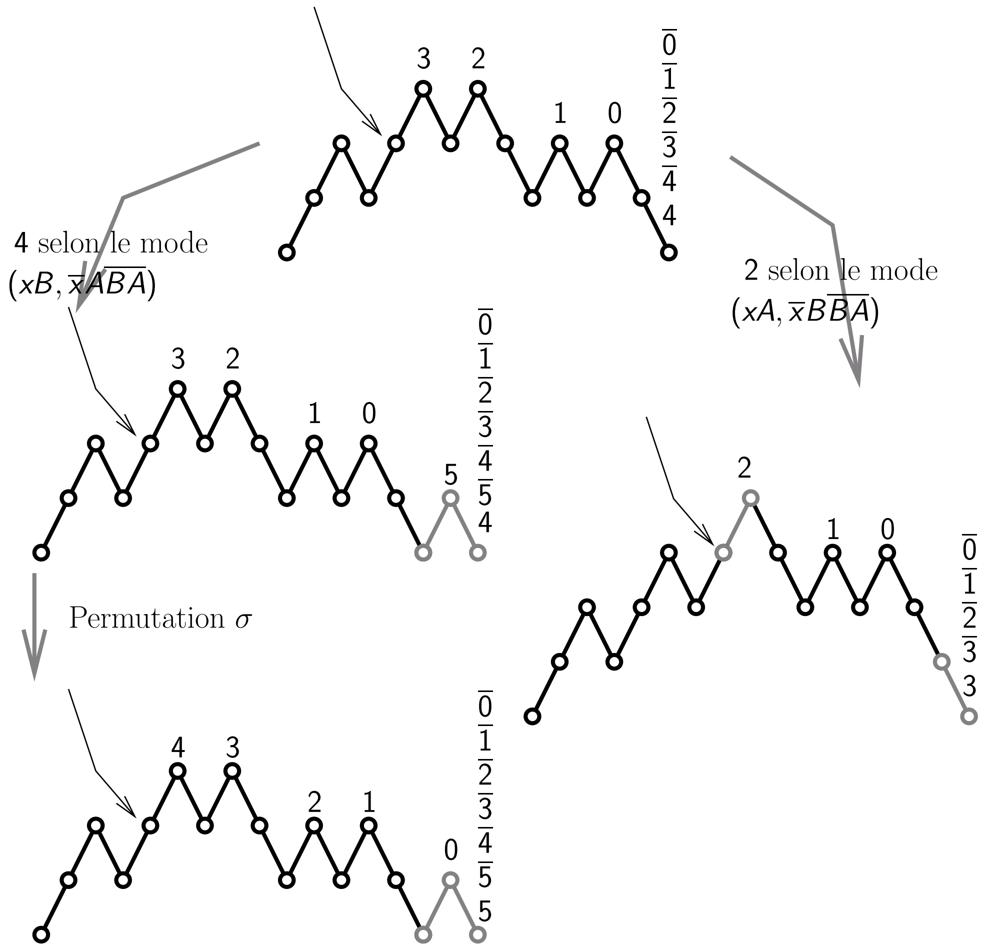
-•- Réécrire les marques s_k et $\overline{s_k}$ dans *Chemin* selon le mode d'insertion

m_1 si $s_k > s_{k-1}$;

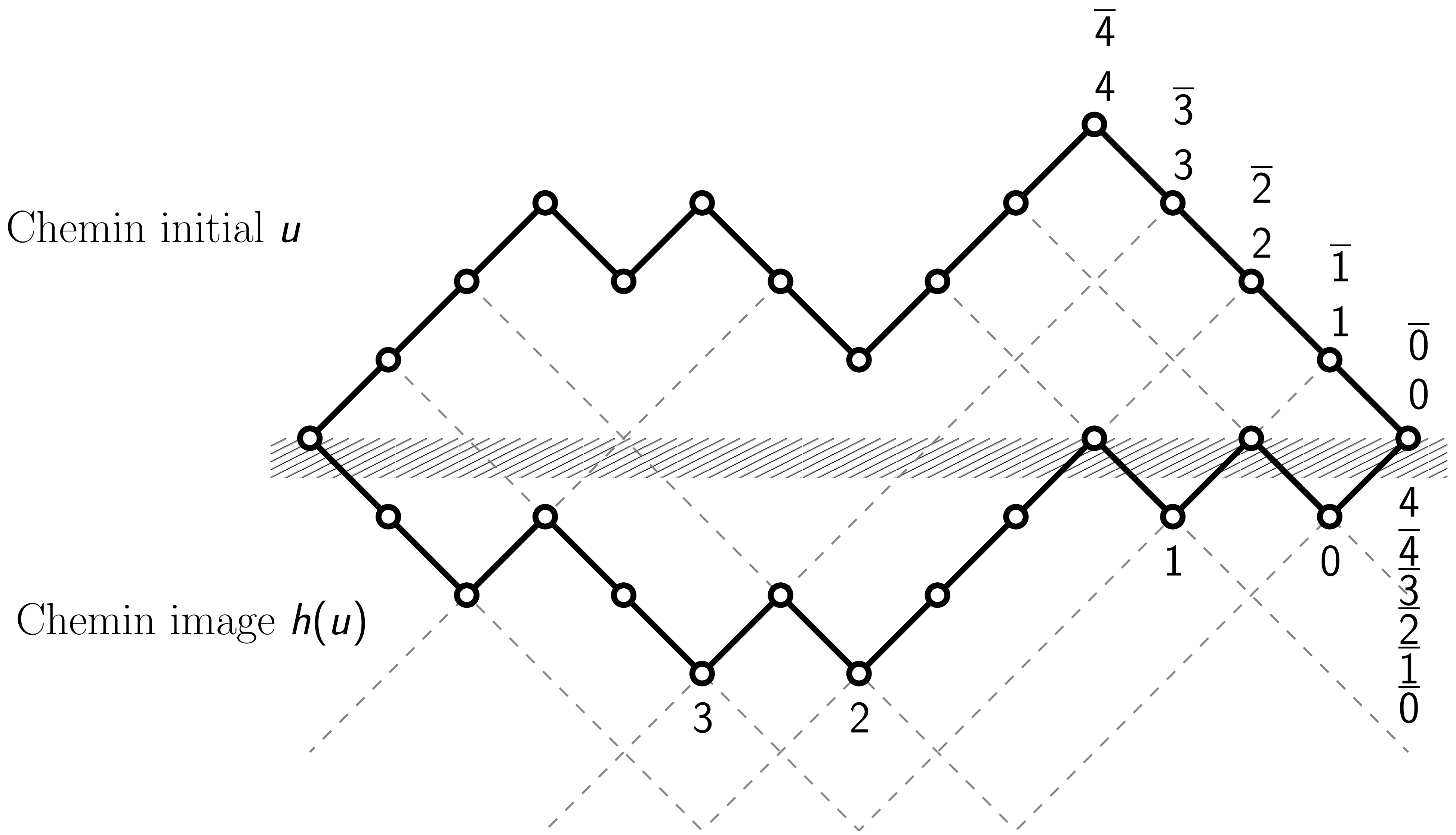
m_2 sinon;

FinPour

Sortie : *Chemin*



Une involution de Kreweras



Une vue d'ensemble

$$
\begin{tikzcd}
 & \text{Chemins de Dyck} \arrow[rr, "{[\text{Delest/Viennot}]}", "g"'] \arrow[dd, "{[\text{Kreweras}]}"] & & \text{Polyominos Parallélogramme} \arrow[dd, "\text{Reflexion Diagonale principale}"] \\
\text{Suites quasi-décroissantes} \arrow[ur, "{(B\overline{B}x, A\overline{A}\overline{x})}"] \arrow[dr, "{[\sigma \circ (xB, \overline{x}A\overline{BA})|(xA, \overline{x}B\overline{BA})]}"'] & & & \\
 & \text{Chemins de Dyck} & & \text{Polyominos Parallélogramme} \arrow[ll, "g^{-1}"', "{[\text{Viennot/Delest}]}"]
\end{tikzcd}
$$