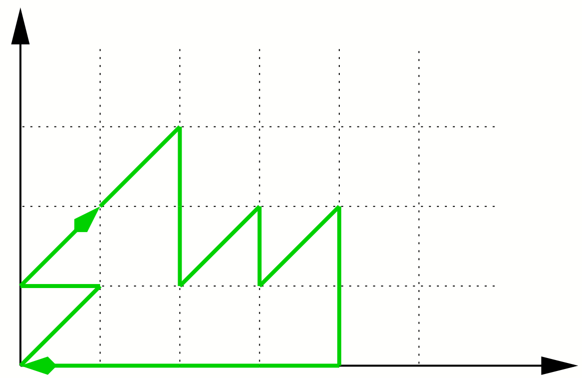
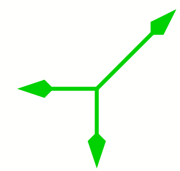
Chemins de Kreweras
et
Triangulations sans boucle

Olivier Bernardi - LaBRI

Octobre 2005, Bordeaux

Chemins de Kreweras





Chemins faits de pas Sud, $Ouest$ et $Nord-Est$, partant et revenant à l'origine et confinés dans le premier quadrant.

Chemins de Kreweras

Théorème (Kreweras 65) : Le nombre de chemins de Kreweras de taille n ($3n$ pas) est

$$k_n = \frac{4^n}{(n+1)(2n+1)}\binom{3n}{n}.$$

La série génératrice $K(z) = \sum_{n\geq 0} k_n z^n$ est algébrique.

Chemins de Kreweras et cartes cubiques

- Cartes cubiques et arbres d'exploration.
- Bijection :

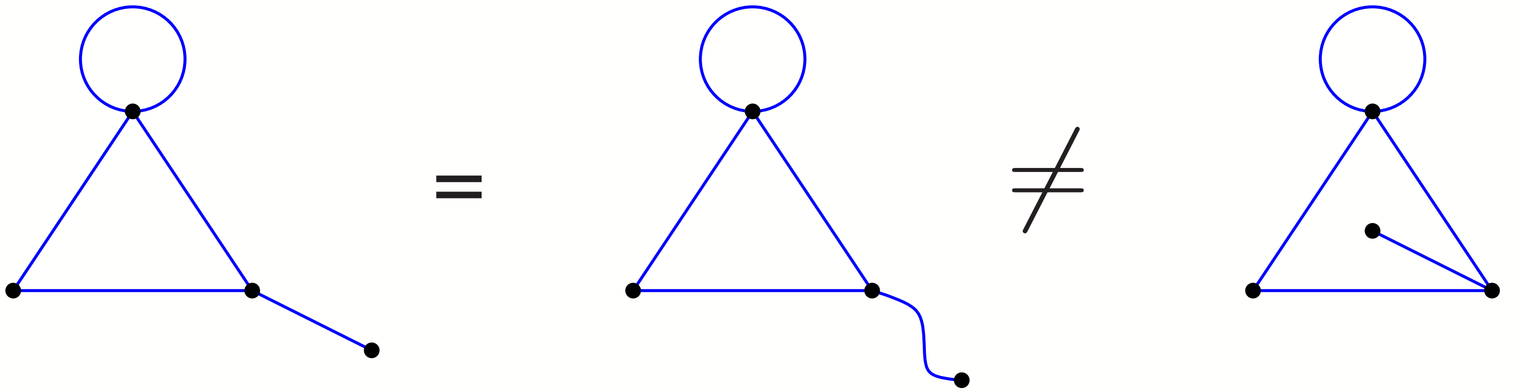
  Chemin de Kreweras $\Longleftrightarrow$ Carte cubique + Arbre d'exploration

- Comptage des chemins de Kreweras et des cartes cubiques.
- Questions et perspectives.

Cartes cubiques et arbres d’exploration

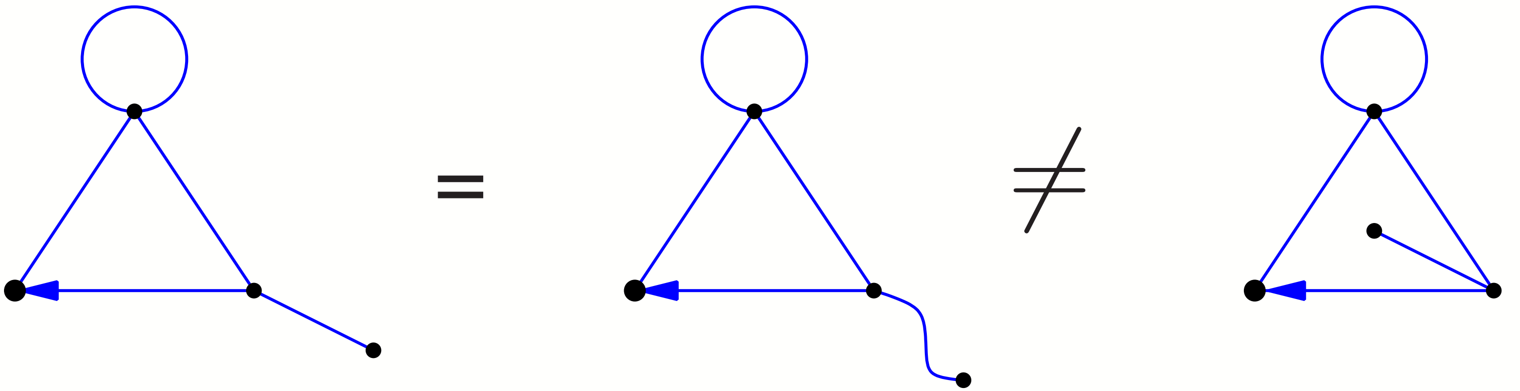
Cartes

Une **carte** est un graphe planaire connexe plongé dans la sphère.
La carte est considérée à déformation près.



Cartes

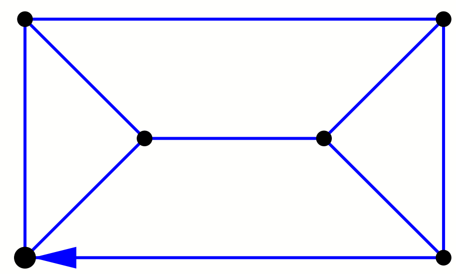
Une **carte** est un graphe planaire connexe plongé dans la sphère.
La carte est considérée à déformation près.



Une carte est **enracinée** si une demi-arête est distinguée comme étant la **racine**.

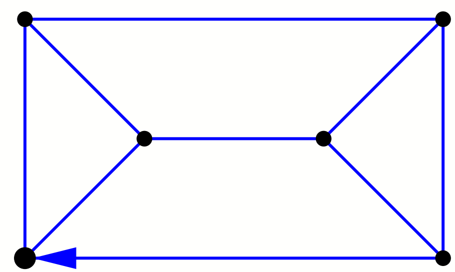
Cartes cubiques

Une carte est **cubique** si tous ses sommets ont degré 3.

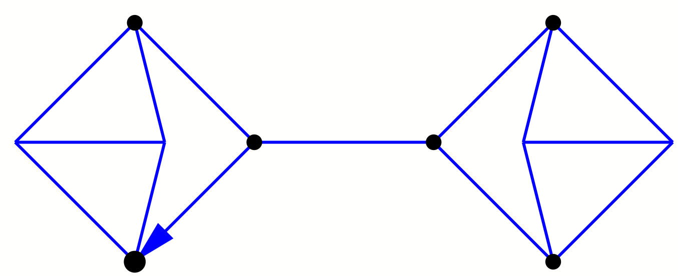


Cartes cubiques

Une carte est **cubique** si tous ses sommets ont degré 3.



On s'intéresse aux cartes cubiques *sans isthme*.

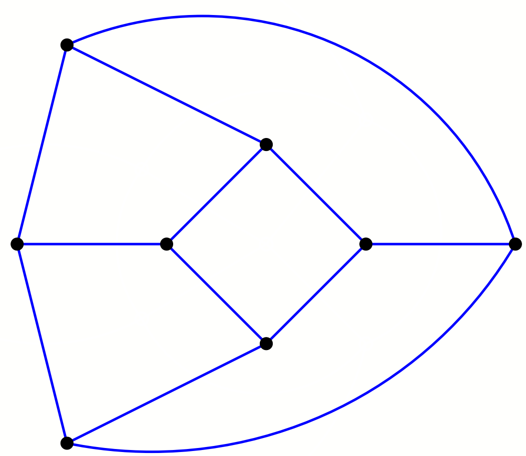


Cartes cubiques et triangulations

Remarque : Les cartes cubiques sans isthme sont les duales des triangulations sans boucle.

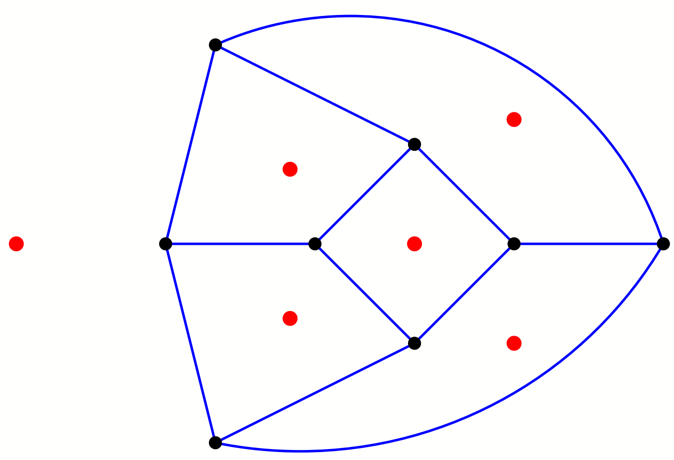
Cartes cubiques et triangulations

Remarque : Les cartes cubiques sans isthme sont les duales des triangulations sans boucle.



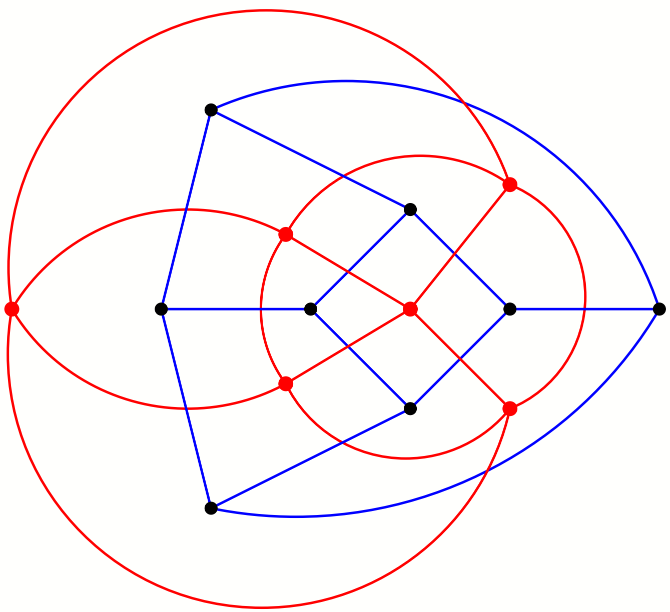
Cartes cubiques et triangulations

Remarque : Les cartes cubiques sans isthme sont les duales des triangulations sans boucle.



Cartes cubiques et triangulations

Remarque : Les cartes cubiques sans isthme sont les duales des triangulations sans boucle.



Cartes cubiques - comptage

Remarque : Le nombre d'arêtes d'une carte cubique est multiple de 3.

Une carte cubique de taille n a $3n$ arêtes, $2n$ sommets et $n+2$ faces.

Cartes cubiques - comptage

Remarque : Le nombre d'arêtes d'une carte cubique est multiple de 3.

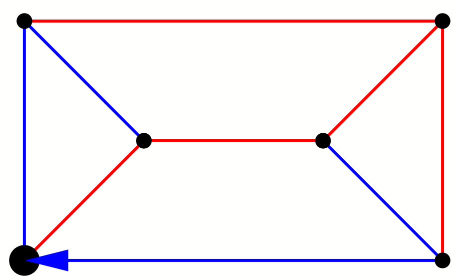
Une carte cubique de taille n a $3n$ arêtes, $2n$ sommets et $n+2$ faces.

Théorème (Mullin 65) :
Le nombre de cartes cubiques sans isthme de taille n est

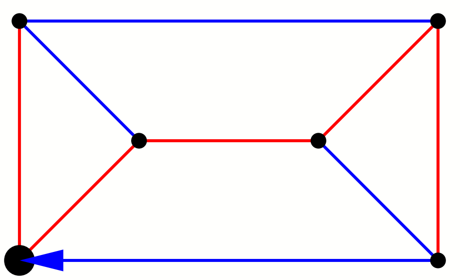
$$c_n \;=\; \frac{2^n}{(n+1)(2n+1)}\binom{3n}{n} \;=\; \frac{k_n}{2^n}\;.$$

Arbres d’exploration

Un arbre couvrant d’une carte enracinée est **d’exploration** si toute arête qui n’est pas dans l’arbre relie un sommet à l’un de ses ancêtres.



OUI



NON

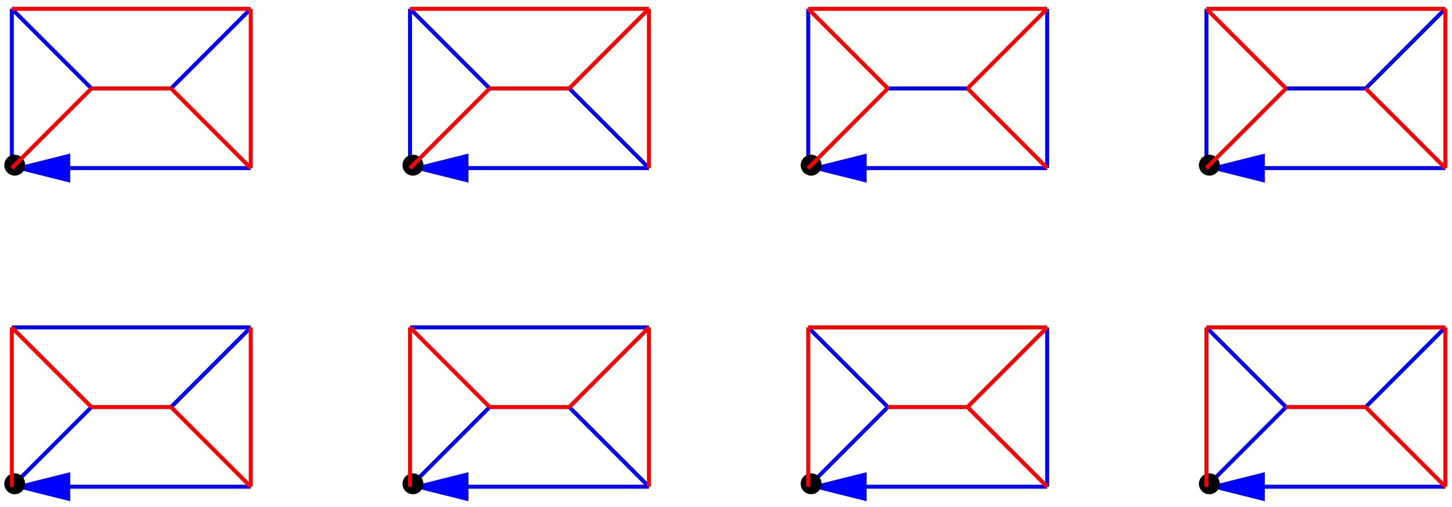
Arbres d'exploration

Théorème : Pour toute carte cubique de taille n ($3n$ arêtes) il existe 2^n arbres d'exploration ne contenant pas la racine.

Arbres d'exploration

Théorème : Pour toute carte cubique de taille n ($3n$ arêtes) il existe 2^n arbres d'exploration ne contenant pas la racine.

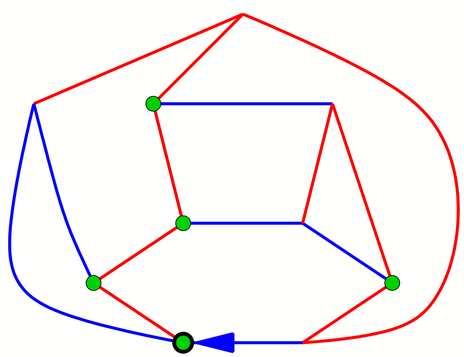
Exemple : n=3



Arbres d'exploration

Intuition de la preuve :

- Les arbres d'exploration sont les arbres obtenus par des algorithmes *d'exploration en profondeur d'abord* (DFS).
- Durant un telle exploration, on fait n choix binaires *réels*. (Un pour chaque arête hors de l'arbre.)



$ggddd$

Chemin de Kreweras

$\Longleftrightarrow$

Carte cubique + Arbre d'exploration

Chemin de Kreweras

$$\Longleftrightarrow$$

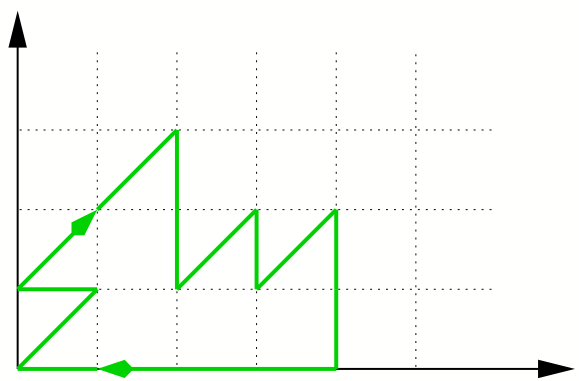
Carte cubique + Arbre d'exploration

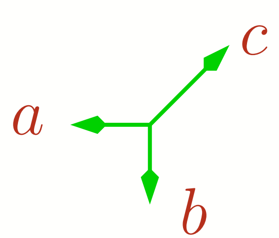
$$k_n \quad = \quad c_n \quad \times \quad 2^n$$

Remarques préliminaires

Les chemins de Kreweras sont les mots w sur $\{a, b, c\}$ tels que

- $|w|_a = |w|_b = |w|_c$,
- Pour tout préfixe w', $|w'|_a \leq |w'|_c$ et $|w'|_b \leq |w'|_c$.



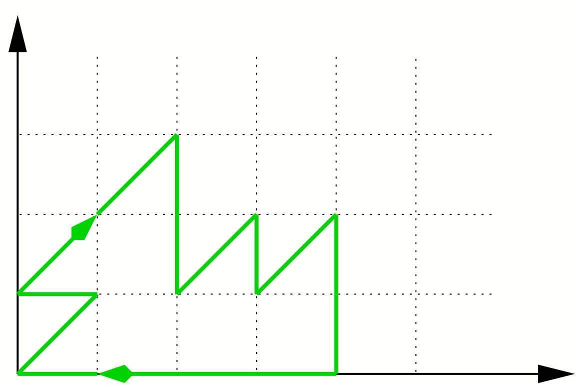


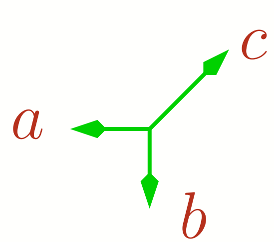
$$w = caccbbcbcbbaaaa$$

Remarques préliminaires

Les chemins de Kreweras sont les mots w sur $\{a, b, c\}$ tels que

- $|w|_a = |w|_b = |w|_c$,
- pour tout suffixe w', $|w'|_a \geq |w'|_c$ et $|w'|_b \geq |w'|_c$.



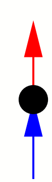


$$w = caccbbcbcbbaaaa$$

Bijection

Exemple :

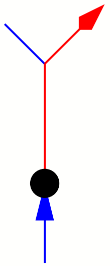
$w = caccbbcbcbbaaaa$



Bijection

Exemple :

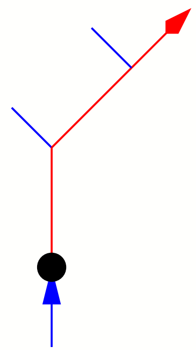
$w = caccbbcbcbbaaa\color{red}{a}$



Bijection

Exemple :

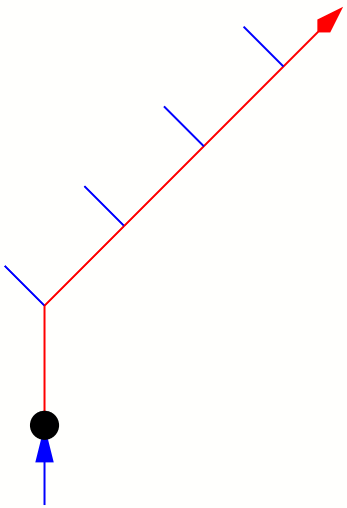
$w = caccbbcbcbbaa\textcolor{red}{aa}$



Bijection

Exemple :

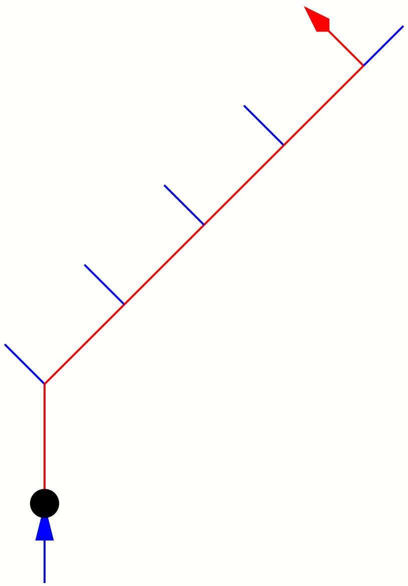
$w = caccbbcbcbbaaaa$



Bijection

Exemple :

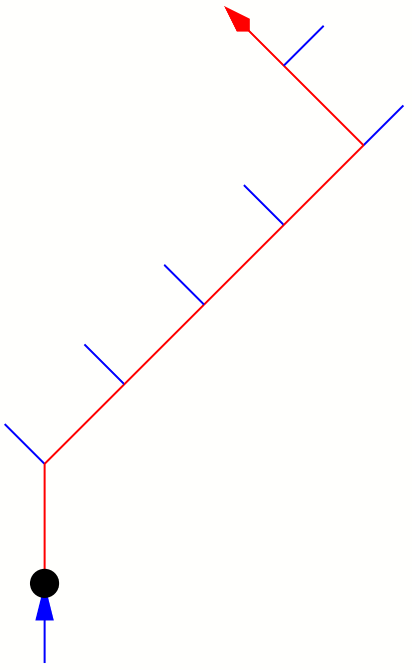
$w = caccbbcbcb\textcolor{red}{baaaa}$



Bijection

Exemple :

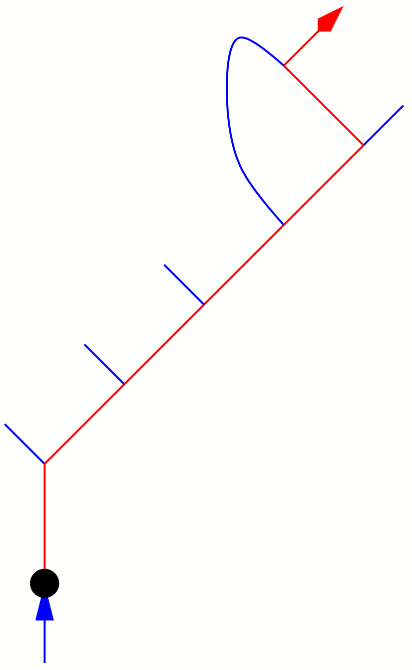
$w = caccbbcbc{\color{red}bbaaaa}$



Bijection

Exemple :

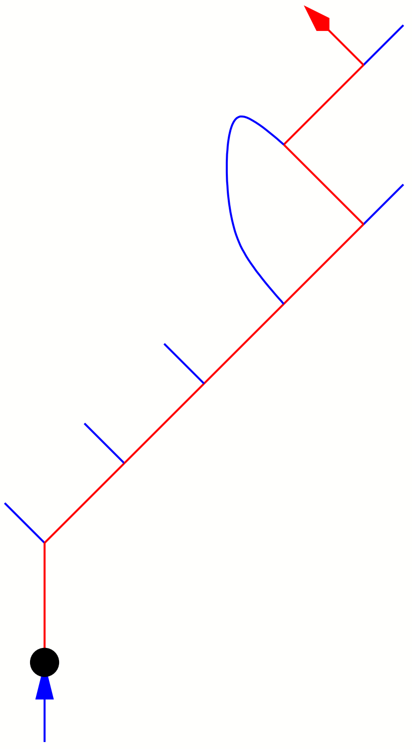
$w = caccbbcbcbbaaaa$



Bijection

Exemple :

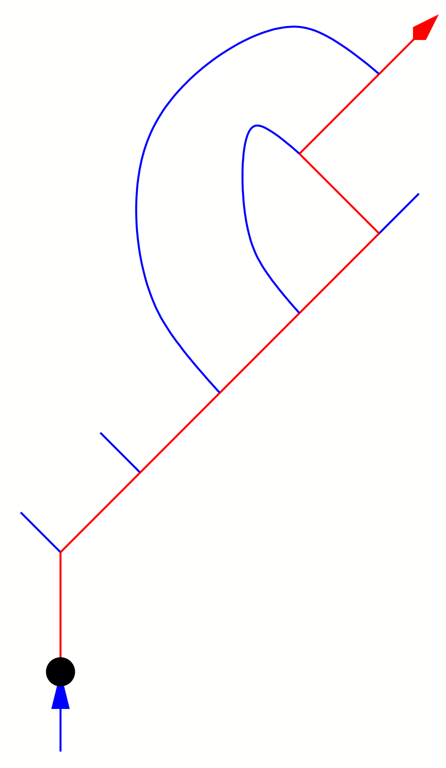
$w = caccbbc\textcolor{red}{bcbbaaaa}$



Bijection

Exemple :

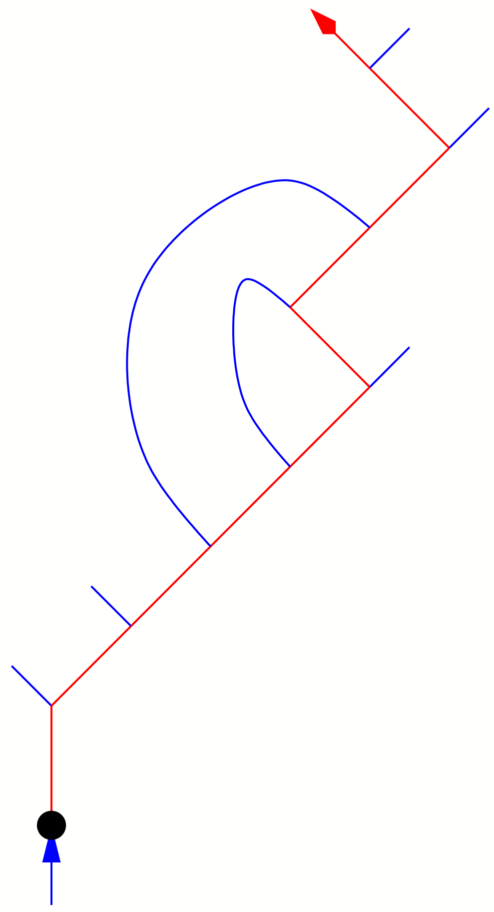
$w = caccbbcbcbbaaaa$



Bijection

Exemple :

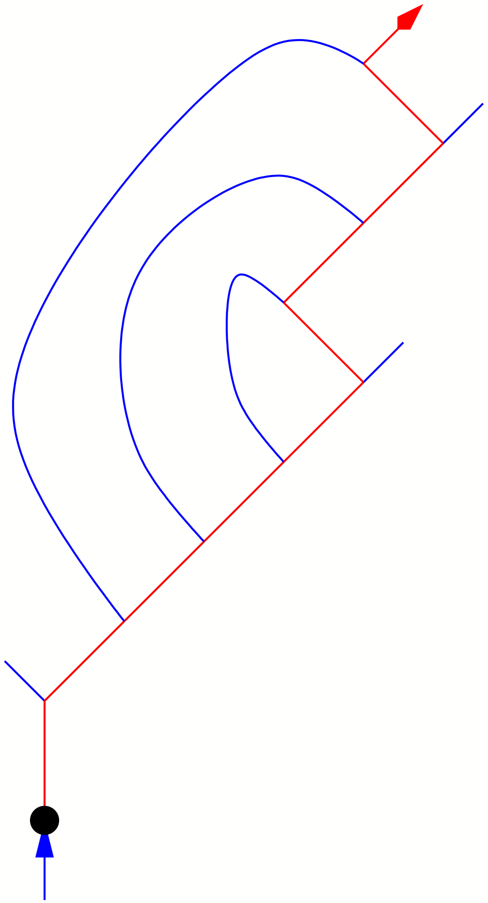
$w = cacc\color{red}{bbcbcbbaaaa}$



Bijection

Exemple :

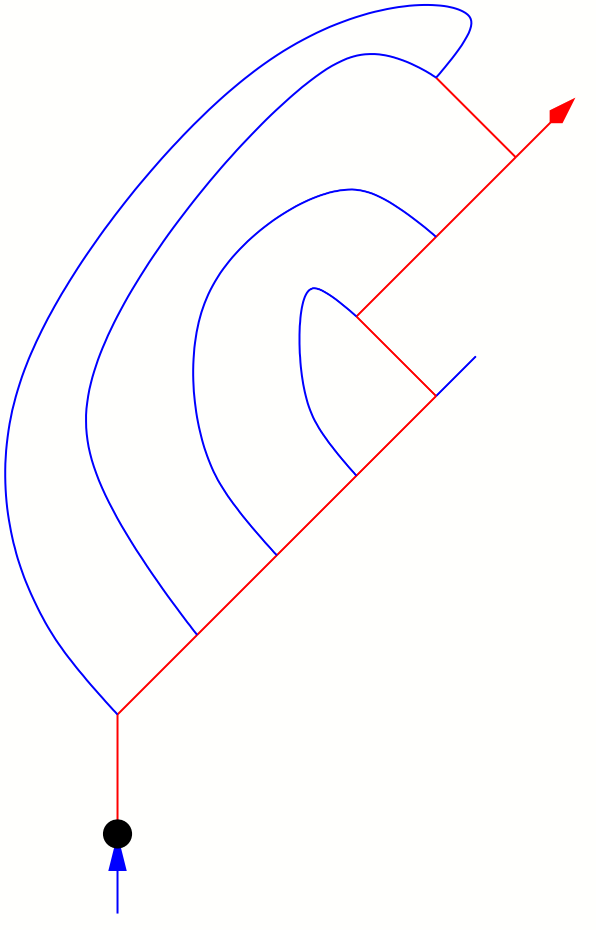
$w = cac\textcolor{red}{cbbcbcbbaaaa}$



Bijection

Exemple :

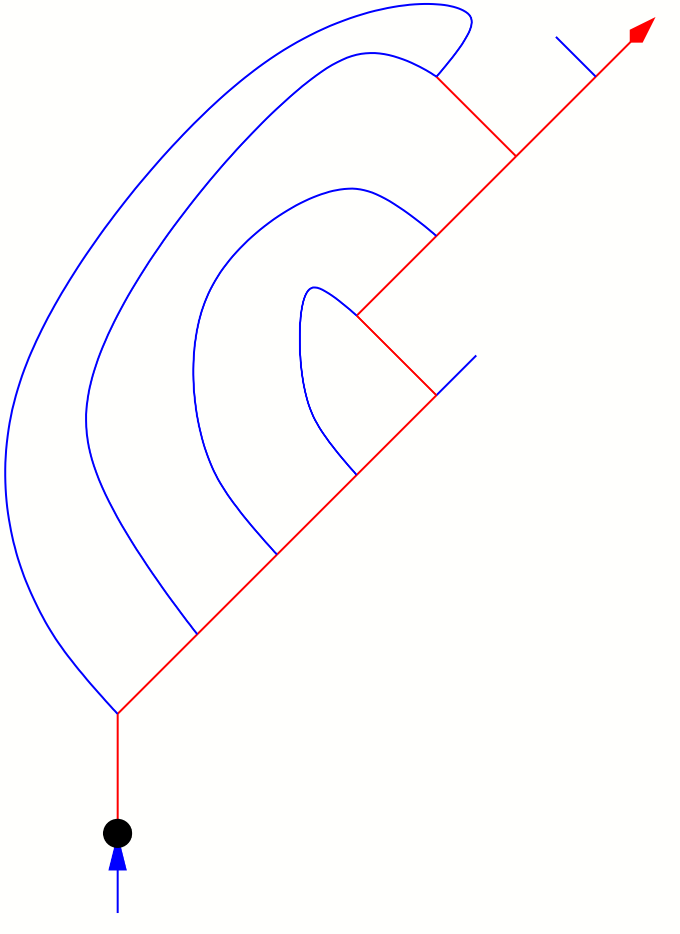
$w = ca\color{brown}{ccbbcbcbbaaaa}$



Bijection

Exemple :

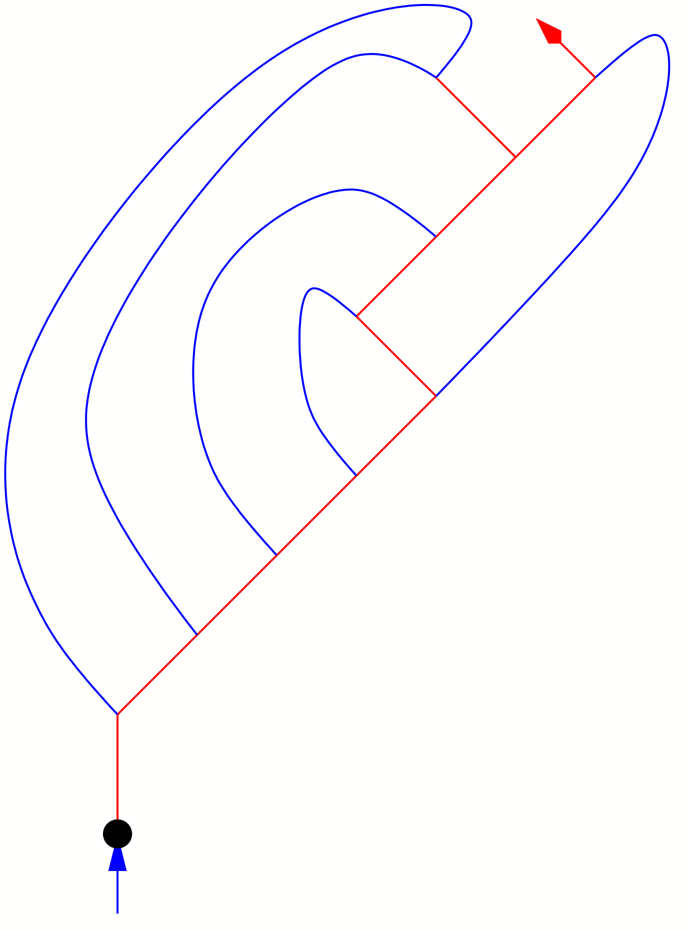
$w = c\color{red}{accbbcbcbbaaaa}$



Bijection

Exemple :

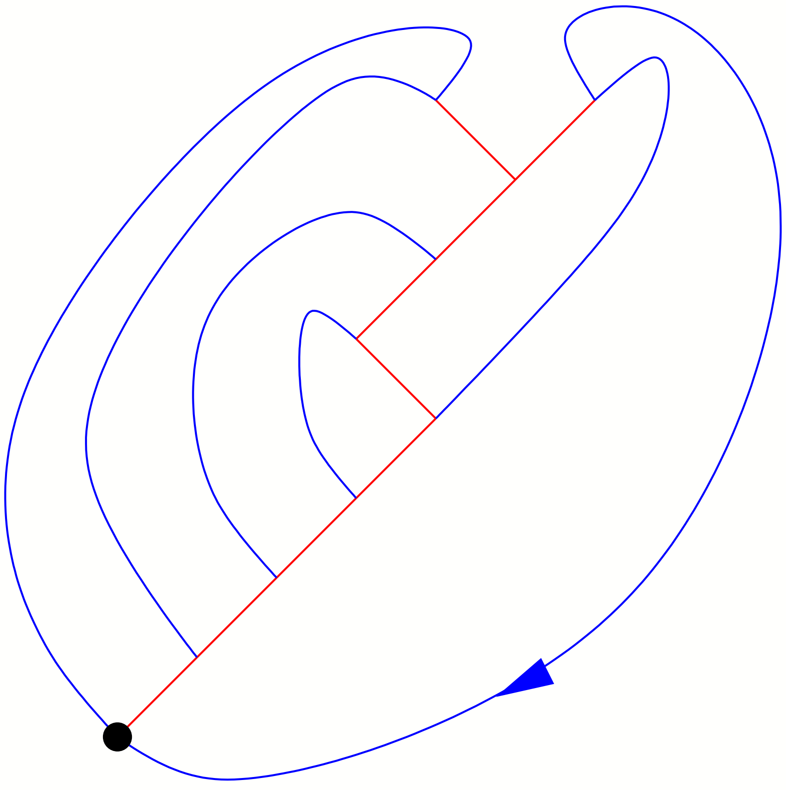
$w = caccbbcbcbbaaaa$



Bijection

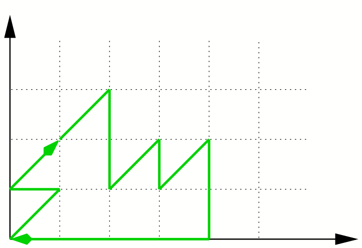
Exemple :

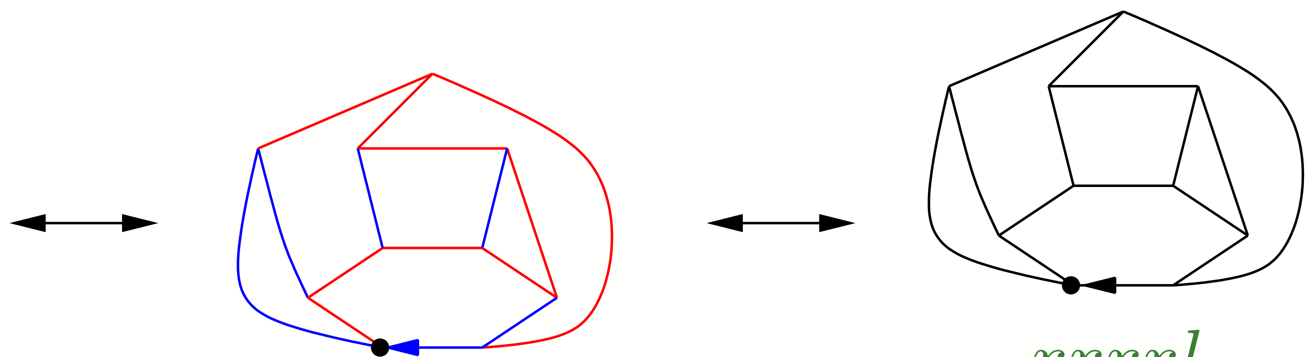
$w = caccbbcbcbbaaaa$



Théorème : Cette construction est une bijection entre les chemins de Kreweras de taille n et les cartes cubiques de taille n **+** un arbre d'exploration.

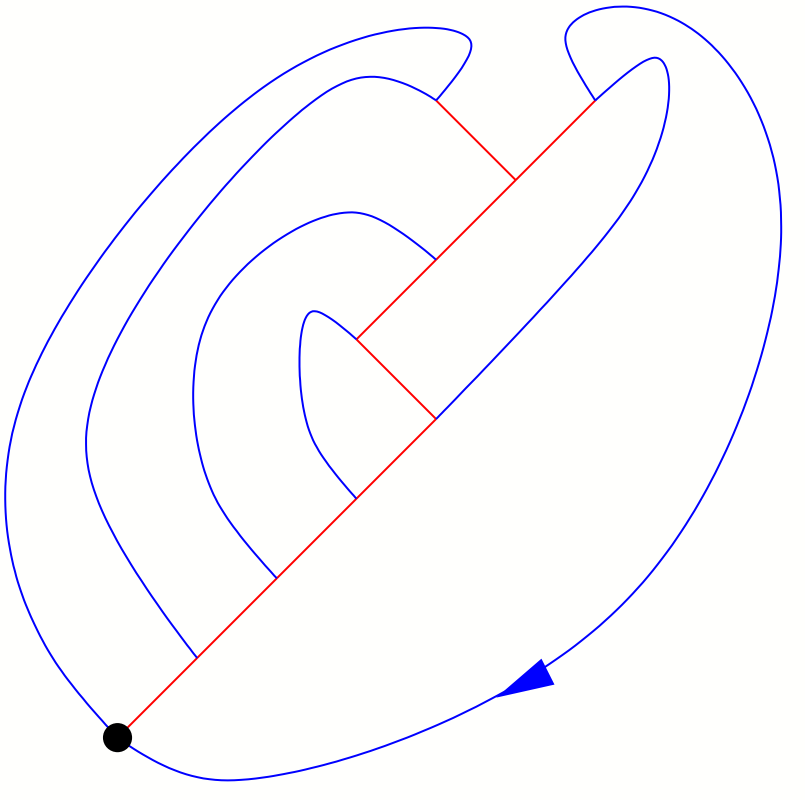
Corollaire : $k_n = c_n \times 2^n$.





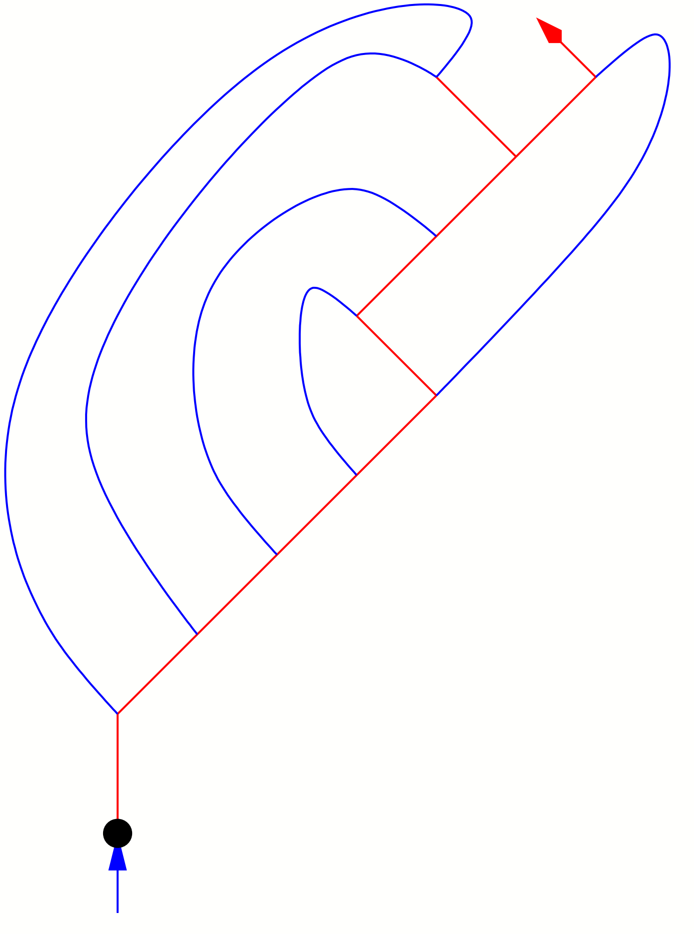
Preuve : La bijection inverse.

$w = caccbbcbcbbaaaa$



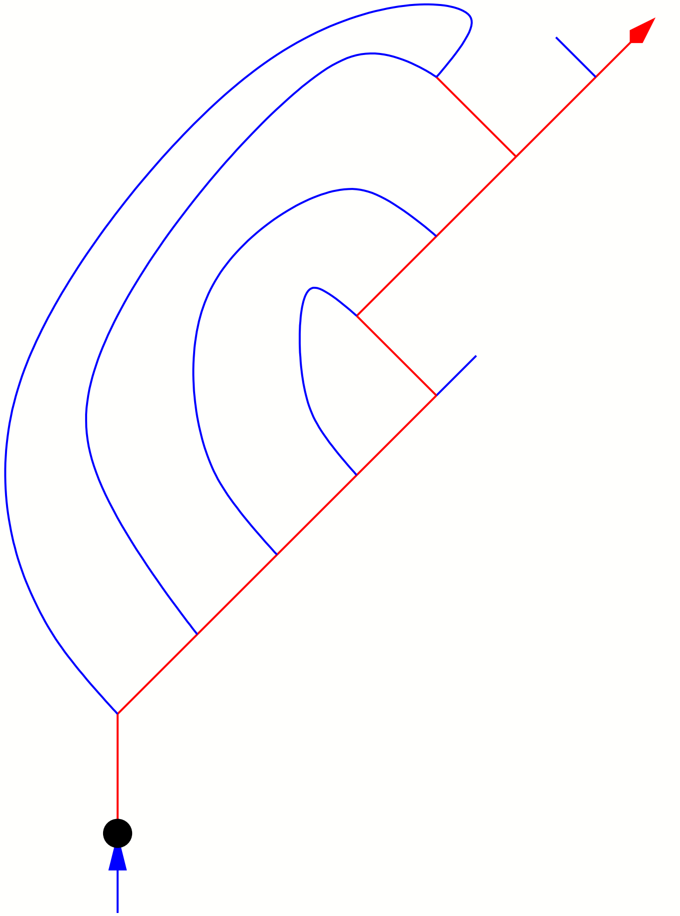
Preuve : La bijection inverse.

$w = caccbbcbcbbaaaa$



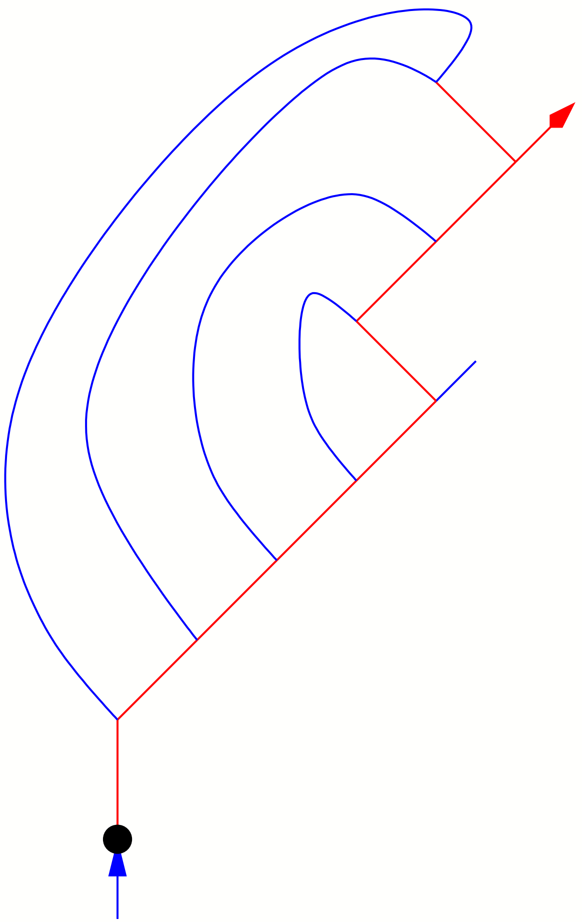
Preuve : La bijection inverse.

$w = caccbbcbcbbaaaa$



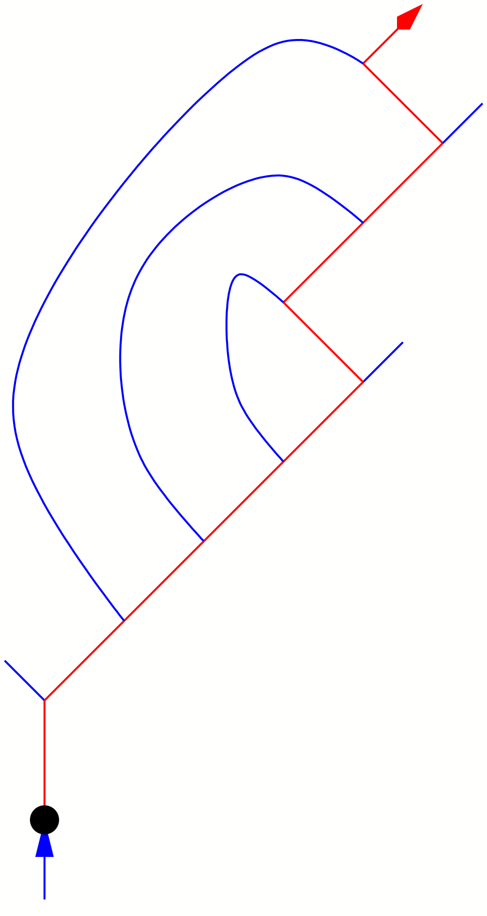
Preuve : La bijection inverse.

$w = ca\color{red}{ccbbcbcbbaaaa}$



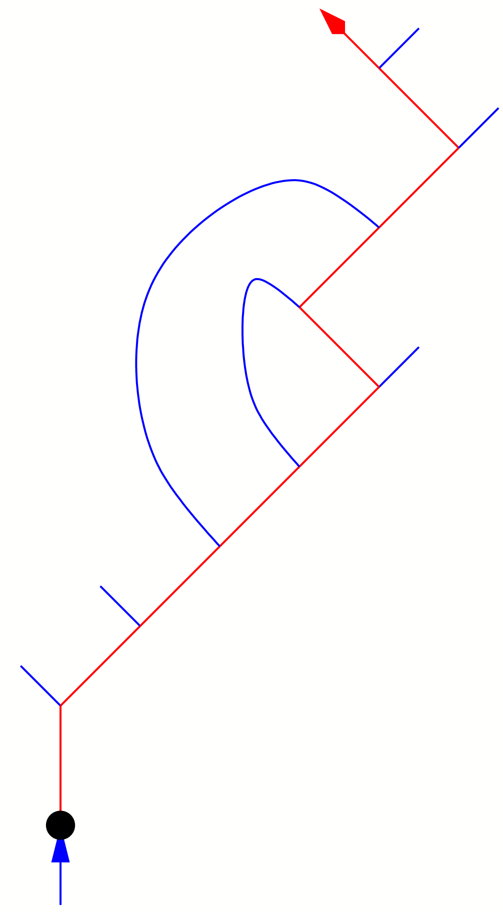
Preuve : La bijection inverse.

$w = cac\textcolor{red}{cbbcbcbbaaaa}$



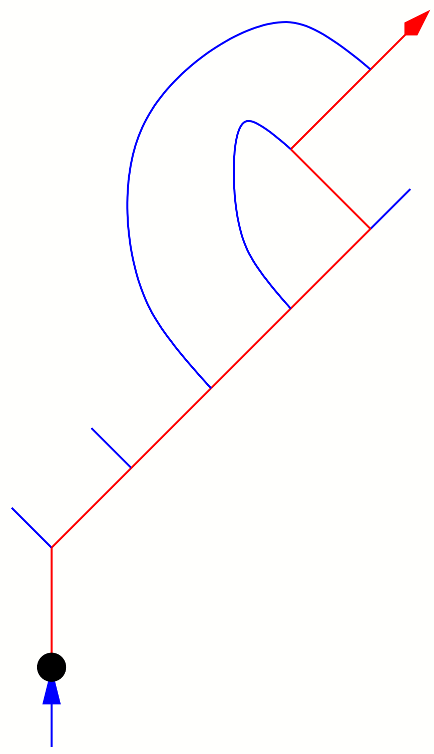
Preuve : La bijection inverse.

$w = cacc\color{red}{bbcbcbbaaaa}$



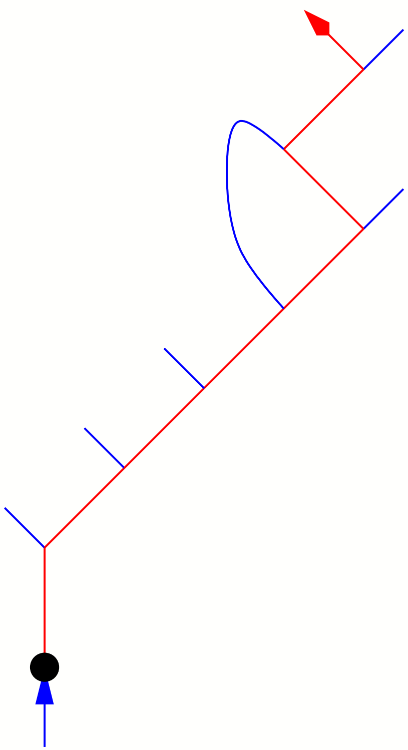
Preuve : La bijection inverse.

$w = caccbb\textcolor{red}{cbcbbaaaa}$



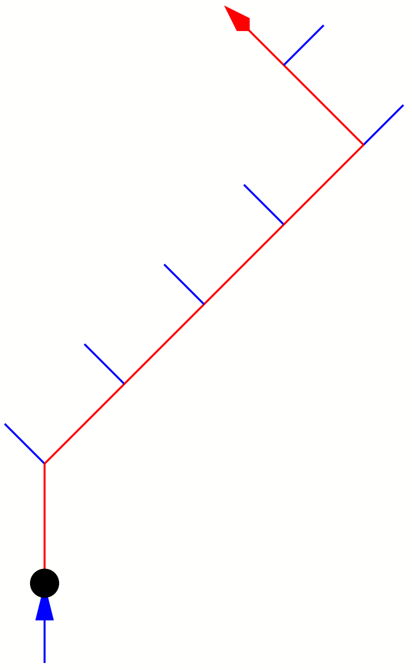
Preuve : La bijection inverse.

$w = caccbbc\color{red}{bcbbaaaa}$



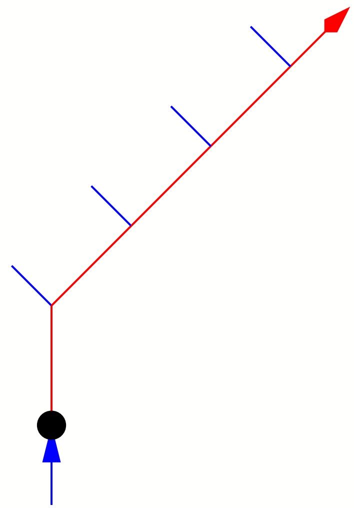
Preuve : La bijection inverse.

$w = caccbbcbc\color{red}{bbaaaa}$



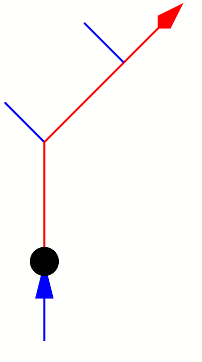
Preuve : La bijection inverse.

$w = caccbbcbcbb{\color{red}aaaa}$



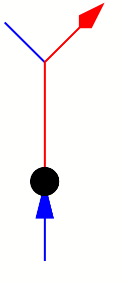
Preuve : La bijection inverse.

$w = caccbbcbcbbaa{\color{red}aa}$



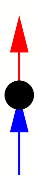
Preuve : La bijection inverse.

$w = caccbbcbcbbaaaa$



Preuve : La bijection inverse.

$w = caccbbcbcbbaaaa$



Comptage des chemins de Kreweras et des cartes cubiques

Relâchement de contraintes

Les chemins de Kreweras sont les mots w sur $\{a, b, c\}$ tels que

- $|w|_a = |w|_b = |w|_c$,
- pour tout préfixe w', $|w'|_a \leq |w'|_c$ et $|w'|_b \leq |w'|_c$.

Relâchement de contraintes

Les chemins de Kreweras sont les mots w sur $\{a, b, c\}$ tels que

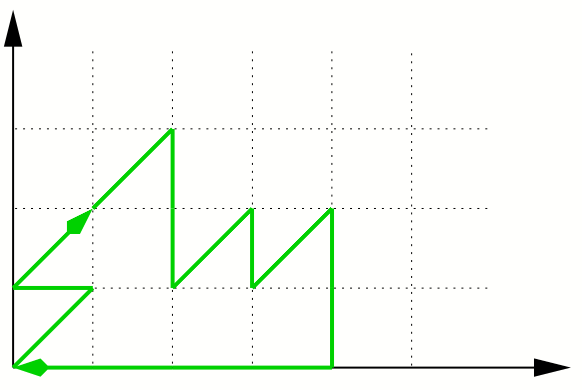
- $|w|_a = |w|_b = |w|_c$,
- pour tout préfixe w', $|w'|_a \leq |w'|_c$ et $|w'|_b \leq |w'|_c$.

Qu'en est-il des mots w sur $\{a, b, c\}$ tels que

- $|w|_a + |w|_b = 2|w|_c$,
- pour tout préfixe w', $|w'|_a + |w'|_b \leq 2|w'|_c$ **?**

On les appelle **chemins de Kreweras étendus**.

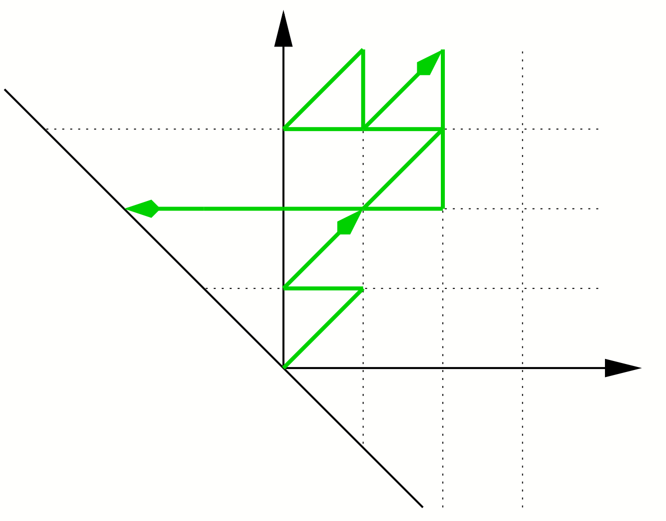
Kreweras



$$w = caccaacbcbbaaaa$$

$|w'|_a \leq |w'|_c$ et $|w'|_b \leq |w'|_c$

Kreweras étendus

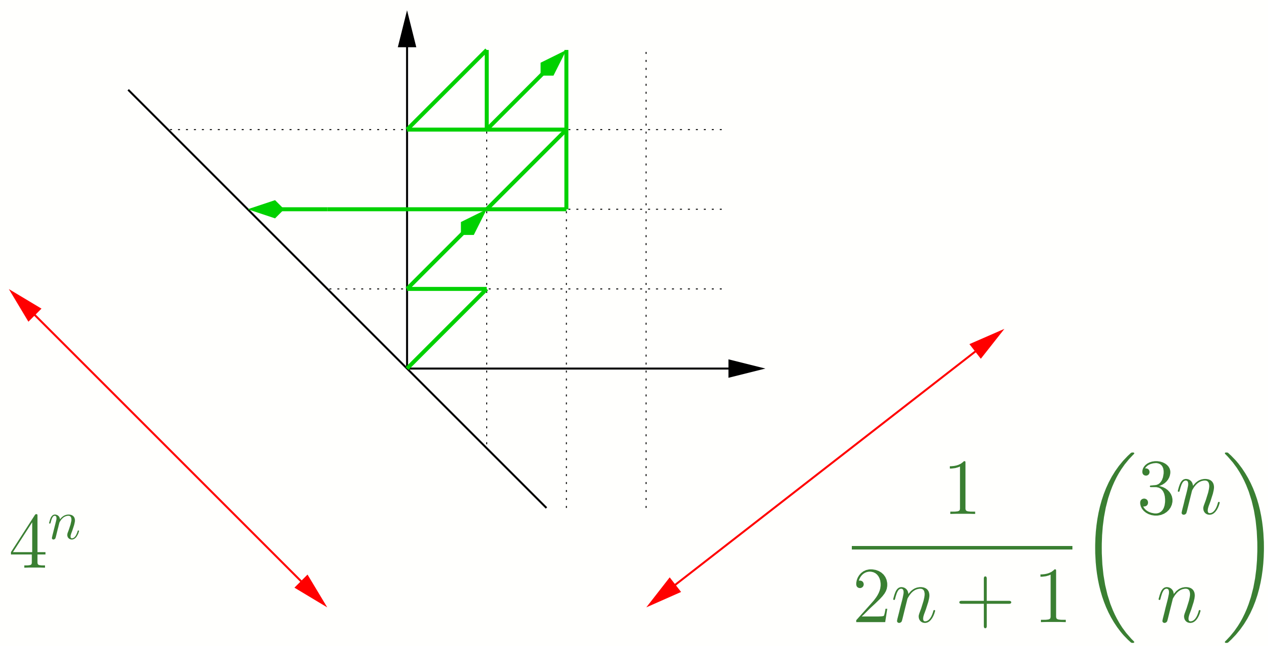


$$w = caccbbcbcbbaaaa$$

$$|w'|_a + |w'|_b \leq 2|w'|_c$$

Proposition : Il existe $e_n = \dfrac{4^n}{2n+1}\dbinom{3n}{n}$ chemins de Kreweras étendus de taille n.

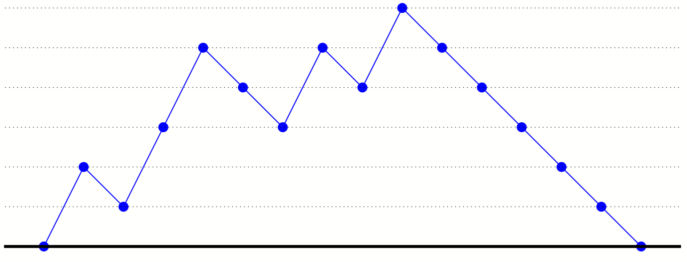
Proposition : Il existe $e_n = \frac{4^n}{2n+1}\binom{3n}{n}$ chemins de Kreweras étendus de taille n.



Preuve : Les chemins étendus w sont tels que :
$|w|_a + |w|_b = 2|w|_c$,
pour tout préfixe w', $|w'|_a + |w'|_b \leq 2|w'|_c$.

- **Place des** c : $\dfrac{1}{2n+1}\dbinom{3n}{n}$.

  Lemme cyclique : il existe $\dfrac{1}{2n+1}\dbinom{3n}{n}$ chemins (uni-dimensionnels) de longueur $3n$ avec pas +2 et -1.

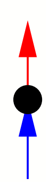


- **Choix des** a **et** b : 4^n.

Extension de la bijection

Exemple :

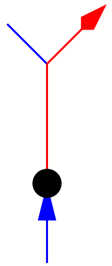
$w = caccaacbcbbaaaa$



Extension de la bijection

Exemple :

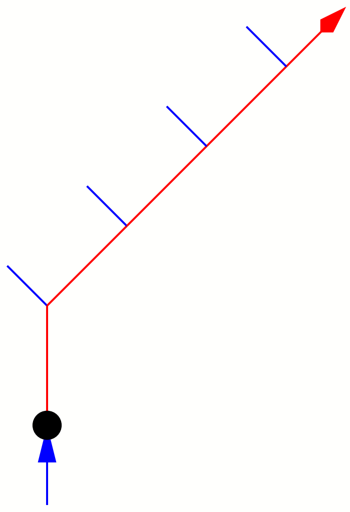
$w = caccaacbcbbaaaa$



Extension de la bijection

Exemple :

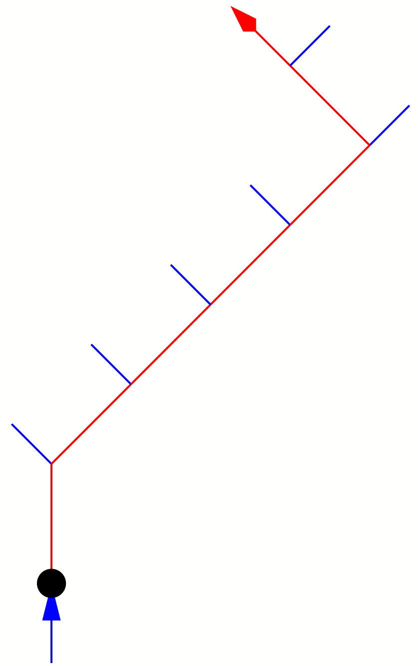
$w = caccaacbcbbaaaa$



Extension de la bijection

Exemple :

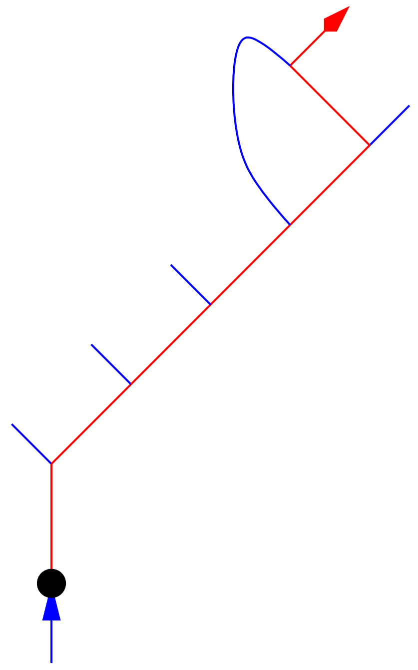
$w = caccaacbcbbaaaa$



Extension de la bijection

Exemple :

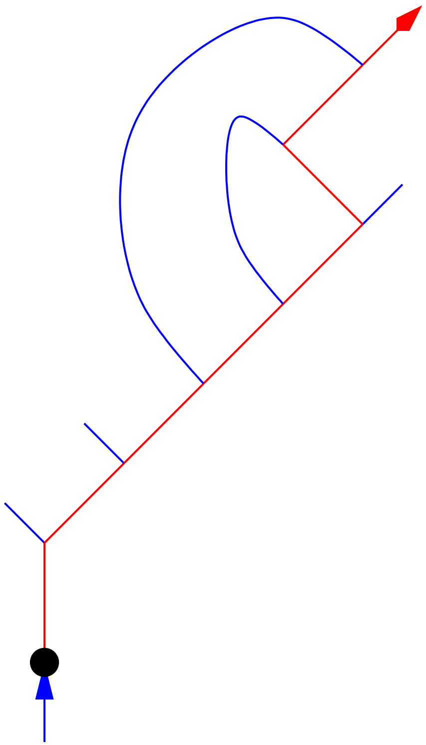
$w = caccaacb\textcolor{red}{cbbaaaa}$



Extension de la bijection

Exemple :

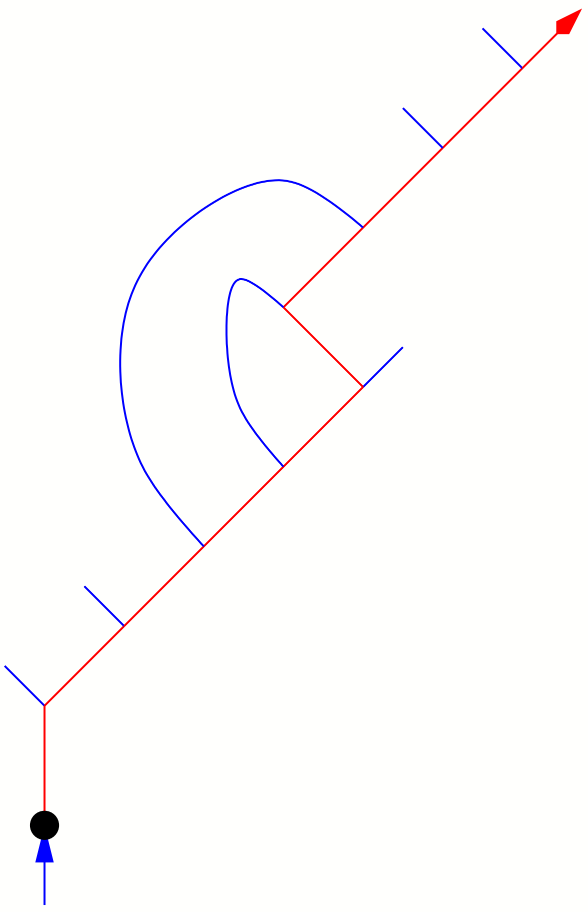
$w = caccaa\color{red}{cbcbbaaaa}$



Extension de la bijection

Exemple :

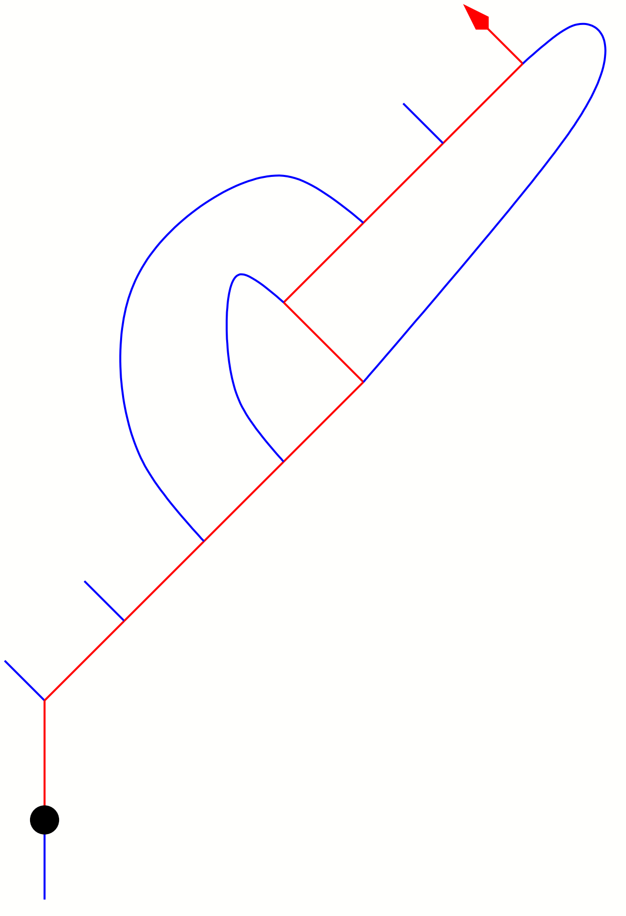
$w = cacc\textcolor{red}{aacbcbbaaaa}$



Extension de la bijection

Exemple :

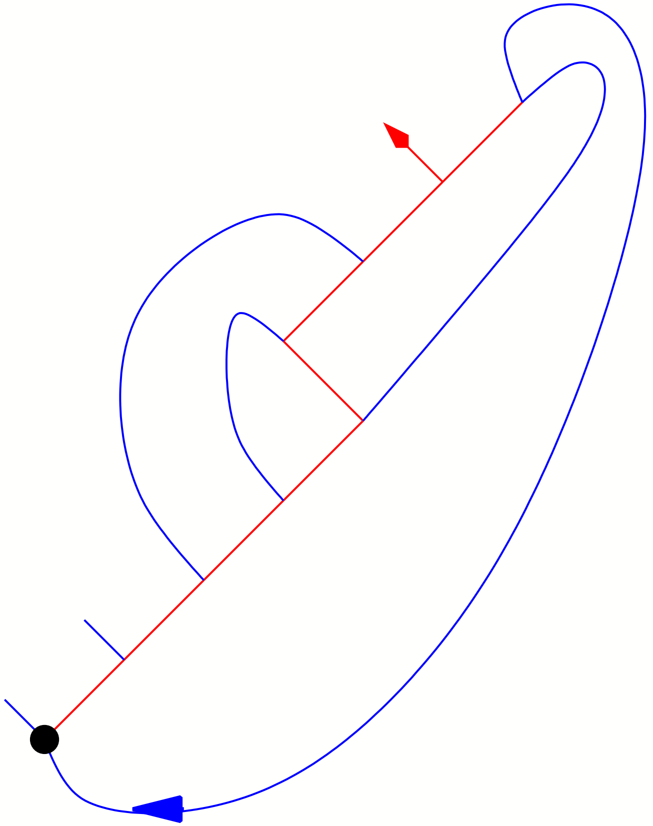
$w = cac\textcolor{red}{caacbcbbaaaa}$



Extension de la bijection

Exemple :

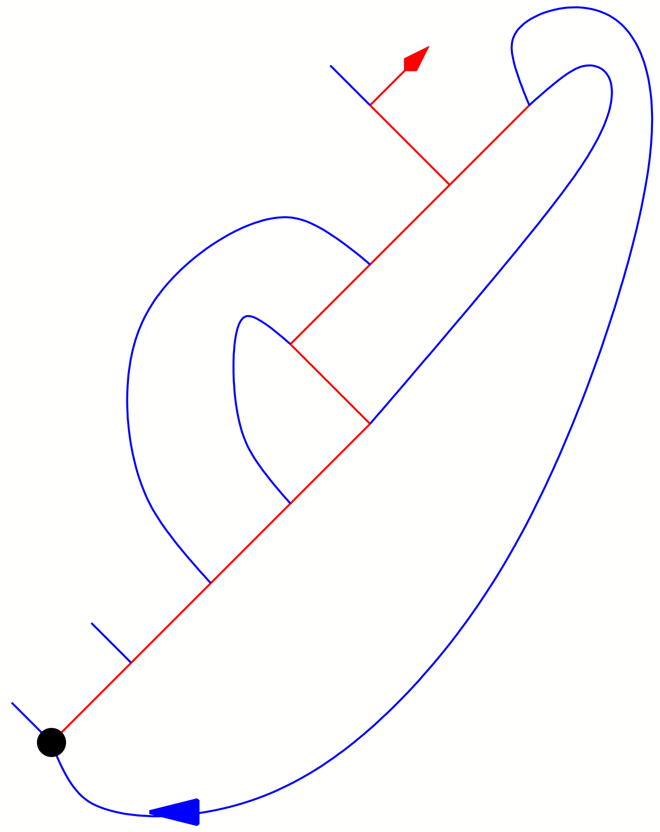
$w = ca\textcolor{red}{ccaacbcbbaaaa}$



Extension de la bijection

Exemple :

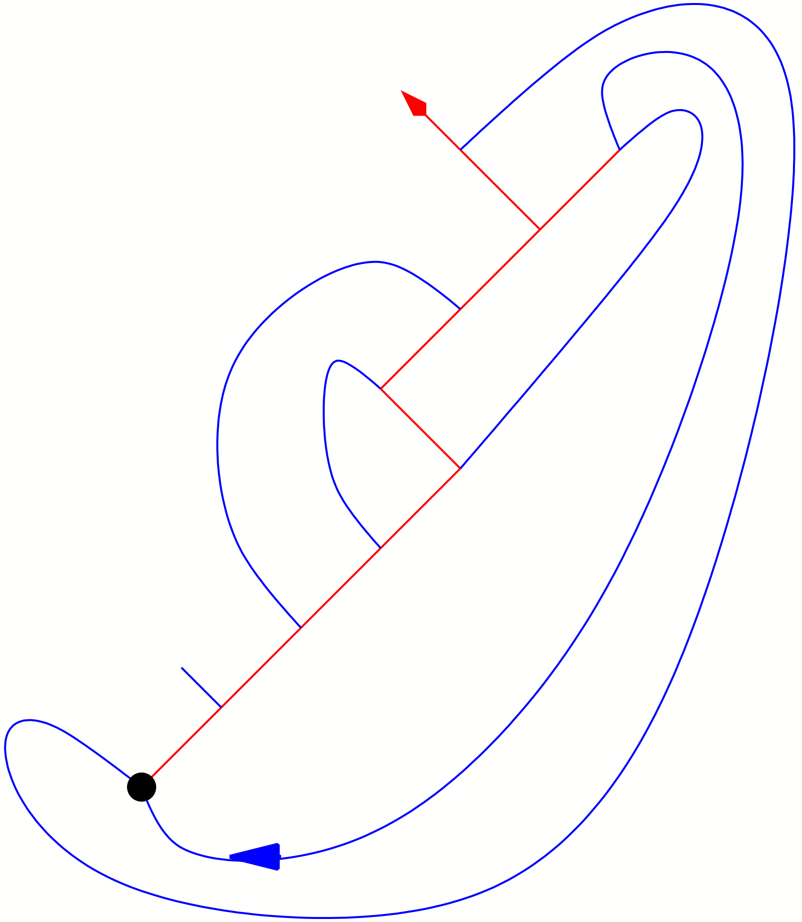
$w = caccaacbcbbaaaa$



Extension de la bijection

Exemple :

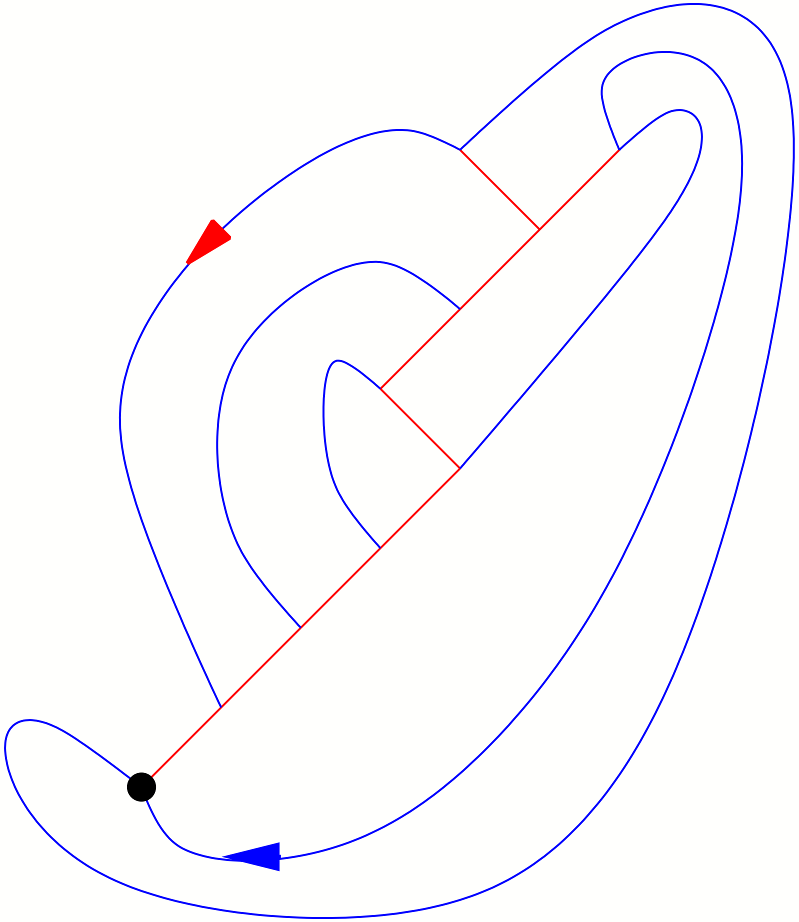
$w = caccaacbcbbaaaa$



Extension de la bijection

Exemple :

$w = caccaacbcbbaaaa$



Théorème : Cette construction est une bijection entre les chemins de Kreweras de taille n et les cartes cubiques de taille n **+** un arbre d'exploration **+** une arête distinguée hors de l'arbre.

Corollaire : $e_n \; = \; c_n \times 2^n \times (n+1)$.

Donc,

$$c_n = \frac{2^n}{(n+1)(2n+1)}\binom{3n}{n} \text{ et } k_n = \frac{4^n}{(n+1)(2n+1)}\binom{3n}{n}.$$

Résultats et perspectives

Résultats

- Nous avons compté les arbres d'exploration sur les cartes cubiques.

Résultats

- Nous avons compté les arbres d'exploration sur les cartes cubiques.

- Nous avons trouvé une bijection entre les chemins de Kreweras et les cartes cubiques avec arbre d'exploration.

  $\Rightarrow$ Codage des triangulations avec $\log_2(27)$ bits par sommets.
  (Codage optimal : $\log_2(27) - 1$ bits par sommets.)

Résultats

- Nous avons étendu la bijection à une classe de chemins plus générale.

  $\Rightarrow$ Résultats de comptage.

  $\Rightarrow$ Génération aléatoire des triangulations en temps linéaire.

$$k_n = \frac{4^n}{(n+1)(2n+1)} \binom{3n}{n}.$$

Questions et perspectives

- Peut-on décrire la classe de conjugaison d'un chemin de Kreweras étendu sans l'aide de la carte cubique ?

$$k_n = \frac{4^n}{(n+1)(2n+1)}\binom{3n}{n}.$$

Questions et perspectives

- Peut-on compter les chemins de Kreweras terminant en $(i,0)$? en (i,j) ?

$$k_{n,i} = 4^n \binom{2i}{i} \frac{2i+1}{(n+i+1)(2n+2i+1)} \binom{3n}{n}.$$

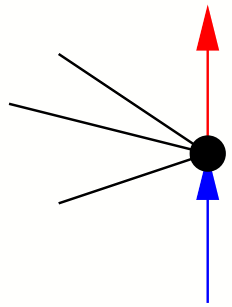
Questions et perspectives

Les chemins de Kreweras terminant en $(i, 0)$ sont en bijection avec les quasi-triangulations dont la face externe à degré $i + 2$.

Questions et perspectives

Les chemins de Kreweras terminant en $(i, 0)$ sont en bijection avec les quasi-triangulations dont la face externe à degré $i + 2$.

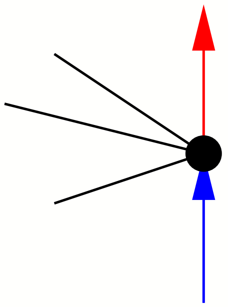
Il suffit de partir d'un *germe* ayant i demi-arêtes supplémentaires.



Questions et perspectives

Les chemins de Kreweras terminant en $(i, 0)$ sont en bijection avec les quasi-triangulations dont la face externe à degré $i + 2$.

Il suffit de partir d'un *germe* ayant i demi-arêtes supplémentaires.



Mais sait-on compter les chemins étendus ?

Questions et perspectives

- Peut-on étendre cette bijection à d'autres familles de cartes ? Aux quadrangulations ?

Questions et perspectives

- Il existe d'autres objets comptés par des formules similaires :

  Les cartes non-séparables.

  Les permutations *triables par deux piles* (two-stacks sortable permutations).

$$\mathcal{NS}_n = \frac{2}{(n+1)(2n+1)}\binom{3n}{n}.$$

Merci