Tableaux de Young
et
Fonctions de Schur

Groupe de travail de Combinatoire

1ère séance

le 14 octobre 2005

Aujourd'hui

Présentation de définitions élémentaires concernant :

- les diagrammes
- les tableaux de Young
- les polynômes de Schur

Présentation de deux algorithmes de construction des tableaux :

- l'algorithme d'insertion
- le jeu de taquin

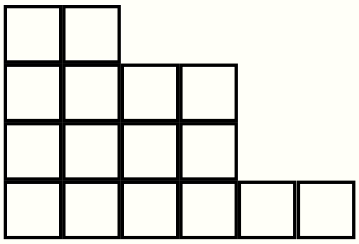
Diagramme, Tableau

Définition : Diagramme (de Young)

Un *diagramme* est un arrangement fini de boîtes (ou cellules) :

- regroupées selon des lignes horizontales alignées à gauche ;
- la longueur de ces lignes est croissante (au sens large).

Exemple :

$\lambda =$ 

$$\lambda = (6, 4, 4, 2) = (6, 4^2, 2)$$

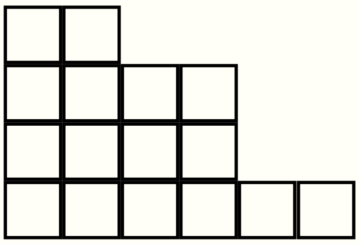
Diagramme, Tableau

Définition : Partition

Une *partition* d'un entier n est un diagramme comportant n cases.

Partitions de n : 1, 1, 2, 3, 5, 7, 11, 15, 22, 30, 42 . . . (A000041)

Exemple :

$\lambda =$ 

Notation : $\lambda \vdash 16$

$$\lambda = (6, 4, 4, 2) = (6, 4^2, 2)$$

Diagramme, Tableau

Définition : Remplissage, Numérotation

Un *remplissage* T de λ consiste à assigner à chaque case un nombre entier.
Une *numérotation* T de λ est un remplissage pour lequel toutes les cases possèdent un nombre distinct.

Exemple :

1	2				
2	5	7	8		
4	6	5	1		
9	3	6	7	8	1

Tableau de Young, Tableau standard

Définition : Tableau de Young

Un *tableau (de Young)* T est un diagramme rempli par des nombres entiers de manière à ce que les sous-suites :

- lues de gauche à droite soient croissantes (au sens large)
- lues de bas en haut soient croissantes (au sens strict)

Exemple :

5	6				
4	4	6	6		
2	3	5	5		
1	2	2	3	3	5

Tableau de Young, Tableau standard

Définition : Tableau standard

Un *tableau standard* T est un tableau de Young de n cases dans lequel chaque entier de 1 à n n'apparaît qu'une seule et unique fois.

Tableaux de taille n : 1, 1, 2, 4, 10, 26, 76, 232 . . . (A000085)

Exemple :

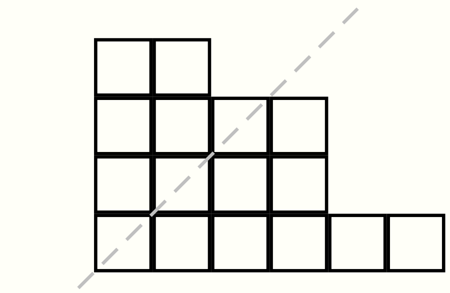
6	9				
4	8	11	16		
2	5	10	14		
1	3	7	12	13	15

Diagramme transposé, Tableau transposé

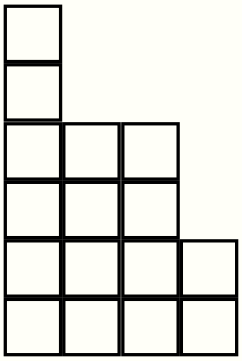
Définition : Diagramme transposé

Le *diagramme transposé* d'un diagramme est son symétrique par rapport à la première diagonale.

Exemple :



$\rightsquigarrow$



$\lambda = (6,4,4,2)$ $\tilde{\lambda} = (4,4,3,3,1,1)$

Diagramme transposé, Tableau transposé

Définition : Tableau transposé

Le *tableau transposé* d'un tableau est son symétrique par rapport à la première diagonale.

Le transposé d'un tableau de Young n'est pas forcément un tableau de Young.

Exemple :

$$\begin{array}{cccccc} 6 & 9 & & & & \\ 4 & 8 & 11 & 16 & & \\ 2 & 5 & 10 & 14 & & \\ 1 & 3 & 7 & 12 & 13 & 15 \end{array} \quad \rightsquigarrow \quad \begin{array}{cccc} 15 & & & \\ 13 & & & \\ 12 & 14 & 16 & \\ 7 & 10 & 11 & \\ 3 & 5 & 8 & 9 \\ 1 & 2 & 4 & 6 \end{array}$$

$\lambda = (6, 4, 4, 2)$ $\qquad$ $\tilde{\lambda} = (4, 4, 3, 3, 1, 1)$

Diagramme gauche, Tableau gauche

Définition : Diagramme gauche

Etant donné un diagramme μ, et un autre diagramme λ qui contient μ (les lignes de λ sont plus longues que les lignes de μ), le *diagramme gauche* $\lambda \backslash \mu$ s'obtient en ôtant de λ les cases de μ.

Exemple :

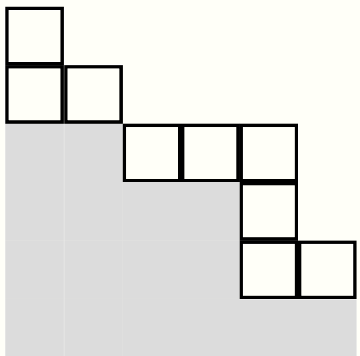


Diagramme gauche, Tableau gauche

Définition : Tableau gauche

Un *tableau gauche* est un diagramme gauche rempli par des entiers de manière à ce que les sous-suites :

- lues de gauche à droite, soient croissantes (au sens large)
- lues de bas en haut, soient croissantes (au sens strict)

Exemple :

3					
2	3				
		5	5	6	
				4	
				2	3

Tableaux et polynômes de Schur

Définition : Polynôme de Schur

Etant donné un entier $m \geq 1$ et un tableau de Young T de forme λ rempli par des entiers dans $[1; m]$, le *polynôme de Schur* associé est le monôme défini par :

$$x^T = \prod x_i^{n_i}$$

...où n_i est le nombre d'occurrences de i dans T.

Exemple :

5	6				
4	4	6	6		
2	3	5	5		
1	2	3	3	3	5

$$x^T(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6) = x_1 x_2^2 x_3^4 x_4^2 x_5^4 x_6^3$$

Tableaux et polynômes de Schur

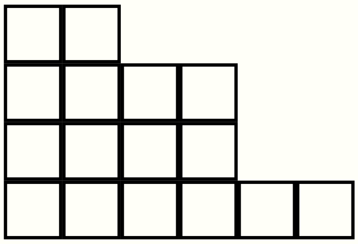
Définition : Polynôme de Schur

Etant donné un entier $m \geq 1$ et un diagramme λ, le *polynôme de Schur* de ce diagramme est défini par :

$$s_\lambda(x_1, \ldots, x_m) = \sum x^T$$

...où la somme se fait sur tous les tableaux de Young T de forme λ remplis par des entiers dans $[1; m]$.

Exemple :

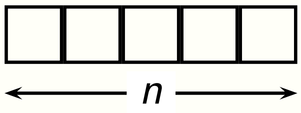


$$s_\lambda(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6) = ???$$

Exemples de polynômes de Schur

Considérons le diagramme ligne :

$$\lambda = (n) =$$



Le polynôme de Schur associé est :

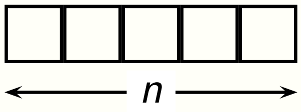
$$s_\lambda(x_1, \ldots, x_m) = \sum_{1 \leq i_1 \leq \ldots \leq i_n \leq m} \left(\prod_{k=1}^{n} x_{i_k} \right)$$

...le n-ème *polynôme symétrique complet*

$$\begin{array}{l|l} n = 1 & s_\lambda(x_1, \ldots, x_m) = x_1 + \ldots + x_m \\ n = 2 & s_\lambda(x_1, \ldots, x_m) = x_1^2 + \ldots + x_m^2 + x_1 x_2 + \ldots + x_{m-1} x_m \end{array}$$

Exemples de polynômes de Schur

Considérons le diagramme ligne :

$\lambda = (n) =$ 

Le polynôme de Schur associé est :

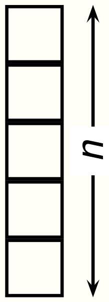
$$s_\lambda(x_1, \ldots, x_m) = \sum_{1 \le i_1 \le \ldots \le i_n \le m} \left(\prod_{k=1}^{n} x_{i_k} \right)$$

...le n-ème *polynôme symétrique complet*

$$\begin{array}{l|l} n = 1 & s_\lambda(x_1, \ldots, x_m) = x_1 + \ldots + x_m \\ n = 2 & s_\lambda(x_1, \ldots, x_m) = x_1^2 + \ldots + x_m^2 + x_1x_2 + \ldots + x_{m-1}x_m \end{array}$$

Exemples de polynômes de Schur

Considérons le diagramme colonne :

$\lambda = (1^n) =$ 

Le polynôme de Schur associé est :

$$s_\lambda(x_1, \ldots, x_m) = \sum_{1 \le i_1 < \ldots < i_n \le m} \left(\prod_{k=n}^{m} x_{i_k} \right)$$

...le n-ème *polynôme symétrique élémentaire*

$$\begin{array}{l|l} n = 1 & s_\lambda(x_1, \ldots, x_m) = x_1 + \ldots + x_m \\ n = 2 & s_\lambda(x_1, \ldots, x_m) = x_1x_2 + \ldots + x_{m-1}x_m \end{array}$$

Exemples de polynômes de Schur

Considérons le diagramme colonne :

$$\lambda = (1^n) = \begin{array}{|c|}\hline \\ \hline \\ \hline \\ \hline \\ \hline \\ \hline \end{array} \; \updownarrow n$$

Le polynôme de Schur associé est :

$$s_\lambda(x_1, \ldots, x_m) = \sum_{1 \leq i_1 < \ldots < i_n \leq m} \left(\prod_{k=n}^{m} x_{i_k} \right)$$

. . .le n-ème *polynôme symétrique élémentaire*

$$\begin{array}{l|l} n = 1 & s_\lambda(x_1, \ldots, x_m) = x_1 + \ldots + x_m \\ n = 2 & s_\lambda(x_1, \ldots, x_m) = x_1 x_2 + \ldots + x_{m-1} x_m \end{array}$$

Mot d'un tableau

Définition : Mot d'un tableau

Etant donné un tableau T, le *mot* associé à ce tableau (ou *mot de lignes*), noté $w(T)$, est obtenu en lisant le tableau dans son entier, de gauche à droite et de haut en bas.

Exemple :

$$\begin{array}{|c|c|cccc}\cline{1-2} 5 & 6 \\ \cline{1-4} 4 & 4 & \multicolumn{1}{c|}{6} & \multicolumn{1}{c|}{6} \\ \cline{1-4} 2 & 3 & \multicolumn{1}{c|}{5} & \multicolumn{1}{c|}{5} \\ \hline 1 & 2 & \multicolumn{1}{c|}{3} & \multicolumn{1}{c|}{3} & \multicolumn{1}{c|}{3} & \multicolumn{1}{c|}{5} \\ \hline \end{array}$$

$$w(T) = 56|4466|2355|123335$$

Cette transformation est inversible pour les tableaux.

Mot d'un tableau

Définition : Mot d'un tableau

Etant donné un tableau T, le *mot* associé à ce tableau (ou *mot de lignes*), noté $w(T)$, est obtenu en lisant le tableau dans son entier, de gauche à droite et de haut en bas.

Exemple :

5	6				
4	4	6	6		
2	3	5	5		
1	2	3	3	3	5

$$w(T) = 5644662355123335$$

Cette transformation est inversible pour les tableaux.

Méthodes de construction

Idée : concevoir des algorithmes permettant de construire des tableaux de Young.

Cette construction doit être (dans un certain sens) inversible.

Nous présentons deux méthodes de construction :

- la méthode par insertion
- le jeu de taquin

Méthode d'insertion/expulsion

Algorithme : Méthode d'insertion/expulsion

But : Insérer l'entier n dans le tableau T.
Début : La ligne courante est la ligne du bas.
La case courante est la case contenant l'entier n.

---

1. Sélectionner dans la ligne courante le nombre le plus à gauche strictement supérieur à n.
2. Si ce nombre n'existe pas, insérer la case courante en fin de ligne.
3. Si ce nombre existe, expulser la case correspondante en la remplaçant par la case courante.
4. Recommencer avec la ligne directement supérieure et la case nouvellement expulsée.

Méthode d'insertion/expulsion

Algorithme : Méthode d'insertion/expulsion

But : Insérer l'entier n dans le tableau T.
Début : La ligne courante est la ligne du bas.
La case courante est la case contenant l'entier n.

---

1. Sélectionner dans la ligne courante le nombre le plus à gauche strictement supérieur à n.
2. Si ce nombre n'existe pas, insérer la case courante en fin de ligne.
3. Si ce nombre existe, expulser la case correspondante en la remplaçant par la case courante.
4. Recommencer avec la ligne directement supérieure et la case nouvellement expulsée.

Méthode d'insertion/expulsion

Algorithme : Méthode d'insertion/expulsion

But : Insérer l'entier n dans le tableau T.
Début : La ligne courante est la ligne du bas.
La case courante est la case contenant l'entier n.

---

1. Sélectionner dans la ligne courante le nombre le plus à gauche strictement supérieur à n.
2. Si ce nombre n'existe pas, insérer la case courante en fin de ligne.
3. Si ce nombre existe, expulser la case correspondante en la remplaçant par la case courante.
4. Recommencer avec la ligne directement supérieure et la case nouvellement expulsée.

Méthode d'insertion/expulsion

Algorithme : Méthode d'insertion/expulsion

But : Insérer l'entier n dans le tableau T.
Début : La ligne courante est la ligne du bas.
La case courante est la case contenant l'entier n.

---

1. Sélectionner dans la ligne courante le nombre le plus à gauche strictement supérieur à n.
2. Si ce nombre n'existe pas, insérer la case courante en fin de ligne.
3. Si ce nombre existe, expulser la case correspondante en la remplaçant par la case courante.
4. Recommencer avec la ligne directement supérieure et la case nouvellement expulsée.

Tableaux de Young , et , Fonctions de Schur – p. 11/30

Exemple d'insertion

$$\begin{array}{|c|c|c|c|c|c|} \hline 5 & 6 \\ \hline 4 & 4 & 6 & 6 \\ \hline 2 & 3 & 5 & 5 \\ \hline 1 & 2 & 3 & 3 & 3 & 5 \\ \hline \end{array} \quad \leftarrow \quad \boxed{2}$$

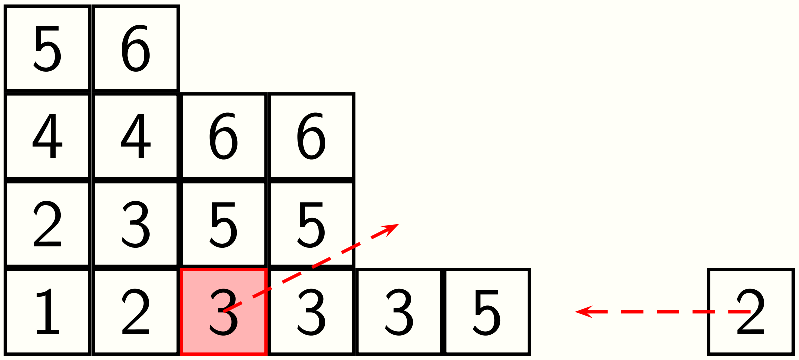
- Le diagramme final contient le diagramme initial.

Exemple d'insertion

$$\begin{array}{|c|c|c|c|c|c|} \hline 5 & 6 \\ \hline 4 & 4 & 6 & 6 \\ \hline 2 & 3 & 5 & 5 \\ \hline 1 & 2 & 3 & 3 & 3 & 5 \\ \hline \end{array} \quad \leftarrow \quad \boxed{2}$$

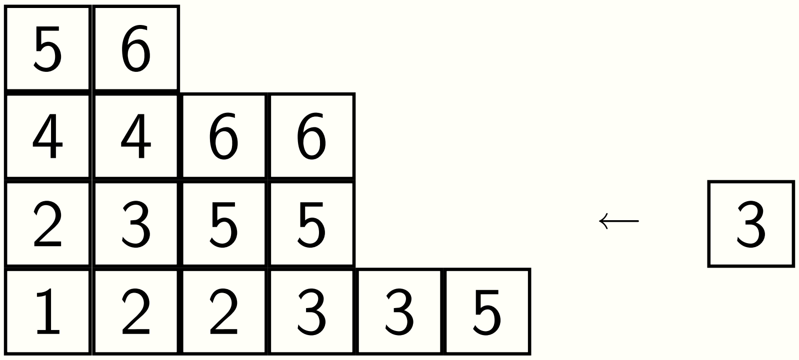
- Le diagramme final contient le diagramme initial.

Exemple d'insertion



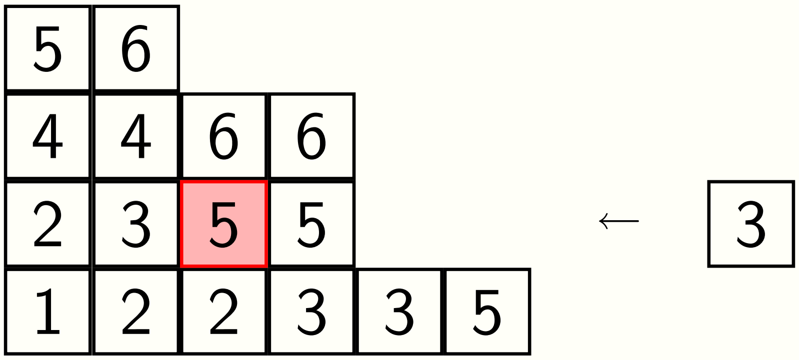
- Le diagramme final contient le diagramme initial.

Exemple d'insertion



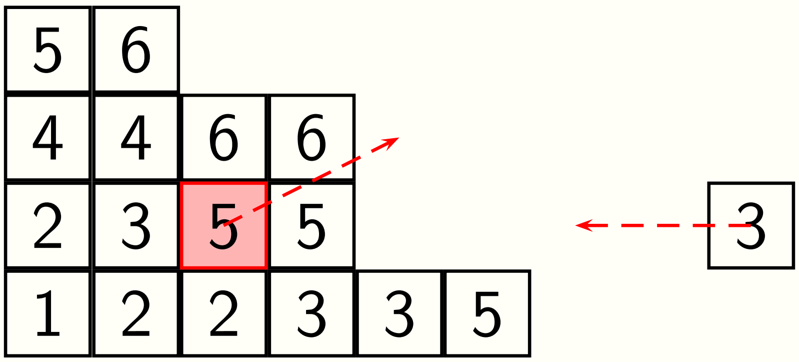
- Le diagramme final contient le diagramme initial.

Exemple d'insertion



- Le diagramme final contient le diagramme initial.

Exemple d'insertion



- Le diagramme final contient le diagramme initial.

Exemple d'insertion

5	6						
4	4	6	6			$\longleftarrow$	5
2	3	3	5				
1	2	2	3	3	5		

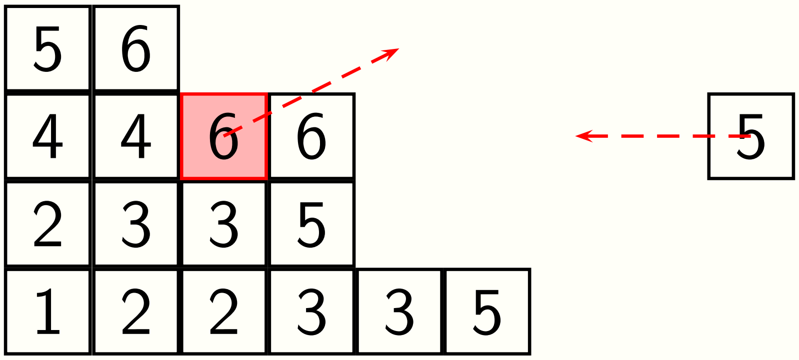
- Le diagramme final contient le diagramme initial.

Exemple d'insertion

5	6						
4	4	6	6			$\longleftarrow$	5
2	3	3	5				
1	2	2	3	3	5		

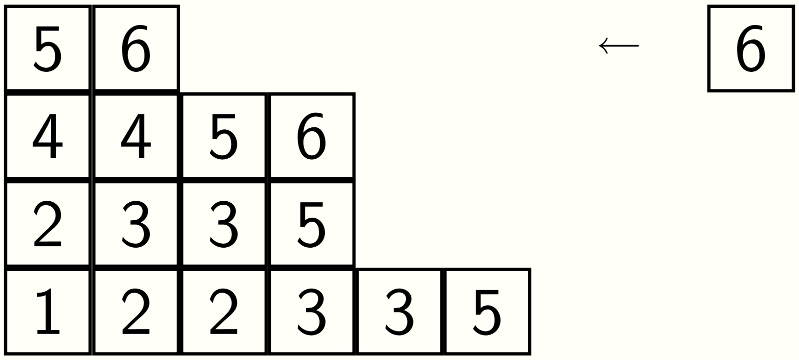
- Le diagramme final contient le diagramme initial.

Exemple d'insertion



- Le diagramme final contient le diagramme initial.

Exemple d'insertion



- Le diagramme final contient le diagramme initial.

Exemple d'insertion

5	6					←	6
4	4	5	6				
2	3	3	5				
1	2	2	3	3	5		

- Le diagramme final contient le diagramme initial.

Exemple d'insertion

5	6	6			
4	4	5	6		
2	3	3	5		
1	2	2	3	3	5

- Le diagramme final contient le diagramme initial.

Preuve de l'algorithme

Il faut vérifier que l'on conserve un tableau à chaque étape :

- Chaque ligne est construite de manière faiblement croissante.
- Si l'on éjecte la case y_k de la colonne $Y = (y_1, \ldots, y_p)$:
  - alors y_k s'insérera dans la ligne au dessus, à la place d'un nombre qui lui est strictement supérieur ;
  - comme y_{k+1} est dans la ligne au dessus et $y_{k+1} > y_k$, le nombre y_k s'insérera dans une colonne à gauche ou égale à Y.
- Si on insère une case x en éjectant une case y_k de la colonne $Y = (y_1, \ldots, y_p)$, alors :
  - $x < y_k < y_{k+1}$
  - x provient d'une colonne à droite ou égale à Y, donc $x \geq y_{k-1}$ et si $x = y_{k-1}$, cela signifie que c'est y_{k-1} qui a été ejecté et remplacé par un nombre strictement plus petit.
- Donc chaque colonne est construite de manière strictement croissante.

Retour en arrière

5	6	6			
4	4	5	6		
2	3	3	5		
1	2	2	3	3	5

- La construction est inversible si l'on connaît la case ajoutée.

Retour en arrière

5	6				
4	4	5	6		
2	3	3	5		
1	2	2	3	3	5

$\boxed{6}$

- La construction est inversible si l'on connaît la case ajoutée.

Retour en arrière

5	6				
4	4	6	6		
2	3	3	5		
1	2	2	3	3	5

$\boxed{5}$

- La construction est inversible si l'on connaît la case ajoutée.

Retour en arrière

5	6				
4	4	6	6		
2	3	5	5		
1	2	2	3	3	5

3

- La construction est inversible si l'on connaît la case ajoutée.

Retour en arrière

5	6				
4	4	6	6		
2	3	5	5		
1	2	3	3	3	5

2

- La construction est inversible si l'on connaît la case ajoutée.

Chemin d'expulsion

Définition : Chemin d'expulsion

Etant donné le calcul de $T \leftarrow n$, le *chemin d'expulsion* est l'ensemble des cases qui ont été déplacées lors de l'insertion (ainsi que la case finale).

Exemple :

5	6	6			
4	4	5	6		
2	3	3	5		
1	2	2	3	3	5

- Un chemin d'expulsion comporte au plus une case par ligne.
- Dans un chemin d'expulsion, étant donné deux cases x et y où y est dans la ligne directement au dessus de x, alors y est dans une colonne egale ou à gauche de la colonne de x.

Positionnement de ces chemins

Chemin à gauche

Considérons dans un tableau T deux chemins d'expulsions R et R'. Alors :

- R est dit *faiblement à gauche* de R' lorsque :
  dans chaque ligne où il y a une case de R', il y a une case de R positionnée à gauche ou égale à la case de R'.

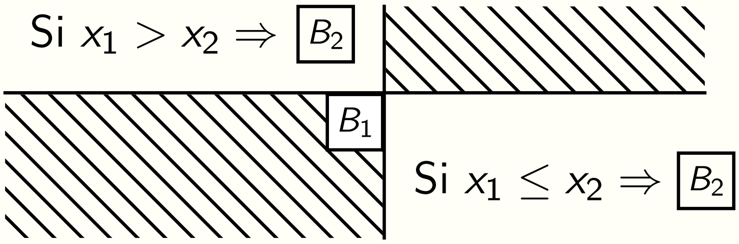
- R est dit *strictement à gauche* de R' lorsque : dans chaque ligne où il y a une case de R', il y a une case de R positionnée strictement à gauche de la case de R'.

Lemme d'expulsion

Lemme d'expulsion

Considérons un tableau T dans lequel on effectue deux insertions successives de deux nombres x_1 et x_2 menant à deux chemins R_1 et R_2 et à l'insertion de deux cases B_1 et B_2. Alors :

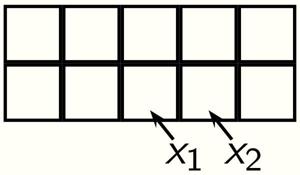
1. si $x_1 \leq x_2$, alors :
   - R_1 est strictement à gauche de R_2 et
   - B_1 est strictement à gauche et faiblement au dessus de B_2.
2. si $x_1 > x_2$
   - R_2 est faiblement à gauche de R_1 et
   - B_2 est faiblement à gauche et strictement au dessus de B_1.



Preuve du lemme d'expulsion (1/2)

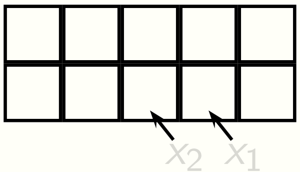
Regardons la position relative des deux chemins dans chaque ligne :

- Si $x_1 \leq x_2$:



Le chemin R_1 reste strictement à gauche du chemin R_2.

- Si $x_1 > x_2$:

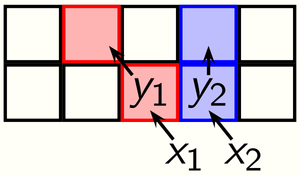


Le chemin R_2 reste faiblement à gauche du chemin R_1.

Preuve du lemme d'expulsion (1/2)

Regardons la position relative des deux chemins dans chaque ligne :

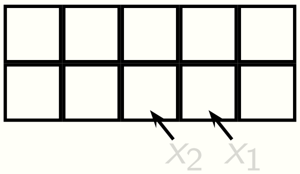
- Si $x_1 \leq x_2$:



$\Rightarrow y_1 \leq y_2$

Le chemin R_1 reste strictement à gauche du chemin R_2.

- Si $x_1 > x_2$:

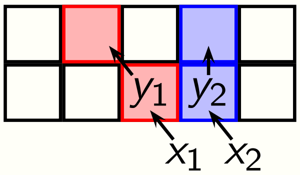


Le chemin R_2 reste faiblement à gauche du chemin R_1.

Preuve du lemme d'expulsion (1/2)

Regardons la position relative des deux chemins dans chaque ligne :

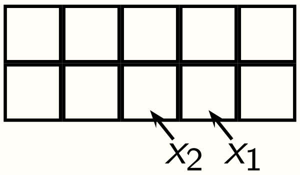
- Si $x_1 \leq x_2$:



$\Rightarrow y_1 \leq y_2$

Le chemin R_1 reste strictement à gauche du chemin R_2.

- Si $x_1 > x_2$:

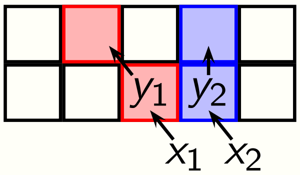


Le chemin R_2 reste faiblement à gauche du chemin R_1.

Preuve du lemme d'expulsion (1/2)

Regardons la position relative des deux chemins dans chaque ligne :

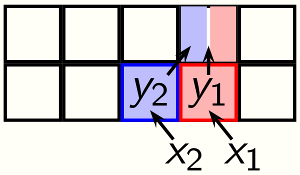
- Si $x_1 \leq x_2$:



$\Rightarrow y_1 \leq y_2$

Le chemin R_1 reste strictement à gauche du chemin R_2.

- Si $x_1 > x_2$:

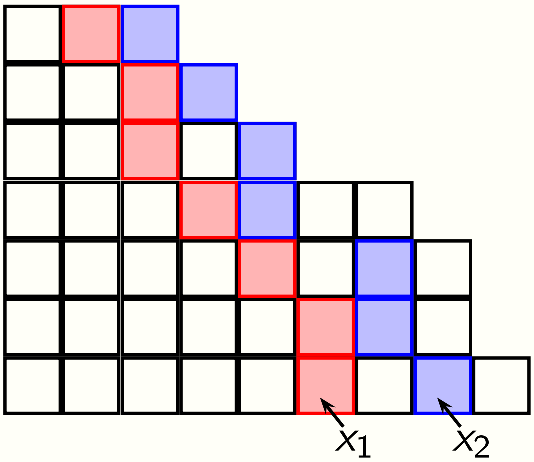


$\Rightarrow y_1 > y_2$

Le chemin R_2 reste faiblement à gauche du chemin R_1.

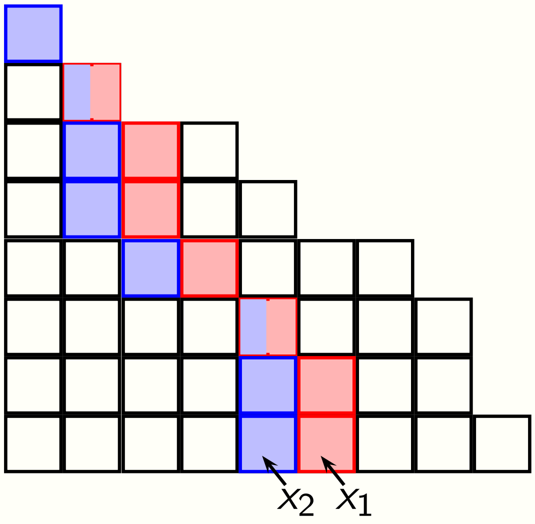
Preuve du lemme d'expulsion (2/2)

Si $x_1 \leq x_2$:



Preuve du lemme d'expulsion (2/2)

Si $x_1 > x_2$:



Conséquence du lemme d'expulsion

Soit T un tableau de forme λ.
Construisons le tableau U de forme μ de la manière suivante :

$$U = (\ldots((T \leftarrow x_1) \leftarrow x_2) \ldots \leftarrow x_p)$$

Alors,en considérant la forme $\mu \backslash \lambda$:

1. Si $x_1 \leq x_2 \leq \ldots \leq x_p$, chaque case de $\mu \backslash \lambda$ est seule dans sa colonne.
2. Si $x_1 > x_2 > \ldots > x_p$, alors chaque case de $\mu \backslash \lambda$ est seule dans sa ligne.

(Ce résultat est inversible)

Produit de deux tableaux (1)

Définition du produit par insertion

Le *produit* de deux tableaux T et U, noté $T \cdot U$, est un tableau obtenu en partant de T et en insérant successivement les éléments de U tels qu'ils apparaissent dans $w(U)$
(c'est-à-dire en les lisant de gauche à droite et de bas en haut).

Exemple :

$$\begin{array}{|c|c|c|c|}\hline 5 & 6 \\ \cline{1-2} 4 & 4 & 6 \\ \cline{1-3} 2 & 3 & 5 & 5 \\ \hline 1 & 2 & 2 & 3 \\ \hline\end{array} \quad \cdot \quad \begin{array}{|c|c|}\hline 2 \\ \cline{1-1} 1 & 3 \\ \hline\end{array}$$

Produit de deux tableaux (1)

Définition du produit par insertion

Le *produit* de deux tableaux T et U, noté $T \cdot U$, est un tableau obtenu en partant de T et en insérant successivement les éléments de U tels qu'ils apparaissent dans $w(U)$
(c'est-à-dire en les lisant de gauche à droite et de bas en haut).

Exemple :

$$\begin{array}{|c|c|c|c|}\hline 5 & 6 & 6 \\ \cline{1-3} 4 & 4 & 5 \\ \cline{1-3} 2 & 3 & 3 & 5 \\ \hline 1 & 2 & 2 & 2 \\ \hline\end{array} \quad \cdot \quad \begin{array}{|c|c|}\hline 1 & 3 \\ \hline\end{array}$$

Produit de deux tableaux (1)

Définition du produit par insertion

Le *produit* de deux tableaux T et U, noté $T \cdot U$, est un tableau obtenu en partant de T et en insérant successivement les éléments de U tels qu'ils apparaissent dans $w(U)$
(c'est-à-dire en les lisant de gauche à droite et de bas en haut).

Exemple :

$$\begin{array}{|c|c|c|c|}\cline{1-1} \boxed{5} \\ \cline{1-3} 4 & 6 & 6 \\ \cline{1-3} 3 & 4 & 5 \\ \hline 2 & 2 & 3 & 5 \\ \hline 1 & 1 & 2 & 2 \\ \hline \end{array} \quad \cdot \quad \boxed{3}$$

Produit de deux tableaux (1)

Définition du produit par insertion

Le *produit* de deux tableaux T et U, noté $T \cdot U$, est un tableau obtenu en partant de T et en insérant successivement les éléments de U tels qu'ils apparaissent dans $w(U)$
(c'est-à-dire en les lisant de gauche à droite et de bas en haut).

Exemple :

$$\begin{array}{|c|c|c|c|c|}\cline{1-1} 5 \\ \cline{1-3} 4 & 6 & 6 \\ \cline{1-3} 3 & 4 & 5 \\ \cline{1-4} 2 & 2 & 3 & 5 \\ \hline 1 & 1 & 2 & 2 & \boxed{3} \\ \hline \end{array}$$

Anneau des tableaux

L'opération de produit a les propriétés suivantes

- Elle possède un élément neutre : le tableau vide.
- Elle est associative

L'ensemble des tableaux est alors muni d'une structure de monoïde.

Définition : Anneau des tableaux

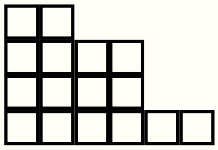
Pour un entier $m \geq 1$ donné, on définit l'*anneau des tableaux*, noté $R_{[m]}$ comme le $\mathbb{Z}$-module possédant pour base les tableaux ne comportant que des entiers allant de 1 à m.

Exemple : $S_\lambda = \sum_{\text{T de forme } \lambda} T$ qui permet de définir le polynôme de Schur s_λ.

Exemples de produits de tableaux

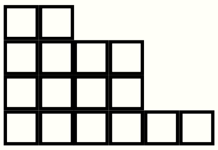
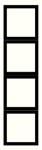
Deux exemples concrets de produits de tableaux :

- Produit par un tableau ligne de taille p :

$S_\lambda \cdot S_{(p)} =$  $\cdot$  $= \sum_\mu S_\mu$

…où la somme se fait sur les diagrammes μ obtenus à partir de λ en ajoutant p cases toutes dans des colonnes différentes.

- Produit par un tableau colonne de taille p :

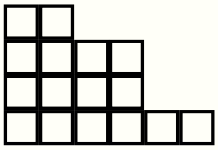
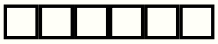
$S_\lambda \cdot S_{(1^p)} =$  $\cdot$  $= \sum_\mu S_\mu$

…où la somme se fait sur les diagrammes μ obtenus à partir de λ en ajoutant p cases toutes dans des lignes différentes.

Exemples de produits de tableaux

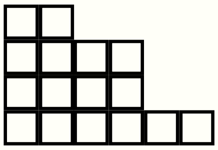
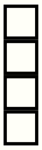
Deux exemples concrets de produits de tableaux :

- Produit par un tableau ligne de taille p :

$$S_\lambda \cdot S_{(p)} =$$

$$\cdot$$

$$= \sum_\mu S_\mu$$

...où la somme se fait sur les diagrammes μ obtenus à partir de λ en ajoutant p cases toutes dans des colonnes différentes.

- Produit par un tableau colonne de taille p :

$$S_\lambda \cdot S_{(1^p)} =$$

$$\cdot$$

$$= \sum_\mu S_\mu$$

...où la somme se fait sur les diagrammes μ obtenus à partir de λ en ajoutant p cases toutes dans des lignes différentes.

Nombres de Kostka

Définition : Contenu d'un tableau

Le *contenu* d'un tableau T est la suite finie :

$$\mu = (\mu_1, \ldots, \mu_n)$$

...où μ_k représente le nombre de k apparaissant dans T.

C'est aussi la suite des exposants du monôme x^T.

Nombres de Kostka

Définition : Nombre de Kostka

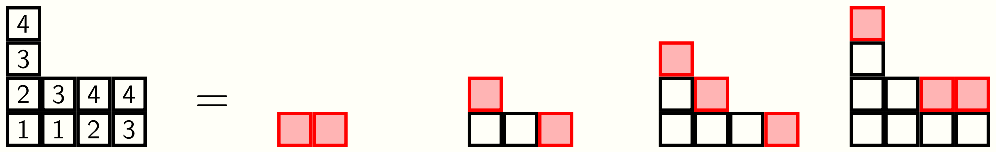
Etant donné un diagramme λ et un contenu μ, le *nombre de Kostka* $K_{\lambda\mu}$ est le nombre de tableaux de forme λ et de contenu μ.

Lemme

Les nombres de Kostka sont aussi le nombre de suites finies et croissantes de partitions :

$$\lambda^{(1)} \subset \lambda^{(2)} \subset \ldots \subset \lambda^{(n)} = \lambda$$

... pour lesquelles le diagramme gauche $\lambda^{(k)} \backslash \lambda^{(k-1)}$ contient μ_k cases, chacune étant seule dans sa colonne.



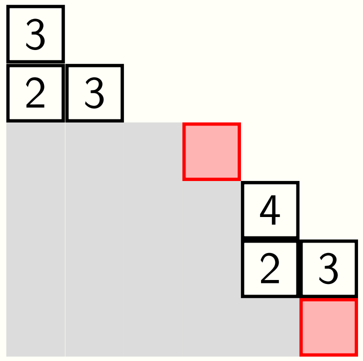
Jeu de taquin (1)

Définition : Coins

Etant donné un tableau gauche de forme $\mu\backslash\lambda$:

- un *coin intérieur* est une case de λ pour laquelle les cases au dessus et à droite ne sont pas dans λ.
- un *coin extérieur* est une case de $\mu\backslash\lambda$ pour laquelle les cases au dessus et à droite ne sont pas dans $\mu\backslash\lambda$.

Exemple :



Coins intérieurs

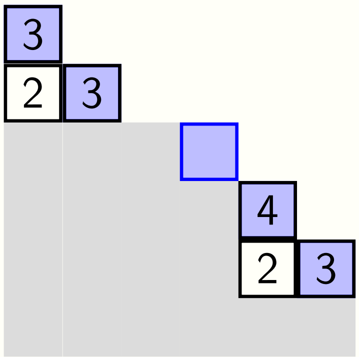
Jeu de taquin (1)

Définition : Coins

Etant donné un tableau gauche de forme $\mu\backslash\lambda$:

- un *coin intérieur* est une case de λ pour laquelle les cases au dessus et à droite ne sont pas dans λ.
- un *coin extérieur* est une case de $\mu\backslash\lambda$ pour laquelle les cases au dessus et à droite ne sont pas dans $\mu\backslash\lambda$.

Exemple :



Coins extérieurs

Jeu de taquin (2)

Algorithme : Jeu de taquin

But : Transformer le tableau gauche T en un tableau

Début : La case courante est un coin intérieur

1. Si il existe une case au dessus ou à droite de la case courante :
   - Choisir de ces deux cases la plus petite.
     (on choisit la case au dessus si elles sont égales)
   - Faire glisser cette case à la place de la case courante.
     La case courante devient l'emplacement qui a été déplacé.
2. Si il n'existe pas de case, ni au dessus, ni en dessous :
   - Retirer cette case du tableau
   - Recommencer avec un nouveau coin intérieur.

Jeu de taquin (2)

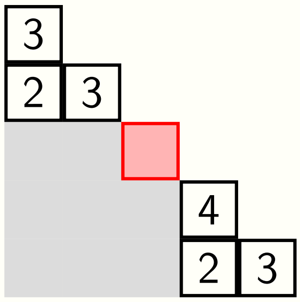
Algorithme : Jeu de taquin

But : Transformer le tableau gauche T en un tableau
Début : La case courante est un coin intérieur

---

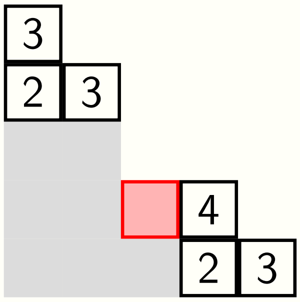
1. Si il existe une case au dessus ou à droite de la case courante :
   - Choisir de ces deux cases la plus petite.
     (on choisit la case au dessus si elles sont égales)
   - Faire glisser cette case à la place de la case courante.
     La case courante devient l'emplacement qui a été déplacé.
2. Si il n'existe pas de case, ni au dessus, ni en dessous :
   - Retirer cette case du tableau
   - Recommencer avec un nouveau coin intérieur.

Exemple de jeu de taquin



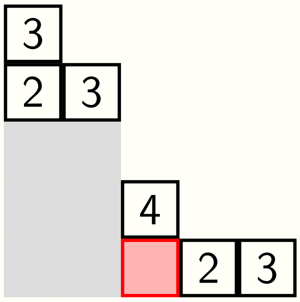
- Le résultat reste un tableau gauche étape après étape.
- Si l'on se donne un tableau et une case qui vient d'être retirée du tableau (coin extérieur), on peut inverser l'algorithme.

Exemple de jeu de taquin



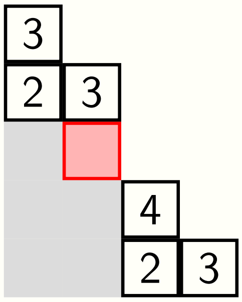
- Le résultat reste un tableau gauche étape après étape.
- Si l'on se donne un tableau et une case qui vient d'être retirée du tableau (coin extérieur), on peut inverser l'algorithme.

Exemple de jeu de taquin



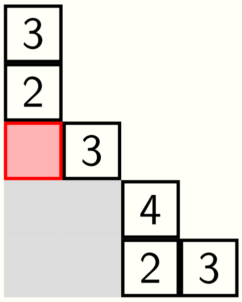
- Le résultat reste un tableau gauche étape après étape.
- Si l'on se donne un tableau et une case qui vient d'être retirée du tableau (coin extérieur), on peut inverser l'algorithme.

Exemple de jeu de taquin



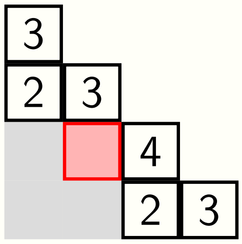
- Le résultat reste un tableau gauche étape après étape.
- Si l'on se donne un tableau et une case qui vient d'être retirée du tableau (coin extérieur), on peut inverser l'algorithme.

Exemple de jeu de taquin



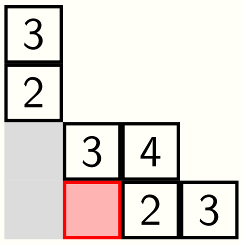
- Le résultat reste un tableau gauche étape après étape.
- Si l'on se donne un tableau et une case qui vient d'être retirée du tableau (coin extérieur), on peut inverser l'algorithme.

Exemple de jeu de taquin



- Le résultat reste un tableau gauche étape après étape.
- Si l'on se donne un tableau et une case qui vient d'être retirée du tableau (coin extérieur), on peut inverser l'algorithme.

Exemple de jeu de taquin



- Le résultat reste un tableau gauche étape après étape.
- Si l'on se donne un tableau et une case qui vient d'être retirée du tableau (coin extérieur), on peut inverser l'algorithme.

Exemple de jeu de taquin

3		
2		
	3	4
	2	3

- Le résultat reste un tableau gauche étape après étape.
- Si l'on se donne un tableau et une case qui vient d'être retirée du tableau (coin extérieur), on peut inverser l'algorithme.

Exemple de jeu de taquin

3		
2	3	4
	2	3

- Le résultat reste un tableau gauche étape après étape.
- Si l'on se donne un tableau et une case qui vient d'être retirée du tableau (coin extérieur), on peut inverser l'algorithme.

Exemple de jeu de taquin

3	3	4
2	2	3

- Le résultat reste un tableau gauche étape après étape.
- Si l'on se donne un tableau et une case qui vient d'être retirée du tableau (coin extérieur), on peut inverser l'algorithme.

Rectification

Définition : Rectification

Le tableau obtenu en appliquant l'algorithme du jeu de taquin au tableau gauche T est appelé une *rectification* de T.

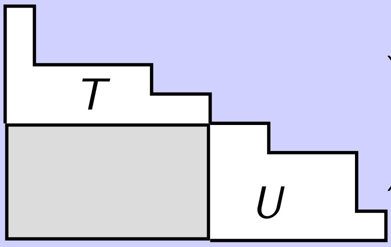
Affirmation

Il n'existe qu'une seule et unique rectification de T.
Quel que soit le choix des coins intérieurs lors de l'algorithme, le tableau final obtenu est le même.

Produit de deux tableaux (2)

Définition du produit par jeu de taquin

Le *produit* de deux tableaux T et U, noté $T * U$, est la rectification du tableau gauche suivant :

$T * U = \text{rectification}\Bigg($  $\Bigg)$

- Sous le couvert de l'affirmation précédente, ce produit est associatif.
- Ce produit coïncide avec la première définition.

La semaine prochaine. . .

- Présentation du monoïde plaxique.
- Preuve du fait que les produits coïncident.