



P.E.C. Tableaux de Young - Séance 4 :

**Sous-mots croissants et unicité du mot de
Young dans les classes d'équivalence de
Knuth**



Résumé des épisodes précédents

On a défini une **relation d'équivalence** $\equiv$ sur les mots par deux opérations élémentaires :

$$u \overset{\bullet}{\underset{\bullet}{\cdot}} v \equiv u \overset{\bullet}{\underset{\bullet}{\cdot}} v ,$$

$$u \overset{\bullet}{\underset{\bullet}{\cdot}} v \equiv u \overset{\bullet}{\underset{\bullet}{\cdot}} v .$$

Résumé des épisodes précédents

On a défini une **relation d'équivalence** $\equiv$ sur les mots par deux opérations élémentaires :

$$u \overset{\bullet}{\underset{\bullet}{\cdot}} v \equiv u \overset{\bullet}{\underset{\bullet}{\cdot}} v ,$$

$$u \overset{\bullet}{\underset{\bullet}{\cdot}} v \equiv u \overset{\bullet}{\underset{\bullet}{\cdot}} v .$$

Remarque : $u \equiv u', v \equiv v' \implies uv \equiv u'v'.$

Donc, la concaténation induit un produit associatif sur les classes d'équivalence.

Résumé des épisodes précédents

On a montré que $(u \leftarrow v) \equiv uv$.

Résumé des épisodes précédents

On a montré que $(u \leftarrow v) \equiv uv$.

$\implies$ Le produit de tableaux défini par insertion est compatible avec le produit sur les classes d'équivalence.

Résumé des épisodes précédents

On a montré que $(u \leftarrow v) \equiv uv$.

$\implies$ Le produit de tableaux défini par insertion est compatible avec le produit sur les classes d'équivalence.

De même, si $u \rightsquigarrow v$ par un jeu de taquin alors $u \equiv v$.

Résumé des épisodes précédents

On a montré que $(u \leftarrow v) \equiv uv$.

$\implies$ Le produit de tableaux défini par insertion est compatible avec le produit sur les classes d'équivalence.

De même, si $u \rightsquigarrow v$ par un jeu de taquin alors $u \equiv v$.

$\implies$ Le produit de tableaux défini par un jeu de taquin quelconque est compatible avec le produit sur les classes d'équivalence.



Résultat principal

Théorème : Dans chaque classe d'équivalence il existe un unique mot qui soit de Young.



Résultat principal

Théorème : Dans chaque classe d'équivalence il existe un unique mot qui soit de Young.

Conséquences :

Le produit défini sur les tableaux (par insertion ou jeu de taquin) est le produit sur les classes d'équivalence.

Le produit est associatif et le tableau vide est l'élément neutre.

Existence

Il **existe** au moins un mot de Young dans chaque classe.

Preuve : $w \equiv (\emptyset \leftarrow w)$ qui est un mot de Young.

□

Il reste à prouver l'**unicité**.

Sous-mots croissants

Soit $w = a_1 a_2 \dots a_n$ un mot sur $\{1, \dots, m\}$.

On note $L(w, 1)$ la longueur maximale d'un sous-mot croissant. (Le plus grand entier k tel qu'il existe $i_1, \dots, i_k$ avec $a_{i_1} \leq a_{i_2} \leq \dots \leq a_{i_k}$.)

Sous-mots croissants

Soit $w = a_1 a_2 \dots a_n$ un mot sur $\{1, \dots, m\}$.

On note $L(w, 1)$ la longueur maximale d'un sous-mot croissant. (Le plus grand entier k tel qu'il existe $i_1, \dots, i_k$ avec $a_{i_1} \leq a_{i_2} \leq \dots \leq a_{i_k}$.)

Exemple : $w = 134234122332$.

$L(w, 1) = 6$: **134234122332**
134234122332

Sous-mots croissants

On note $L(w, 1)$ la longueur maximale d'un sous-mot croissant.

On note $L(w, k)$ la longueur maximale d'une union disjointe de k sous-mots croissants.

Sous-mots croissants

On note $L(w, 1)$ la longueur maximale d'un sous-mot croissant.

On note $L(w, k)$ la longueur maximale d'une union disjointe de k sous-mots croissants.

Exemple : $w = 134234122332$.

$L(w, 1) = 6$: **134234122332**
134234122332

Sous-mots croissants

On note $L(w, 1)$ la longueur maximale d'un sous-mot croissant.

On note $L(w, k)$ la longueur maximale d'une union disjointe de k sous-mots croissants.

Exemple : $w = 134234122332$.

$L(w, 1) = 6$: **1**34**2**341**2233**2

134234**12233**2

$L(w, 2) = 9$: **1**34**2**341**2233**2

134**2**34**12233**2

Sous-mots croissants

On note $L(w, 1)$ la longueur maximale d'un sous-mot croissant.

On note $L(w, k)$ la longueur maximale d'une union disjointe de k sous-mots croissants.

Exemple : $w = 134234122332$.

$L(w, 1) = 6$: 134234122332

134234122332

$L(w, 2) = 9$: 134234122332

134234122332

$L(w, 3) = 12$: 134234122332

134234122332

Sous-mots croissants et équivalence

Lemme : Si $w \equiv w'$, alors $L(w, k) = L(w', k)$.

Sous-mots croissants et équivalence

Lemme : Si $w \equiv w'$, alors $L(w, k) = L(w', k)$.

Preuve : Supposons $w = u \bullet \overset{\bullet}{\bullet} v$ et $w' = u \bullet \overset{\bullet}{\bullet} v$.

- Les sous-mots croissants de w' sont des sous-mots croissants de w ,

$$\implies L(w, k) \geq L(w', k).$$

Preuve - suite : $w = u \bullet \overset{\bullet}{\underset{\bullet}{\cdot}} v$ et $w' = u \bullet \overset{\bullet}{\underset{\bullet}{\cdot}} v$.

Preuve - suite : $w = u \bullet \bullet v$ et $w' = u \bullet \bullet v$.

- On considère une union disjointe de k sous-mots croissants de w et on cherche une union de k sous-mots de w' de même longueur.

Preuve - suite : $w = u \bullet \bullet v$ et $w' = u \bullet \bullet v$.

- On considère une union disjointe de k sous-mots croissants de w et on cherche une union de k sous-mots de w' de même longueur.

Cas difficile : $\bullet$ et $\bullet$ sont dans un sous-mot w_1 et $\bullet$ est dans un sous-mot w_2 .

Preuve - suite : $w = u \bullet_{\bullet}^{\bullet} v$ et $w' = u \bullet_{\bullet}^{\bullet} v$.

- On considère une union disjointe de k sous-mots croissants de w et on cherche une union de k sous-mots de w' de même longueur.

Cas difficile : $\bullet$ et $\bullet$ sont dans un sous-mot w_1 et $\bullet$ est dans un sous-mot w_2 .

Dans ce cas, on passe de $w_1 = u_1 \bullet_{\bullet}^{\bullet} v_1$, $w_2 = u_2 \bullet^{\bullet} v_2$ à $w'_1 = u_1 \bullet_{\bullet}^{\bullet} v_2$, $w'_2 = u_2 \bullet^{\bullet} v_1$.

Preuve - suite : $w = u \bullet_{\bullet}^{\bullet} v$ et $w' = u \bullet_{\bullet}^{\bullet} v$.

- On considère une union disjointe de k sous-mots croissants de w et on cherche une union de k sous-mots de w' de même longueur.

Cas difficile : $\bullet$ et $\bullet$ sont dans un sous-mot w_1 et $\bullet$ est dans un sous-mot w_2 .

Dans ce cas, on passe de $w_1 = u_1 \bullet_{\bullet}^{\bullet} v_1$, $w_2 = u_2 \bullet^{\bullet} v_2$ à

$$w'_1 = u_1 \bullet_{\bullet}^{\bullet} v_2, \quad w'_2 = u_2 \bullet^{\bullet} v_1.$$

$$\implies L(w, k) \leq L(w', k).$$

Preuve - suite : $w = u \bullet \bullet v$ et $w' = u \bullet \bullet v$.

- On considère une union disjointe de k sous-mots croissants de w et on cherche une union de k sous-mots de w' de même longueur.

Cas difficile : $\bullet$ et $\bullet$ sont dans un sous-mot w_1 et $\bullet$ est dans un sous-mot w_2 .

Dans ce cas, on passe de $w_1 = u_1 \bullet \bullet v_1$, $w_2 = u_2 \bullet v_2$ à $w'_1 = u_1 \bullet \bullet v_2$, $w'_2 = u_2 \bullet v_1$.

$$\implies L(w, k) \leq L(w', k).$$

- Le cas $w = u \bullet \bullet v$ et $w' = u \bullet \bullet v$ est similaire. □

Sous-mots des mots de Young

Que se passe t-il si le mot w est un mot de Young ?

Lemme : Si w est le mot d'un tableau de forme $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_r)$, alors

$$L(w, k) = \lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_k$$

Sous-mots des mots de Young

Que se passe t-il si le mot w est un mot de Young ?

Lemme : Si w est le mot d'un tableau de forme $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_r)$, alors

$$L(w, k) = \lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_k$$

Exemple : $w = 344233112223$,
 $L(w, 1) = 6$, $L(w, 2) = 9$, $L(w, 3) = 12$.

3	4	4			
2	3	3			
1	1	2	2	2	3

Sous-mots des mots de Young

Que se passe t-il si le mot w est un mot de Young ?

Lemme : Si w est le mot d'un tableau de forme $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_r)$, alors

$$L(w, k) = \lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_k$$

Conséquence : Si deux mots de Young sont équivalents, alors leur tableaux ont la même forme.

$$\lambda_k = L(w, k) - L(w, k - 1).$$



Preuve :

- Une ligne d'un tableau est un sous-mot croissant.

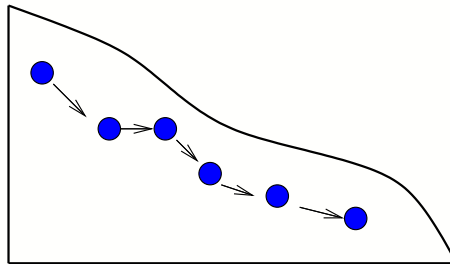
$$\implies L(w, k) \geq \lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_k.$$

Preuve :

- Une ligne d'un tableau est un sous-mot croissant.

$$\implies L(w, k) \geq \lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_k.$$

- Une sous-mot croissant a au plus une lettre par colonne dans le tableau.

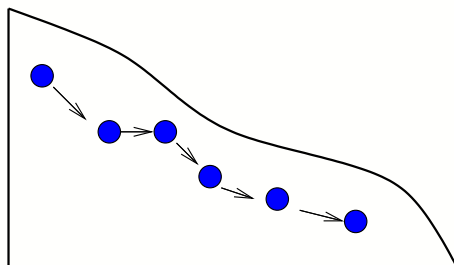


Preuve :

- Une ligne d'un tableau est un sous-mot croissant.

$$\implies L(w, k) \geq \lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_k.$$

- Une sous-mot croissant a au plus une lettre par colonne dans le tableau.



Une union disjointe de k sous-mots croissants de w a au plus k lettres dans chaque colonne.

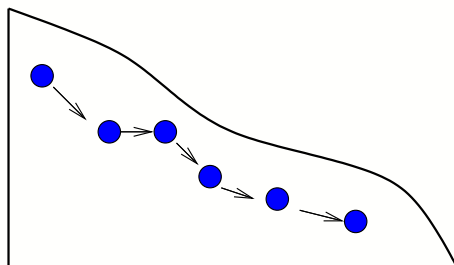
$\implies$ Il y a au plus $\min(k, \text{col}_j)$ lettres dans la colonne j .

Preuve :

- Une ligne d'un tableau est un sous-mot croissant.

$$\implies L(w, k) \geq \lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_k.$$

- Une sous-mot croissant a au plus une lettre par colonne dans le tableau.



Une union disjointe de k sous-mots croissants de w a au plus k lettres dans chaque colonne.

$\implies$ Il y a au plus $\min(k, \text{col}_j)$ lettres dans la colonne j .

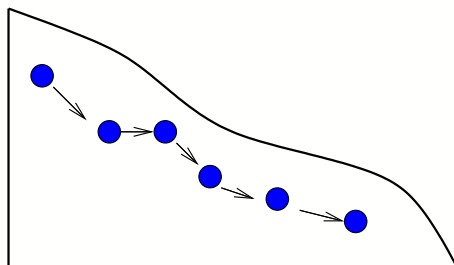
$\implies$ Il y a au plus $\lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_k$ lettres en tout.

Preuve :

- Une ligne d'un tableau est un sous-mot croissant.

$$\implies L(w, k) \geq \lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_k.$$

- Une sous-mot croissant a au plus une lettre par colonne dans le tableau.



Une union disjointe de k sous-mots croissants de w a au plus k lettres dans chaque colonne.

$\implies$ Il y a au plus $\min(k, \text{col}_j)$ lettres dans la colonne j .

$\implies$ Il y a au plus $\lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_k$ lettres en tout.

$$\implies L(w, k) \leq \lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_k.$$

Relèvement des équivalences :

Lemme : Soit $u \equiv v$.

Si u' et v' sont les mots obtenus à partir de u , v en supprimant la plus grande lettre, alors $u' \equiv v'$.

Relèvement des équivalences :

Lemme : Soit $u \equiv v$.

Si u' et v' sont les mots obtenus à partir de u , v en supprimant la plus grande lettre, alors $u' \equiv v'$.

Preuve : Supposons $u = u_1 \bullet \overset{\bullet}{\bullet} u_2$ et $v = v_1 \bullet \overset{\bullet}{\bullet} v_2$.

Relèvement des équivalences :

Lemme : Soit $u \equiv v$.

Si u' et v' sont les mots obtenus à partir de u , v en supprimant la plus grande lettre, alors $u' \equiv v'$.

Preuve : Supposons $u = u_1 \bullet \overset{\bullet}{\bullet} u_2$ et $v = v_1 \bullet \overset{\bullet}{\bullet} v_2$.

Si $\bullet$ est la plus grande lettre, alors $u' = v'$.

Relèvement des équivalences :

Lemme : Soit $u \equiv v$.

Si u' et v' sont les mots obtenus à partir de u , v en supprimant la plus grande lettre, alors $u' \equiv v'$.

Preuve : Supposons $u = u_1 \bullet \overset{\bullet}{\bullet} u_2$ et $v = v_1 \bullet \overset{\bullet}{\bullet} v_2$.

Si $\overset{\bullet}{\bullet}$ est la plus grande lettre, alors $u' = v'$.

Sinon, on peut faire la même transition entre u' et v' donc $u' \equiv v'$.

Relèvement des équivalences :

Lemme : Soit $u \equiv v$.

Si u' et v' sont les mots obtenus à partir de u , v en supprimant la plus grande lettre, alors $u' \equiv v'$.

Preuve : Supposons $u = u_1 \bullet \overset{\bullet}{\bullet} u_2$ et $v = v_1 \bullet \overset{\bullet}{\bullet} v_2$.

Si $\overset{\bullet}{\bullet}$ est la plus grande lettre, alors $u' = v'$.

Sinon, on peut faire la même transition entre u' et v' donc $u' \equiv v'$.

Le cas $u = u_1 \bullet \overset{\bullet}{\bullet} u_2$ et $v = v_1 \bullet \overset{\bullet}{\bullet} v_2$ est identique.

Le résultat suit par induction. □



Preuve du résultat principal :

On veut montrer l'unicité du mot de Young dans chaque classe d'équivalence.

Preuve du résultat principal :

On veut montrer l'unicité du mot de Young dans chaque classe d'équivalence.

Soit u et v deux mots de Young équivalents.

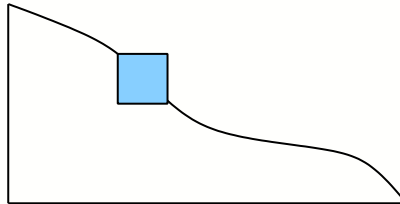
- Les tableaux de u et v ont même forme.

Preuve du résultat principal :

On veut montrer l'unicité du mot de Young dans chaque classe d'équivalence.

Soit u et v deux mots de Young équivalents.

- Les tableaux de u et v ont même forme.
- Les mots u' et v' obtenus en supprimant la plus grande lettre sont des mots de Young équivalents.

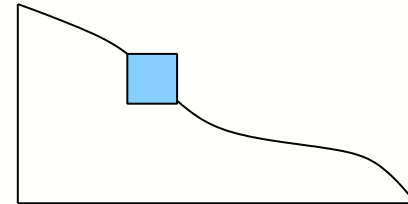
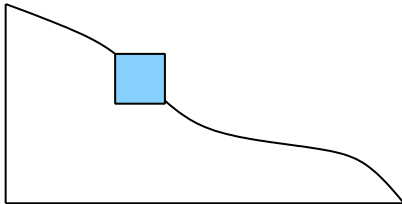


Preuve du résultat principal :

On veut montrer l'unicité du mot de Young dans chaque classe d'équivalence.

Soit u et v deux mots de Young équivalents.

- Les tableaux de u et v ont même forme.
- Les mots u' et v' obtenus en supprimant la plus grande lettre sont des mots de Young équivalents.



Les tableaux de u' et v' ont même forme.

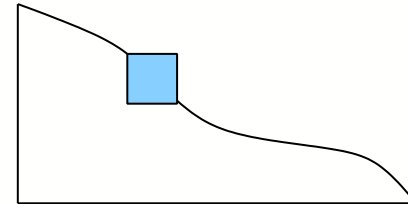
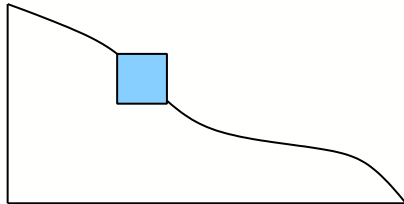
$\implies$ le plus grand élément est à la même place.

Preuve du résultat principal :

On veut montrer l'unicité du mot de Young dans chaque classe d'équivalence.

Soit u et v deux mots de Young équivalents.

- Les tableaux de u et v ont même forme.
- Les mots u' et v' obtenus en supprimant la plus grande lettre sont des mots de Young équivalents.



Les tableaux de u' et v' ont même forme.

$\implies$ le plus grand élément est à la même place.

On conclut par induction.

