

Un petit aperçu d'une partie des travaux de Wendelin Werner



J.F. Marckert (merci à David R. pour certains éclaircissements)

Domaine de recherche

- Propriétés du mouvement brownien plan :
 - calcul de la probabilité que des browniens se touchent avant un certains temps, ou avant de sortir d'un certain domaine
 - dimension de Hausdorff de la frontière d'un brownien plan
- Etude de trajectoires **planes** et de leur propriétés asymptotiques
Interface de percolation, marche à boucles effacées, autoévitantes, soupes de boucles, arbres couvrants uniformes
 - Etude des propriétés asymptotiques d'invariance conforme de ces trajectoires. Etude de la limite: SLE
 - Calculs d'exposants critiques

Principaux coauteurs: Oded Schramm et Gregory F. Lawler



Dans cet exposé

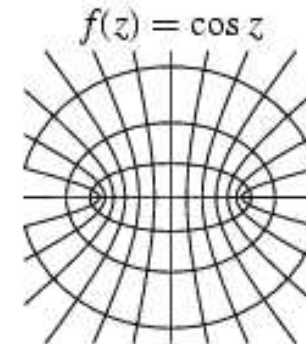
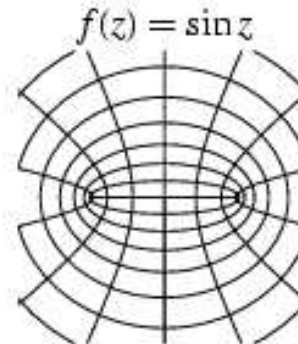
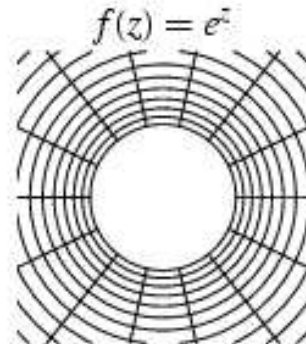
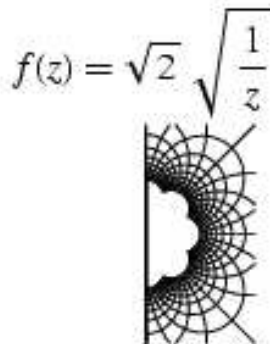
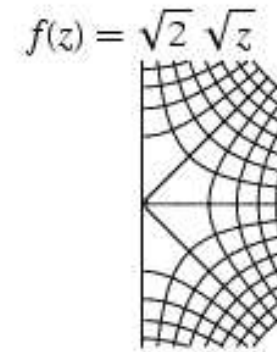
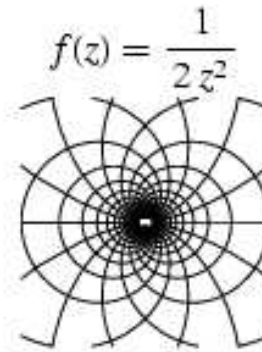
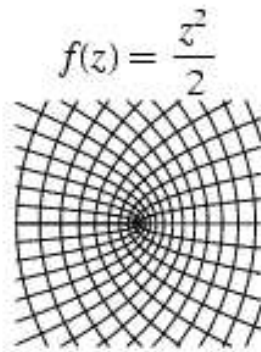
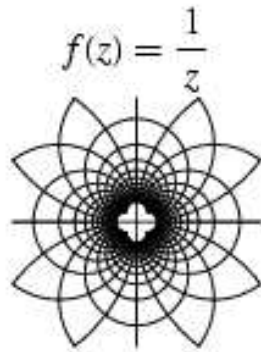
Plan :

- 1) Invariance conforme
- 2) Mouvement brownien
- 3) Percolation, marche auto-évitante, à boucles effacées, arbres couvrants uniformes
- 4) Kesako que la limite de ces choses? Kesako converger?

Invariance conforme

Définition : Soit D et D' deux domaines de $\mathbb{C}$. Une application conforme f de D dans D' est une application bijective qui préserve les angles (locaux).

- Une application analytique est conforme (là où sa dérivée est $\neq 0$).
 - Une application conforme qui a des dérivées partielles continues est holomorphe.
- Dans ce cas, sa réciproque est donc conforme et donc holomorphe



Invariance conforme

Théorème (de représentation conforme de Riemann)

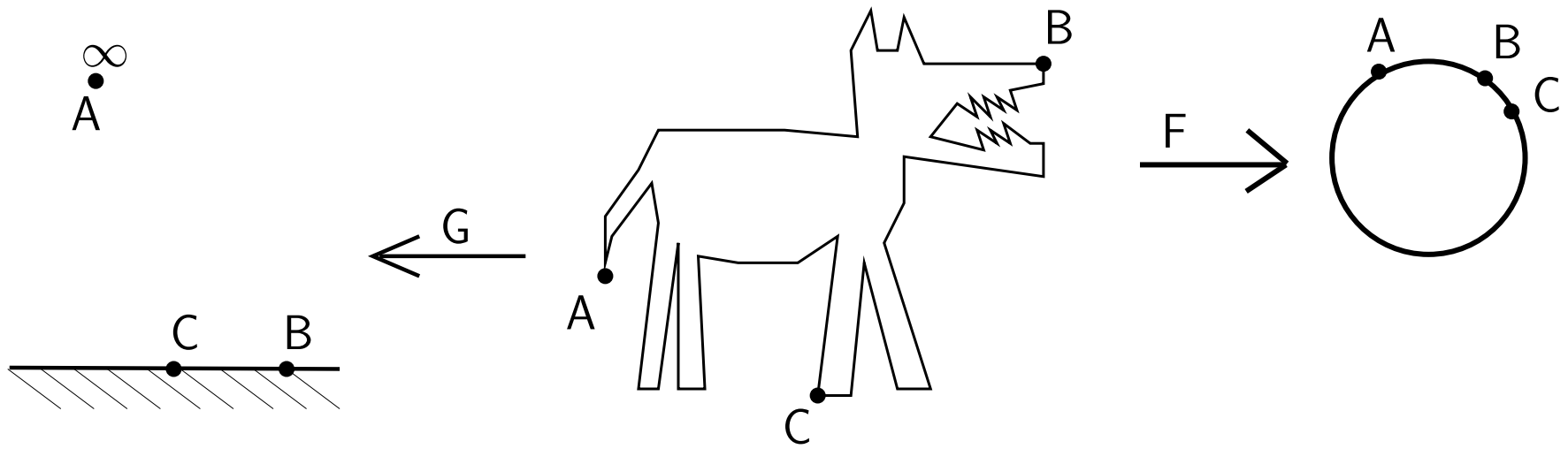
Soit U un ouvert simplement connexe de $\mathbb{C}$ (différent de $\mathbb{C}$). Il existe une application conforme f de U dans $B(0, 1) = \{z, |z| < 1\}$.

Se donner f ou se donner U (ou ∂U) est (presque) équivalent:

presque car f n'est pas unique : on a trois degrés de liberté (on peut par exemple fixer les images de trois points du bord)

On peut bien sûr remplacer $B(0, 1)$ par $\mathbb{H} = \{z, \operatorname{Im}(z) > 0\}$.

Invariance conforme pour les enfants.



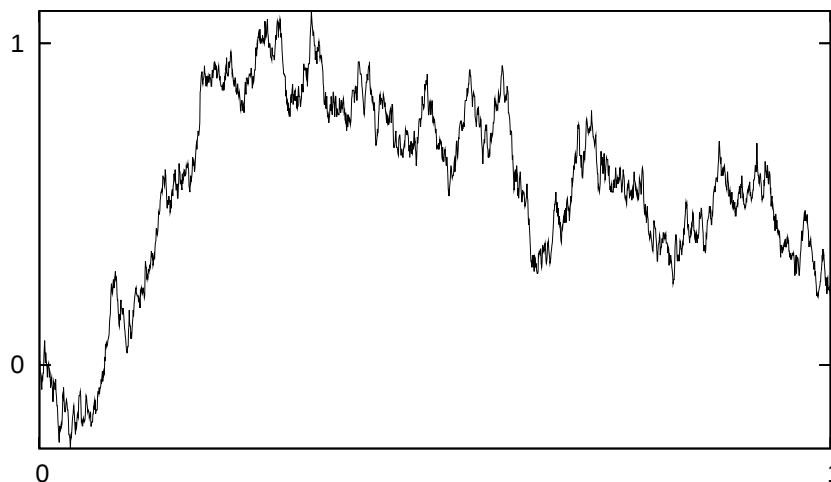
Théorème (de représentation conforme de Riemann pour les enfants)

- On peut mettre en boule tout chien (ou l'aplatir sur tout $\mathbb{H}$) de manière continue et en plus sans le décoiffer (on conserve les angles entre les poils).
- Après, on peut revenir en arrière continûment aussi et reconstituer exactement le chien (ou un autre), sans décoiffer la boule.

Le mouvement Brownien

Le mouvement brownien (dans $\mathbb{R}$) est le processus limite des marches aléatoires de moyenne 0 admettant une variance $\sigma^2 = 1$ normalisées.

$$S_k = X_1 + \cdots + X_k, \quad \left(\frac{S_{nt}}{\sqrt{n}} \right)_{t \in [0,a]} \longrightarrow (B_t)_{t \in [0,a]}$$



- C'est un processus Gaussien à accroissements indépendants et stationnaires.
- Il possède des propriétés de changement d'échelle $(B(at))_t \stackrel{(d)}{=} \sqrt{a}(B_t)_t$

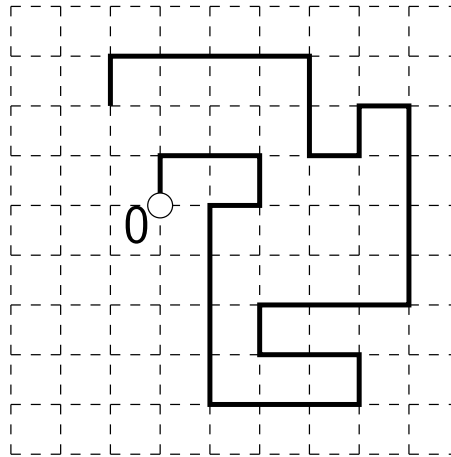
Théorème Le mouvement brownien dans $\mathbb{R}$ est le seul processus symétrique, continu à accroissements stationnaires et indépendants (à une constante mult. près).

Modèles discrets de courbes planaires

1) Marches auto-évitantes sur un réseau:

- il s'agit d'une marche partant de 0 ne passant pas 2 fois par le même sommet.

Modèle probabiliste: loi uniforme sur les marches de taille n .



- Combinatoirement on ne sait quasi-rien sur ces objets (quel que soit le réseau non trivial)

Modèles discrets de courbes planaires

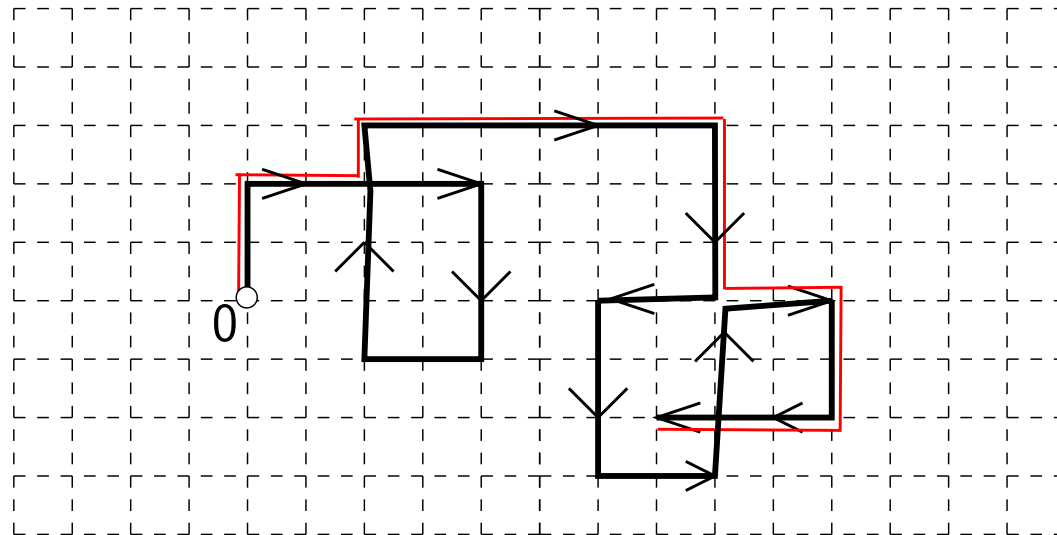
2) Marches à boucles effacées (introduites par G.F. Lawler)

- on prend une marche symétrique au plus proche voisin (proba. $1/4$ pour N, S, E, O).
Dès qu'une boucle est formée, on l'efface.

Modèle probabiliste:

La marche de départ (avant effaçage) est uniforme parmi les marches de taille n :
cela induit une loi non unif. sur les marches auto-évitantes (de taille $\leq n$).

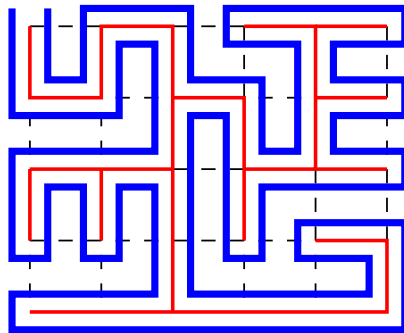
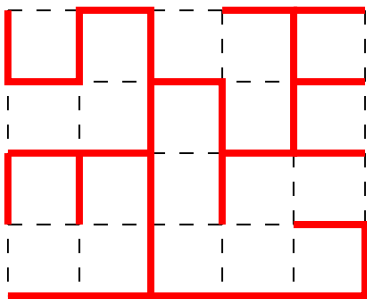
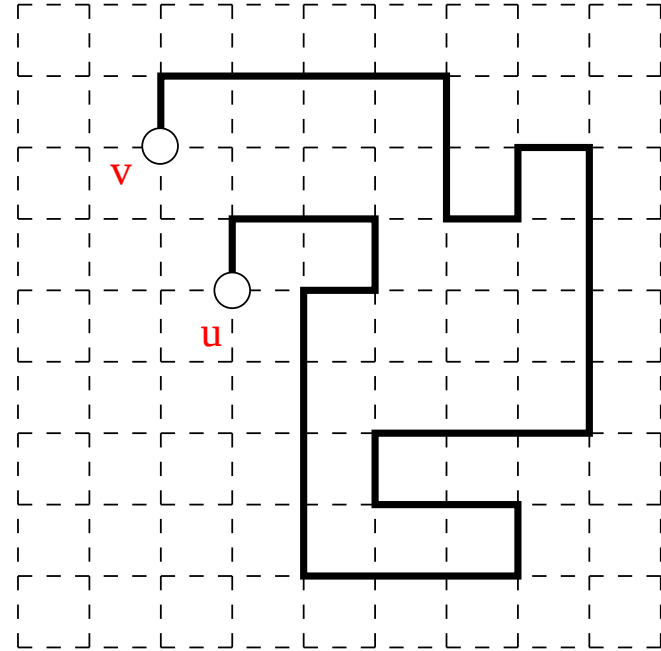
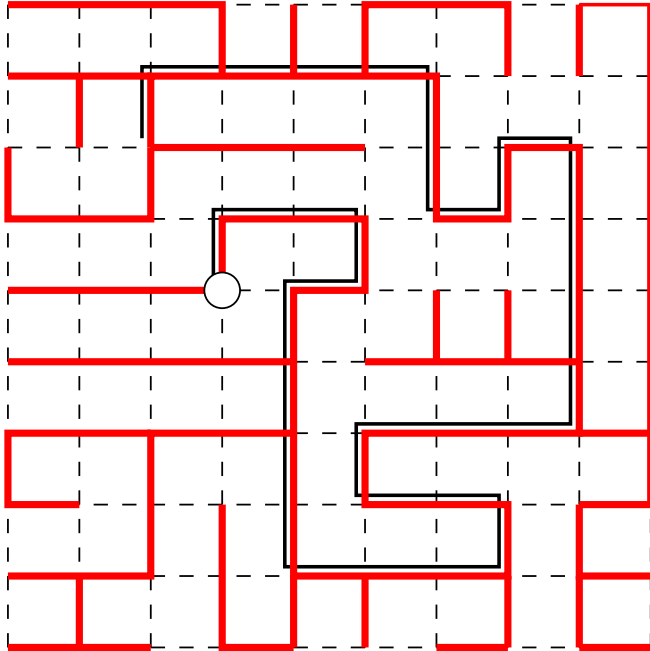
[Parfois on se restreint à un domaine et on arrête la marche lorsqu'elle en sort.]



Modèles discrets de courbes planaires

Arbre couvrant uniforme : soit G un graphe.

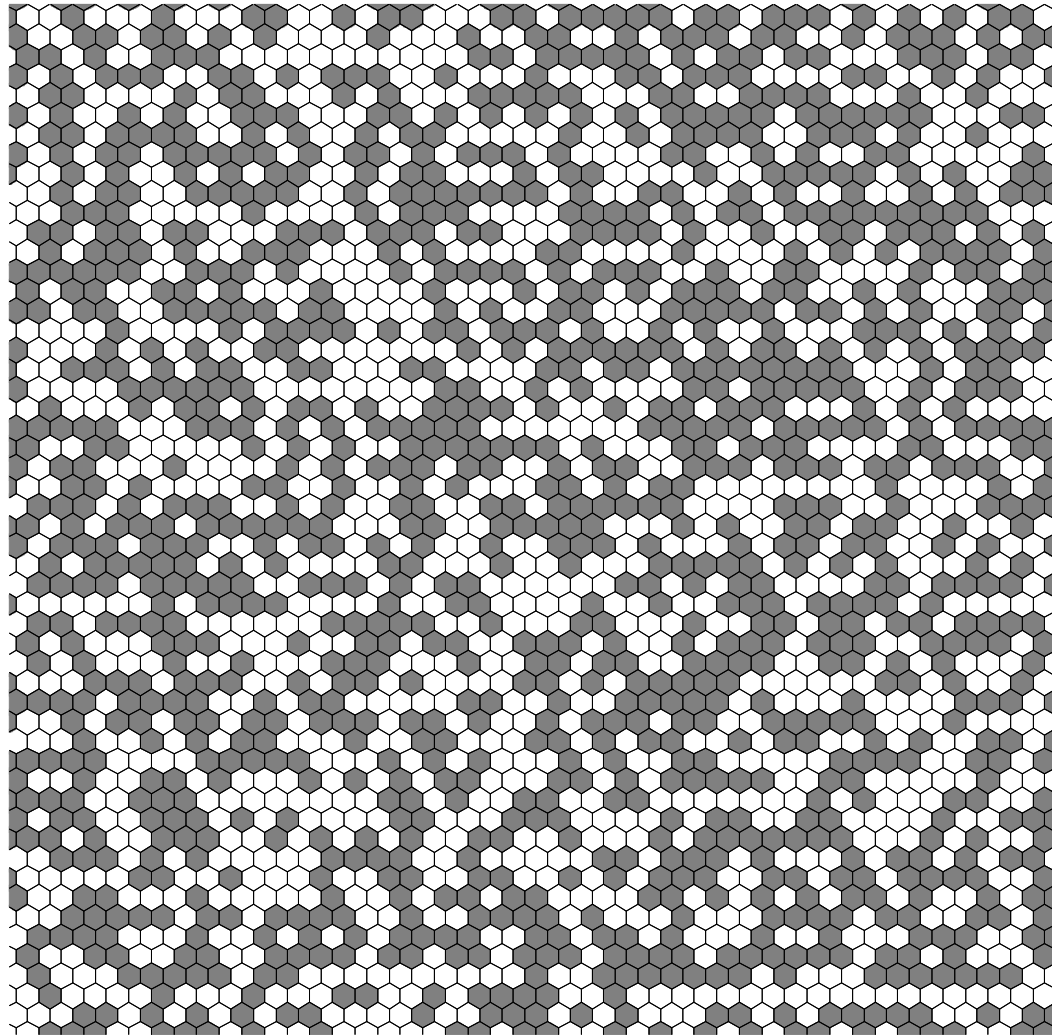
Exemple d'un rectangle sur le réseau $\mathbb{Z}^2$



Courbe de Peano associée

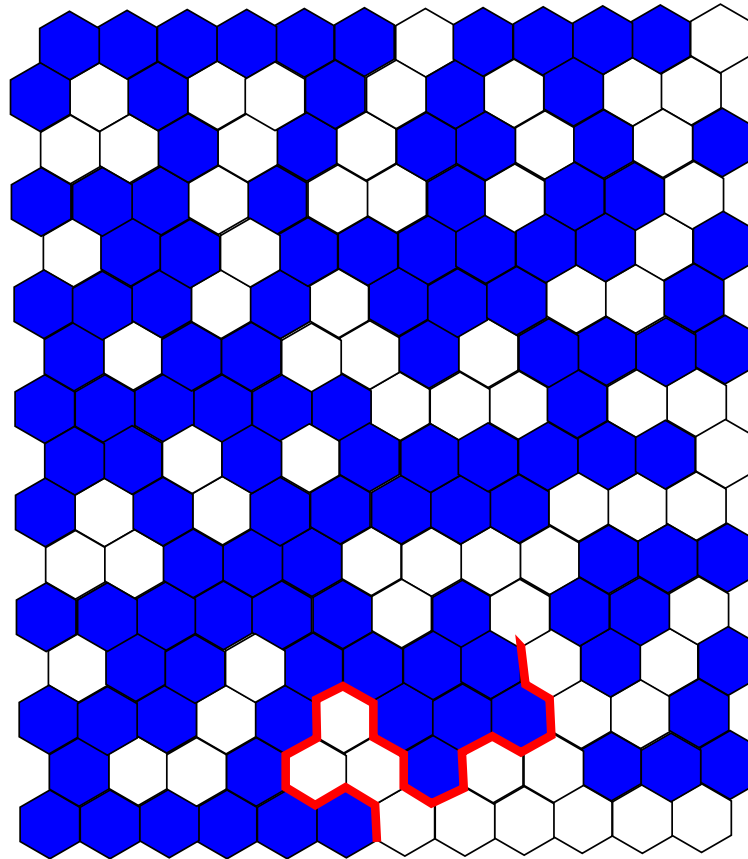
Modèles discrets de courbes planaires

Interface de percolation : percolation de site: ici triangulaire, dualité avec le réseau hexagonal, où les cellules sont colorées en noir ou blanc.



Modèles discrets de courbes planaires

Interface de percolation :



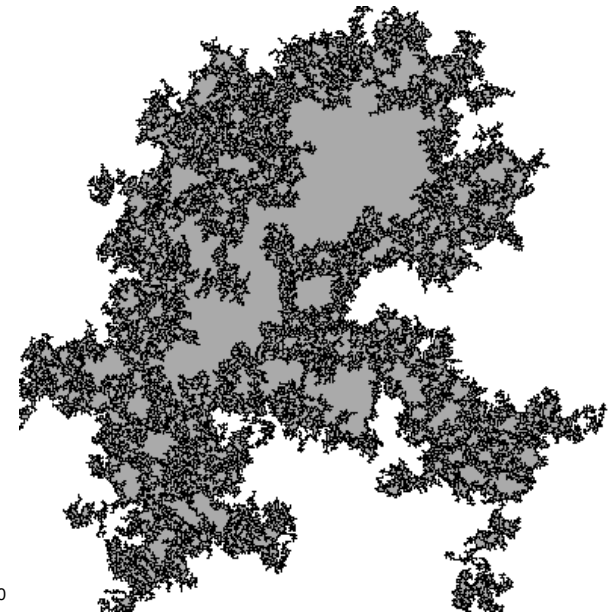
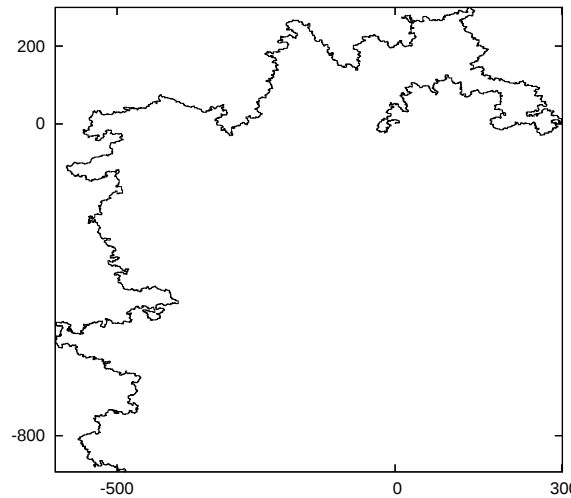
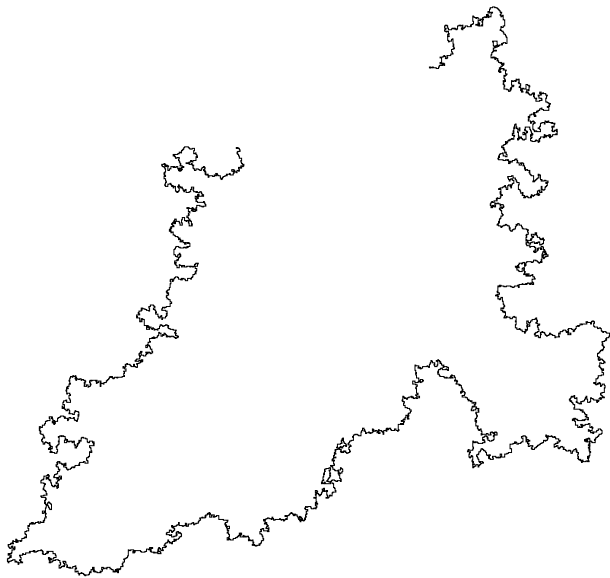
On a fixé la couleur des cellules sur le bord de $\mathbb{H}$: noir à gauche de 0, blanc à droite

Bilan

Dans chacun des cas, on a vu apparaître des trajectoires dans $\mathbb{R}^2$.

- Marches auto-évitantes
- marches à boucles effacées
- Courbe de Peano associée à UST
- interface de percolation.

Il est attendu que ces objets ont un comportement limite...et “la courbe limite (aléatoire)” pour de “bonnes” raisons devrait posséder des propriétés d'invariance conforme.

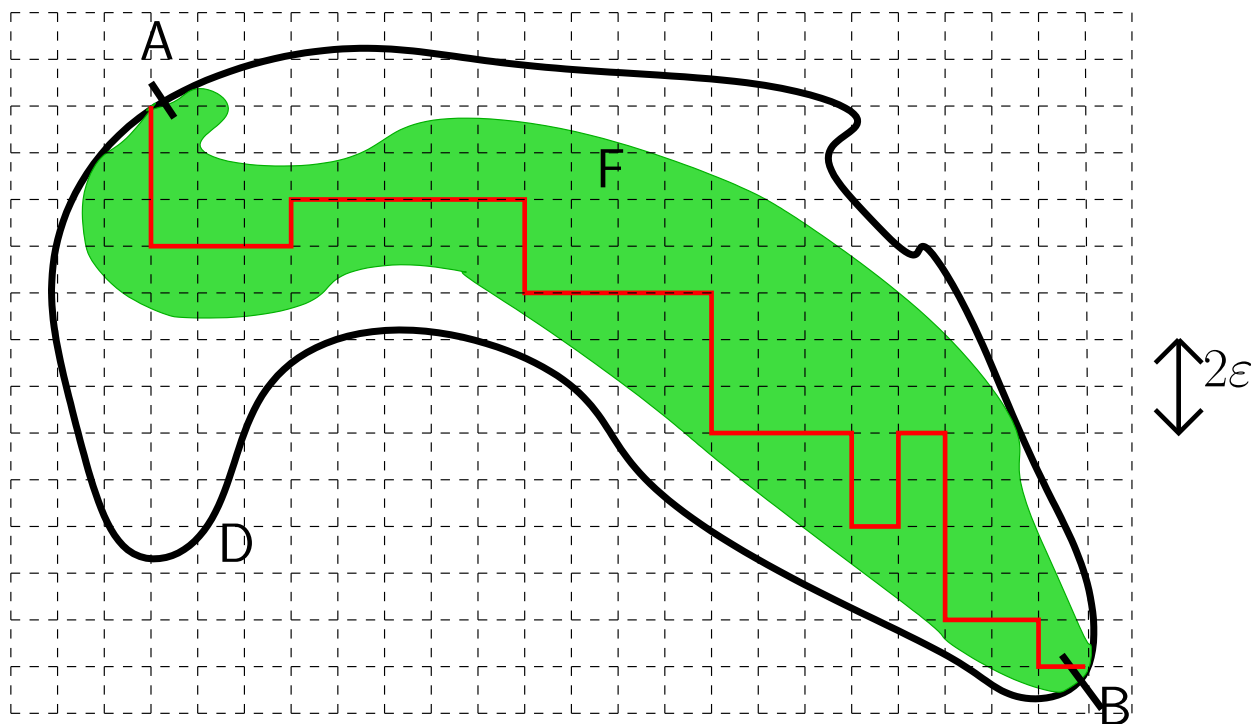


MAE (10 000: simu. Beffara), MBE, Site Percolation cluster ($p = 0.58$, simu. Beffara)

Qu'est-ce au juste que l'invariance conforme et la convergence ?

On voudrait connaître la loi d'une trajectoire dans un domaine donné, avec condition au bord, c'est plus facile:

On fixe D , deux points du bord A et B , et on fait tendre la maille du réseau, ε , vers 0.



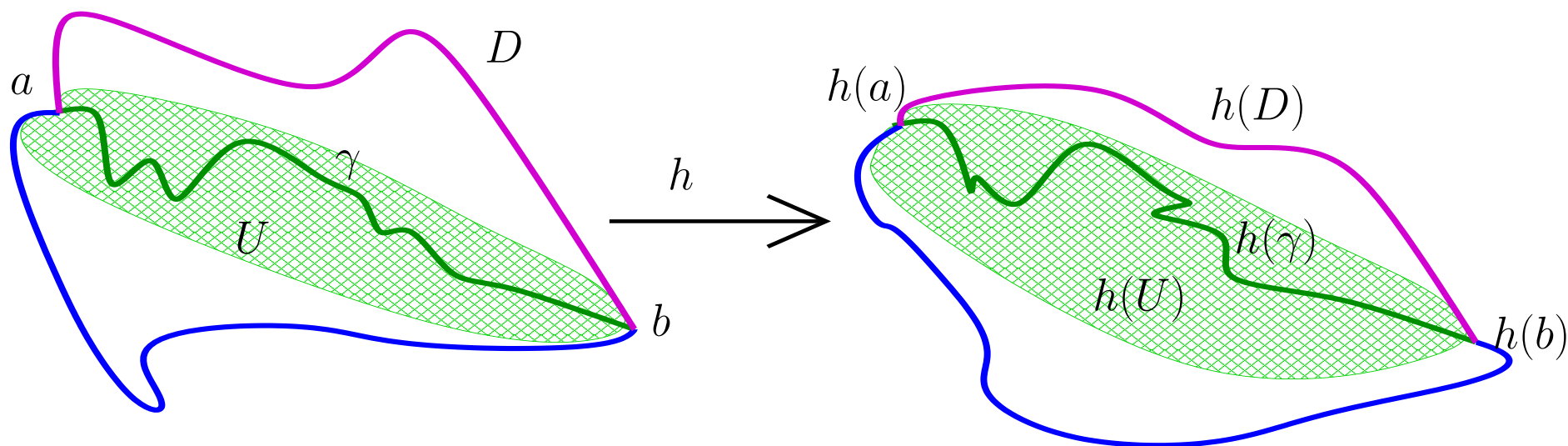
On s'attend à ce que la proba que γ reste dans un fermé converge.
La proba limite est une proba. sur les fermés

$$\mathbb{P}_{D,a,b}(F) = \text{proba que la courbe soit dans } F.$$

Qu'est-ce au juste que l'invariance conforme?

Ce sont plutôt les lois que les trajectoires qui sont invariantes conformes

Invariance entre 2 domaines: On note $P_{(D,a,b)}$ la loi des trajectoires dans D allant de a à b .

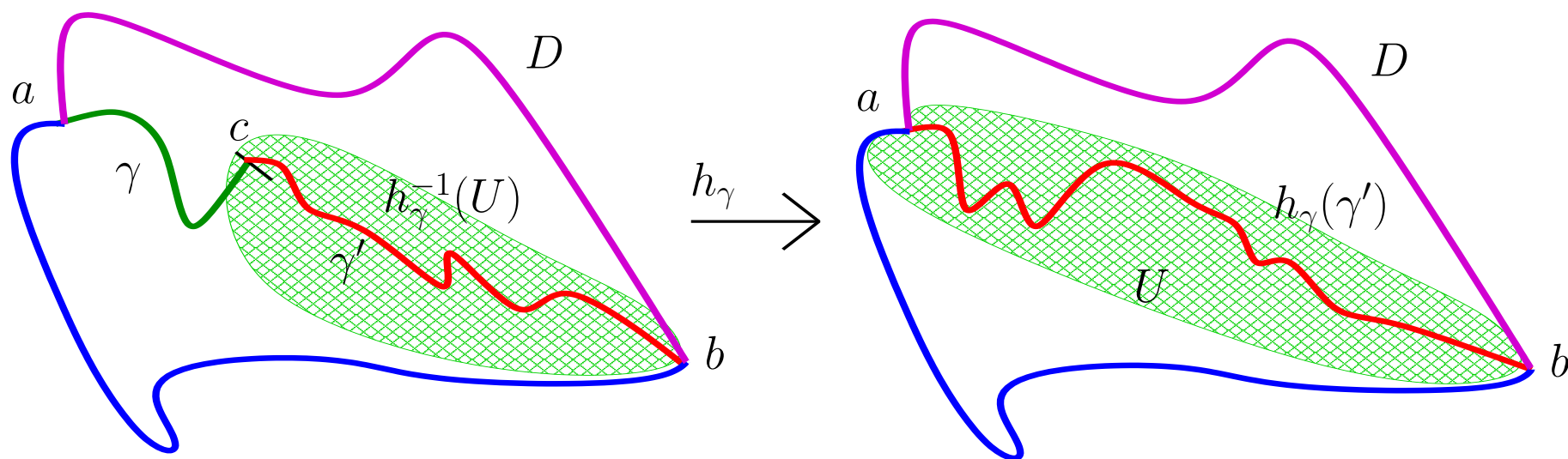


On doit avoir

$$P_{(D,a,b)}\left(\gamma[a,b] \subset U\right) = P_{(h(D),h(a),h(b))}\left(h(\gamma[a,b]) \subset h(U)\right)$$

Qu'est-ce au juste que l'invariance conforme?

Invariance intra-domaine fixé : une espèce de propriété de Markov.



Quelle est la loi résiduelle du chemin sachant qu'il commence par γ ?

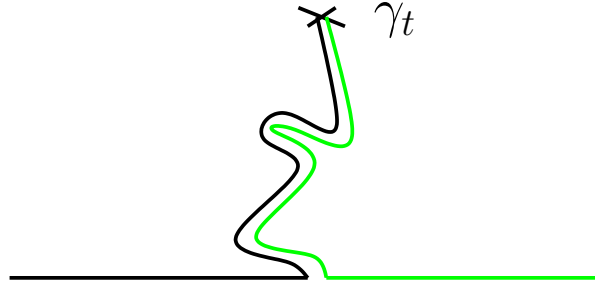
Par TRR on peut envoyer $D \setminus \gamma$ sur D , le point c sur a , b sur b .

Par invariance conforme

$h_\gamma(\gamma')$ est indépendant de γ et à la même distribution que l'interface entière " (γ, γ') ".

Peut-on être plus explicite ?! Voui

Supposons que la loi de γ soit invariante par transformation conforme.



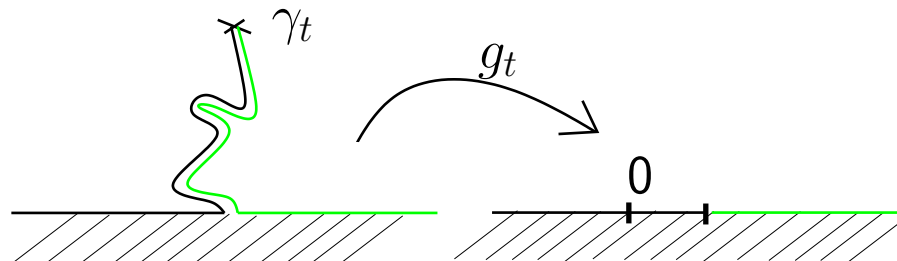
on travaille dans $D = \mathbb{H}$, $a = 0$, $b = \infty$.

$\mathbb{H}_t = \mathbb{H} \setminus \gamma([0, t])$ est ouvert, simplement connexe (si la courbe ne s'auto-croise pas).

→ TRR il existe une unique g_t conforme de $\mathbb{H}_t$ dans $\mathbb{H}$ ayant un développement asymptotique à l'infini de la forme

$$g_t(z) = z + \frac{2t}{z} + O(z^{-2}),$$

modulo éventuellement une reparamétrisation de la courbe γ .

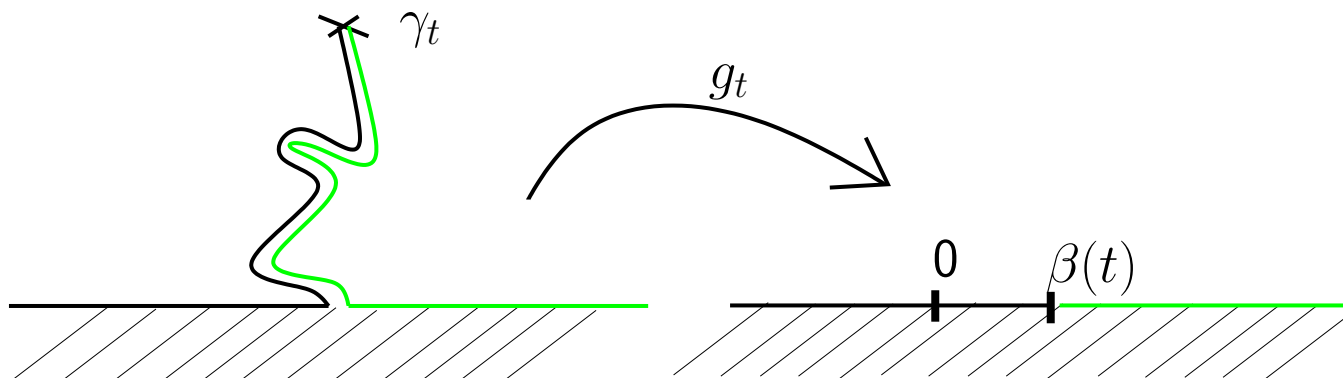


Le théorème de Loewner

- $g_0(z) = z$ et $g_t(z) = z + \frac{2t}{z} + O(z^{-2})$

Théorème (Loewner (~1930)) $t \mapsto g_t$ vérifie l'équation différentielle.

$$\partial_t g_t(z) = \frac{2}{g_t(z) - \beta(t)} \quad \text{où} \quad \beta(t) = g_t(\gamma_t) \in \mathbb{R}$$



- $g_{t+\varepsilon}$ est une légère modification de g_t .

β contient toute l'information de g_t et donc de γ_t

Si la courbe limite γ est (aléatoire) invariante conforme, alors par Loewner on peut lui associer une certaine fonction β (aléatoire). **Kesako que ce β ?**

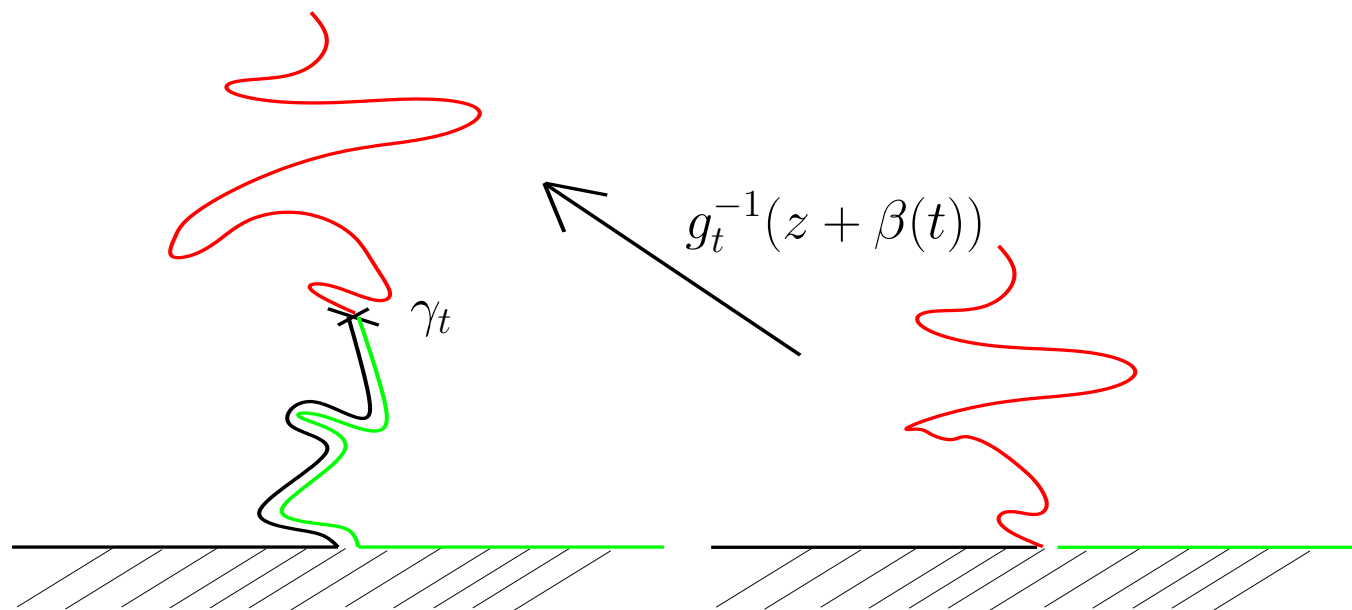
Loewner + aléatoire $\rightarrow$ SLE

L'invariance conforme s'exprime ainsi:

LOI (la courbe γ sur $[t, +\infty]$ cond. à γ sur $[0, t]$)

=

LOI (l'image de γ par l'application conforme qui envoie $\mathbb{H}$ sur $\mathbb{H}_t$ et 0 sur γ_t).



On $g_{t+s} - \beta(t+s) \stackrel{(d)}{=} [g_t - \beta(t)] \circ [\tilde{g}(s) - \tilde{\beta}(s)]$.

En $+\infty$ à l'aide du développement on trouve:

$$\beta(t+s) \stackrel{(d)}{=} \beta(t) + \tilde{\beta}(s)$$

avec $\tilde{\beta}(s)$ et $\beta(t)$ indépendants et $\tilde{\beta}(s) \stackrel{(d)}{=} \beta(s)$

Le SLE

Loewner

$$\partial_t g_t(z) = \frac{2}{g_t(z) - \beta(t)} \quad \text{où} \quad \beta(t) = g_t(\gamma_t)$$

Schramm: $\beta(t+s) \stackrel{(d)}{=} \beta(t) + \tilde{\beta}(s)$,

donc β est à accroissements stationnaires et indépendants, il est continu (par construction), et symétrique: β ne peut être qu'un mouvement Brownien dans $\mathbb{R}$.

On appelle SLE_κ la solution de l'équation différentielle lorsque $\beta(t) = \sqrt{\kappa}B_t$ ou de manière équivalente: γ_t .

selon Schramm SLE acronyme pour Stochastic Loewner evolution.

selon les autres SLE acronyme pour Schramm Loewner evolution.

Théorème (Schramm 99) • Definition du SLE.

- Les SLE sont les seuls processus continus invariant conforme dans $\mathbb{R}^2$.
- Si la limite des MAB est invariante conforme, la limite est SLE_2 .
- Conjecture : courbe exploration perco converge vers SLE_6

Un SLE, à quoi ça ressemble?

Théorème (Rohde & Schramm 2001)

- Si $\kappa \in [0, 4]$, γ est p.s. simple
- Si $\kappa \in (4, 8)$, γ possède p.s. des points doubles, mais est de mesure nulle.
- Si $\kappa \geq 8$, γ est p.s. surjective sur $\overline{\mathbb{H}}$

(Beffara 2003) Dimension de Hausdorff $\text{SLE}(\kappa) = \min(1 + \kappa/8, 2)$



Simu: Beffara

Et on arrive vraiment à prouver la convergence vers SLE?

Voui.

Théorème (Lawler, Schramm et Werner 2002)

- MAB tuée à son premier temps de sortie d'un disque converge vers SLE_2 (radial)
- Courbe Peano associée à un arbre couvrant uniforme converge vers SLE_8 .

(Camia et Newman 2006)

Convergence interface percolation par site critique sur réseau triangulaire vers SLE_6

Conjectures

(Lawler Schramm Werner) MAE: converge vers $SLE_{8/3}$

(Schramm) Interface modèle d'Ising $\kappa = 3$ à la température critique, $\kappa = 6$ dans le cas souscritique

etc... ~

Et il existe des tas de résultats de nature uniquement continue.

SOURCES

On trouve des tas de choses sur les pages de

- Oded Schramm
- Gregory F. Lawler
- Wendelin Werner

Il y a aussi :

- le cours de Michel Bauer & Denis Bernard,
- la page de Vincent Beffara sur laquelle j'ai puisé pas mal de simus.

