

Promenade (aléatoire) dans la combinatoire des tresses

Marie Albenque

30 mars 2007

Plan de l'exposé

Premiers résultats sur les groupes de tresses

- Différentes présentations du groupe

- Tresses simples

- Forme normale de Garside

Marche aléatoire sur trois brins

- Présentation de la marche aléatoire

- Grandes étapes de la preuve

- Trois brins vs quatre brins et plus

Questions et pistes pour $n \geq 4$

- Problème du mot

- Combinatoire du monoïde

- Représentant minimal

- Combinatoire du groupe

Bibliographie

Plan de l'exposé

Premiers résultats sur les groupes de tresses

- Différentes présentations du groupe

- Tresses simples

- Forme normale de Garside

Marche aléatoire sur trois brins

- Présentation de la marche aléatoire

- Grandes étapes de la preuve

- Trois brins vs quatre brins et plus

Questions et pistes pour $n \geq 4$

- Problème du mot

- Combinatoire du monoïde

- Représentant minimal

- Combinatoire du groupe

Bibliographie

Plan de l'exposé

Premiers résultats sur les groupes de tresses

- Différentes présentations du groupe

- Tresses simples

- Forme normale de Garside

Marche aléatoire sur trois brins

- Présentation de la marche aléatoire

- Grandes étapes de la preuve

- Trois brins vs quatre brins et plus

Questions et pistes pour $n \geq 4$

- Problème du mot

- Combinatoire du monoïde

- Représentant minimal

- Combinatoire du groupe

Bibliographie

Plan de l'exposé

Premiers résultats sur les groupes de tresses

- Différentes présentations du groupe

- Tresses simples

- Forme normale de Garside

Marche aléatoire sur trois brins

- Présentation de la marche aléatoire

- Grandes étapes de la preuve

- Trois brins vs quatre brins et plus

Questions et pistes pour $n \geq 4$

- Problème du mot

- Combinatoire du monoïde

- Représentant minimal

- Combinatoire du groupe

Bibliographie

Présentation géométrique

Definition

Une tresse géométrique à n brins est un n -uplet de fonctions continues $f_1, \dots, f_n$ définies sur $[0, 1]$ et à valeurs dans D le disque unité de $\mathbb{C}$ qui vérifient :

- ▶ $\{f_1(0), \dots, f_n(0)\} = \{f_1(1), \dots, f_n(1)\} = \{x_0, \dots, x_n\}$; ce sont les encrages de la tresse ;
- ▶ pour tout $t \in [0, 1]$ et pour tout $i \neq j$, on a $f_i(t) \neq f_j(t)$: les brins ne se rencontrent pas.

Definition

Une *tresse* à n brins est une classe d'équivalence de tresses géométriques à n brins vis-à-vis de l'isotopie.

Présentation géométrique

Definition

Une tresse géométrique à n brins est un n -uplet de fonctions continues $f_1, \dots, f_n$ définies sur $[0, 1]$ et à valeurs dans D le disque unité de $\mathbb{C}$ qui vérifient :

- ▶ $\{f_1(0), \dots, f_n(0)\} = \{f_1(1), \dots, f_n(1)\} = \{x_0, \dots, x_n\}$; ce sont les encrages de la tresse ;
- ▶ pour tout $t \in [0, 1]$ et pour tout $i \neq j$, on a $f_i(t) \neq f_j(t)$: les brins ne se rencontrent pas.

Definition

Une *tresse* à n brins est une classe d'équivalence de tresses géométriques à n brins vis-à-vis de l'isotopie.

Présentation par générateurs et relations

$$\mathbb{B}_n = \left\langle \sigma_1, \dots, \sigma_{n-1} \left| \begin{array}{ll} \sigma_i \sigma_j = \sigma_j \sigma_i & \text{si } |i - j| \geq 2 \\ \sigma_i \sigma_{i+1} \sigma_i = \sigma_{i+1} \sigma_i \sigma_{i+1} \end{array} \right. \right\rangle$$

On note $\Sigma = \{\sigma_1, \dots, \sigma_{n-1}\}$, ce sont les **générateurs d'Artin**.

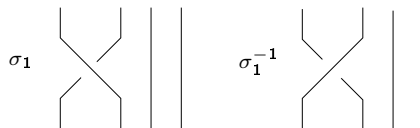


Fig.: Représentation sous forme de tresses

Plusieurs représentations...

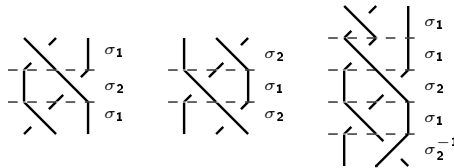


Fig.: Trois représentations équivalentes d'une même tresse

Une *tresse* désigne une classe d'équivalence de mots.

Un *diagramme de tresse* désigne un mot de cette classe d'équivalence

La *longueur* d'une tresse est la longueur d'un plus court diagramme.

Plusieurs représentations...

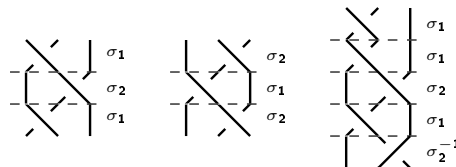


Fig.: Trois représentations équivalentes d'une même tresse

Une *tresse* désigne une classe d'équivalence de mots.

Un *diagramme de tresse* désigne un mot de cette classe d'équivalence

La *longueur* d'une tresse est la longueur d'un plus court diagramme.

Plusieurs représentations...

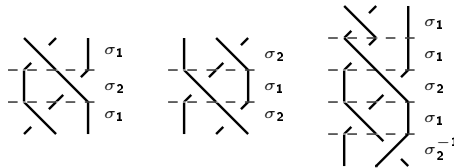


Fig.: Trois représentations équivalentes d'une même tresse

Une *tresse* désigne une classe d'équivalence de mots.

Un *diagramme de tresse* désigne un mot de cette classe d'équivalence

La *longueur* d'une tresse est la longueur d'un plus court diagramme.

Equivalence des présentations

Il est facile de voir que si deux diagrammes appartiennent à la même classe d'équivalence alors les tresses géométriques associées sont isotopes.

La réciproque est plus difficile et est un résultat d'Artin.

Difféotopies d'un disque troué

En regardant les tresses du dessus, on peut voir une tresse à n brins comme le mouvement de n points du disque.

Plus précisément, soit D_n le disque du plan marqué de n points, on regarde le quotient par isotopie des homéomorphismes de D_n dans lui-même préservant l'orientation, laissant fixe le bord extérieur δD_n et préservant globalement les n points.

C'est un groupe isomorphe à $\mathbb{B}_n$.

Difféotopies d'un disque troué

En regardant les tresses du dessus, on peut voir une tresse à n brins comme le mouvement de n points du disque.

Plus précisément, soit D_n le disque du plan marqué de n points, on regarde le quotient par isotopie des homéomorphismes de D_n dans lui-même préservant l'orientation, laissant fixe le bord extérieur δD_n et préservant globalement les n points.

C'est un groupe isomorphe à $\mathbb{B}_n$.

Difféotopies d'un disque troué

En regardant les tresses du dessus, on peut voir une tresse à n brins comme le mouvement de n points du disque.

Plus précisément, soit D_n le disque du plan marqué de n points, on regarde le quotient par isotopie des homéomorphismes de D_n dans lui-même préservant l'orientation, laissant fixe le bord extérieur δD_n et préservant globalement les n points.

C'est un groupe isomorphe à $\mathbb{B}_n$.

Groupe d'automorphismes d'un groupe libre

Soit $F_n = \langle x_1, \dots, x_n \rangle$ le groupe libre à n générateurs.

Soit G le sous-groupe de $\text{Aut}(F_n)$ tel que, pour tout $\phi \in G$:

- ▶ $\phi(x_1 \dots x_n) = x_1 \dots x_n$
- ▶ Il existe $f \in \mathcal{S}_n$ telle que $\phi(x_i)$ soit un conjugué de $x_{f(i)}$ pour tout i .

Alors G est isomorphe à B_n .

Groupe d'automorphismes d'un groupe libre

Soit $F_n = \langle x_1, \dots, x_n \rangle$ le groupe libre à n générateurs.

Soit G le sous-groupe de $\text{Aut}(F_n)$ tel que, pour tout $\phi \in G$:

- ▶ $\phi(x_1 \dots x_n) = x_1 \dots x_n$
- ▶ Il existe $f \in \mathcal{S}_n$ telle que $\phi(x_i)$ soit un conjugué de $x_{f(i)}$ pour tout i .

Alors G est isomorphe à B_n .

Groupe d'automorphismes d'un groupe libre

Soit $F_n = \langle x_1, \dots, x_n \rangle$ le groupe libre à n générateurs.

Soit G le sous-groupe de $\text{Aut}(F_n)$ tel que, pour tout $\phi \in G$:

- ▶ $\phi(x_1 \dots x_n) = x_1 \dots x_n$
- ▶ Il existe $f \in \mathcal{S}_n$ telle que $\phi(x_i)$ soit un conjugué de $x_{f(i)}$ pour tout i .

Alors G est isomorphe à B_n .

Tresses positives

Une représentation de tresse est *positive* si elle ne comporte aucun σ_i^{-1} .

Une tresse est *positive* si elle admet une représentation positive.

L'ensemble des tresses positives forment un monoïde noté $\mathbb{B}_n^+$.
Elles correspondent aux tresses où tous les croisements ont la même orientation.

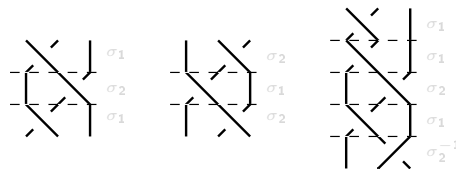


Fig.: Tresse positive et représentations

Tresses positives

Une représentation de tresse est *positive* si elle ne comporte aucun σ_i^{-1} .

Une tresse est *positive* si elle admet une représentation positive.

L'ensemble des tresses positives forment un monoïde noté $\mathbb{B}_n^+$. Elles correspondent aux tresses où tous les croisements ont la même orientation.

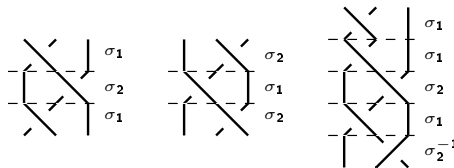


Fig.: Tresse positive et représentations

Monoïde de tresses

Théorème (Garside)

Le monoïde $\mathbb{B}_n^+$ admet comme présentation de **monoïde** :

$$\mathbb{B}_n^+ = \langle \sigma_1, \dots, \sigma_{n-1} \mid \begin{array}{l} \sigma_i \sigma_j = \sigma_j \sigma_i \quad \text{si } |i - j| \geq 2 \\ \sigma_i \sigma_{i+1} \sigma_i = \sigma_{i+1} \sigma_i \sigma_{i+1} \end{array} \rangle$$

Remarque

Plus précisément, $\mathbb{B}_n$ est le groupe des fractions de $\mathbb{B}_n^+$.

tresse = (tresse positive) (tresse négative)

Tresses et permutations

En ne regardant que la position de départ et d'arrivée des brins, une tresse à n brins définit une permutation de $\{1, \dots, n\}$.

En effet, en posant $\pi(\sigma_i) = \tau_{i,i+1}$, où $\tau_{i,i+1}$ est la transposition $(i, i+1)$, on induit un morphisme de groupes de $\mathbb{B}_n \rightarrow \mathcal{S}_n$.

π est clairement surjectif et non injectif,
par ex : $\pi(\sigma_i^2) = \pi(1) = Id$

Tresses et permutations

En ne regardant que la position de départ et d'arrivée des brins, une tresse à n brins définit une permutation de $\{1, \dots, n\}$.

En effet, en posant $\pi(\sigma_i) = \tau_{i,i+1}$, où $\tau_{i,i+1}$ est la transposition $(i, i+1)$, on induit un morphisme de groupes de $\mathbb{B}_n \rightarrow \mathcal{S}_n$.

π est clairement surjectif et non injectif,
par ex : $\pi(\sigma_i^2) = \pi(1) = Id$

Tresses et permutations

En ne regardant que la position de départ et d'arrivée des brins, une tresse à n brins définit une permutation de $\{1, \dots, n\}$.

En effet, en posant $\pi(\sigma_i) = \tau_{i,i+1}$, où $\tau_{i,i+1}$ est la transposition $(i, i+1)$, on induit un morphisme de groupes de $\mathbb{B}_n \rightarrow \mathcal{S}_n$.

π est clairement surjectif et non injectif,
par ex : $\pi(\sigma_i^2) = \pi(1) = Id$

Tresses et permutations (suite)

Definition

Soit $\mathcal{G}_n$, le quotient de $\mathbb{B}_n$ par les relations : $\sigma_i^2 = 1$
 $\forall i \in \{1, \dots, n-1\}$

Proposition

Le groupe $\mathcal{G}_n$ est fini, c'est le groupe symétrique à n éléments.

Soit $\bar{g} \in \mathcal{G}_n$, il existe un unique $g \in \mathbb{B}_n$ positive de longueur minimale telle que la classe d'équivalence de g dans $\mathcal{G}_n$ soit $\bar{g}$.

Definition

On appelle *tresses simples* les éléments de $\mathbb{B}_n$ ainsi définis.

Tresses et permutations (suite)

Definition

Soit $\mathcal{G}_n$, le quotient de $\mathbb{B}_n$ par les relations : $\sigma_i^2 = 1$
 $\forall i \in \{1, \dots, n-1\}$

Proposition

Le groupe $\mathcal{G}_n$ est fini, c'est le groupe symétrique à n éléments.

Soit $\bar{g} \in \mathcal{G}_n$, il existe un unique $g \in \mathbb{B}_n$ positive de longueur minimale telle que la classe d'équivalence de g dans $\mathcal{G}_n$ soit $\bar{g}$.

Definition

On appelle *tresses simples* les éléments de $\mathbb{B}_n$ ainsi définis.

Tresses et permutations (suite)

Definition

Soit $\mathcal{G}_n$, le quotient de $\mathbb{B}_n$ par les relations : $\sigma_i^2 = 1$
 $\forall i \in \{1, \dots, n-1\}$

Proposition

Le groupe $\mathcal{G}_n$ est fini, c'est le groupe symétrique à n éléments.

Soit $\bar{g} \in \mathcal{G}_n$, il existe un unique $g \in \mathbb{B}_n$ positive de longueur minimale telle que la classe d'équivalence de g dans $\mathcal{G}_n$ soit $\bar{g}$.

Definition

On appelle *tresses simples* les éléments de $\mathbb{B}_n$ ainsi définis.

L'élément Δ

Proposition

Le groupe $\mathcal{G}_n$ admet un unique plus long élément que l'on note Δ_n . L'élément Δ_n vérifie les propriétés suivantes :

- ▶ $\langle \Delta_n^2 \rangle = Z(\mathbb{B})$
- ▶ $\forall i \in \{1, \dots, n-1\}, \sigma_i \Delta_n = \Delta_n \sigma_{n-i}$
- ▶ $\forall u \in \mathcal{G}, u \prec \Delta_n$

L'élément Δ_n correspond à un retournement de la tresse.

$$\Delta_1 = 1, \quad \Delta_n = \Delta_{n-1} \sigma_{n-1} \sigma_{n-2} \dots \sigma_1$$

L'élément Δ

Proposition

Le groupe $\mathcal{G}_n$ admet un unique plus long élément que l'on note Δ_n . L'élément Δ_n vérifie les propriétés suivantes :

- ▶ $\langle \Delta_n^2 \rangle = Z(\mathbb{B})$
- ▶ $\forall i \in \{1, \dots, n-1\}, \sigma_i \Delta_n = \Delta_n \sigma_{n-i}$
- ▶ $\forall u \in \mathcal{G}, u \prec \Delta_n$

L'élément Δ_n correspond à un retournement de la tresse.

$$\Delta_1 = 1, \quad \Delta_n = \Delta_{n-1} \sigma_{n-1} \sigma_{n-2} \dots \sigma_1$$

L'élément Δ

Proposition

Le groupe $\mathcal{G}_n$ admet un unique plus long élément que l'on note Δ_n . L'élément Δ_n vérifie les propriétés suivantes :

- ▶ $\langle \Delta_n^2 \rangle = Z(\mathbb{B})$
- ▶ $\forall i \in \{1, \dots, n-1\}, \sigma_i \Delta_n = \Delta_n \sigma_{n-i}$
- ▶ $\forall u \in \mathcal{G}, u \prec \Delta_n$

L'élément Δ_n correspond à un retournement de la tresse.

$$\Delta_1 = 1, \quad \Delta_n = \Delta_{n-1} \sigma_{n-1} \sigma_{n-2} \dots \sigma_1$$

L'élément Δ

Proposition

Le groupe $\mathcal{G}_n$ admet un unique plus long élément que l'on note Δ_n . L'élément Δ_n vérifie les propriétés suivantes :

- ▶ $\langle \Delta_n^2 \rangle = Z(\mathbb{B})$
- ▶ $\forall i \in \{1, \dots, n-1\}, \sigma_i \Delta_n = \Delta_n \sigma_{n-i}$
- ▶ $\forall u \in \mathcal{G}, u \prec \Delta_n$

L'élément Δ_n correspond à un retournement de la tresse.

$$\Delta_1 = 1, \quad \Delta_n = \Delta_{n-1} \sigma_{n-1} \sigma_{n-2} \dots \sigma_1$$

L'élément Δ

Proposition

Le groupe $\mathcal{G}_n$ admet un unique plus long élément que l'on note Δ_n . L'élément Δ_n vérifie les propriétés suivantes :

- ▶ $\langle \Delta_n^2 \rangle = Z(\mathbb{B})$
- ▶ $\forall i \in \{1, \dots, n-1\}, \sigma_i \Delta_n = \Delta_n \sigma_{n-i}$
- ▶ $\forall u \in \mathcal{G}, u \prec \Delta_n$

L'élément Δ_n correspond à un retournement de la tresse.

$$\Delta_1 = 1, \quad \Delta_n = \Delta_{n-1} \sigma_{n-1} \sigma_{n-2} \dots \sigma_1$$

L'élément Δ

Proposition

Le groupe $\mathcal{G}_n$ admet un unique plus long élément que l'on note Δ_n . L'élément Δ_n vérifie les propriétés suivantes :

- ▶ $\langle \Delta_n^2 \rangle = Z(\mathbb{B})$
- ▶ $\forall i \in \{1, \dots, n-1\}, \sigma_i \Delta_n = \Delta_n \sigma_{n-i}$
- ▶ $\forall u \in \mathcal{G}, u \prec \Delta_n$

L'élément Δ_n correspond à un retournement de la tresse.

$$\Delta_1 = 1, \quad \Delta_n = \Delta_{n-1} \sigma_{n-1} \sigma_{n-2} \dots \sigma_1$$

Forme Normale de Garside (FNG)

Definition

Soit $u \in \mathcal{G}$, on définit $Left(u) = \{\sigma_i \in \Sigma \mid \sigma_i \prec u\}$.

On définit de manière analogue $Right(u)$

Exemple (Dans $\mathbb{B}_4$)

$$u = acba = \begin{cases} acba \Rightarrow a \in Left(u) \text{ et } a \in Right(u) \\ caba \Rightarrow c \in Left(u) \text{ et } a \in Right(u) \\ cbab \Rightarrow c \in Left(u) \text{ et } b \in Right(u) \end{cases}$$

Finalement $Left(u) = \{a, c\}$ et $Right(u) = \{a, b\}$

Forme Normale de Garside (FNG)

Definition

Soit $u \in \mathcal{G}$, on définit $Left(u) = \{\sigma_i \in \Sigma \mid \sigma_i \prec u\}$.

On définit de manière analogue $Right(u)$

Exemple (Dans $\mathbb{B}_4$)

$$u = acba = \begin{cases} acba \Rightarrow a \in Left(u) \text{ et } a \in Right(u) \\ caba \Rightarrow c \in Left(u) \text{ et } a \in Right(u) \\ cbab \Rightarrow c \in Left(u) \text{ et } b \in Right(u) \end{cases}$$

Finalement $Left(u) = \{a, c\}$ et $Right(u) = \{a, b\}$

Forme Normale de Garside (FNG)

Definition

Soit $u \in \mathcal{G}$, on définit $Left(u) = \{\sigma_i \in \Sigma \mid \sigma_i \prec u\}$.

On définit de manière analogue $Right(u)$

Exemple (Dans $\mathbb{B}_4$)

$$u = acba = \begin{cases} acba \Rightarrow a \in Left(u) \text{ et } a \in Right(u) \\ caba \Rightarrow c \in Left(u) \text{ et } a \in Right(u) \\ cbab \Rightarrow c \in Left(u) \text{ et } b \in Right(u) \end{cases}$$

Finalement $Left(u) = \{a, c\}$ et $Right(u) = \{a, b\}$

Forme Normale de Garside (FNG)

Definition

Soit $u \in \mathcal{G}$, on définit $Left(u) = \{\sigma_i \in \Sigma \mid \sigma_i \prec u\}$.

On définit de manière analogue $Right(u)$

Exemple (Dans $\mathbb{B}_4$)

$$u = acba = \begin{cases} acba \Rightarrow a \in Left(u) \text{ et } a \in Right(u) \\ caba \Rightarrow c \in Left(u) \text{ et } a \in Right(u) \\ cbab \Rightarrow c \in Left(u) \text{ et } b \in Right(u) \end{cases}$$

Finalement $Left(u) = \{a, c\}$ et $Right(u) = \{a, b\}$

Forme Normale de Garside (FNG)

Definition

Soit $u \in \mathcal{G}$, on définit $Left(u) = \{\sigma_i \in \Sigma \mid \sigma_i \prec u\}$.

On définit de manière analogue $Right(u)$

Exemple (Dans $\mathbb{B}_4$)

$$u = acba = \begin{cases} acba \Rightarrow a \in Left(u) \text{ et } a \in Right(u) \\ caba \Rightarrow c \in Left(u) \text{ et } a \in Right(u) \\ cbab \Rightarrow c \in Left(u) \text{ et } b \in Right(u) \end{cases}$$

Finalement $Left(u) = \{a, c\}$ et $Right(u) = \{a, b\}$

Forme Normale de Garside (FNG)

Definition

Soit $u \in \mathcal{G}$, on définit $Left(u) = \{\sigma_i \in \Sigma \mid \sigma_i \prec u\}$.

On définit de manière analogue $Right(u)$

Exemple (Dans $\mathbb{B}_4$)

$$u = acba = \begin{cases} acba \Rightarrow a \in Left(u) \text{ et } a \in Right(u) \\ caba \Rightarrow c \in Left(u) \text{ et } a \in Right(u) \\ cbab \Rightarrow c \in Left(u) \text{ et } b \in Right(u) \end{cases}$$

Finalement $Left(u) = \{a, c\}$ et $Right(u) = \{a, b\}$

Théorème (Garside ('67))

Soit $b \in \mathbb{B}$, b peut s'écrire de manière unique sous la forme :

$$b = \Delta^k \cdot u_1 \cdot \dots \cdot u_n$$

où $k \in \mathbb{Z}$, $\forall i \in \{1, \dots, n\}$, $u_i \in \mathcal{G} \setminus \{\Delta\}$
 et $\forall i \in \{1, \dots, n-1\}$, $\text{Left}(u_{i+1}) \subset \text{Right}(u_i)$.

On appelle cette écriture la forme normale de Garside (FNG) de b .

Dans $\mathbb{B}_3$, $ab^{-1}a = a \cdot \Delta^{-1}ba \cdot a = \Delta^{-1} \cdot b \cdot ba \cdot a$

Dans B_4 , $ab^{-1}a = a \cdot \Delta^{-1}abcba \cdot a = \Delta^{-1}cabcb \cdot ba \cdot a$

Théorème (Garside ('67))

Soit $b \in \mathbb{B}$, b peut s'écrire de manière unique sous la forme :

$$b = \Delta^k \cdot u_1 \cdot \dots \cdot u_n$$

où $k \in \mathbb{Z}$, $\forall i \in \{1, \dots, n\}$, $u_i \in \mathcal{G} \setminus \{\Delta\}$
 et $\forall i \in \{1, \dots, n-1\}$, $\text{Left}(u_{i+1}) \subset \text{Right}(u_i)$.

On appelle cette écriture la forme normale de Garside (FNG) de b .

Dans $\mathbb{B}_3$, $ab^{-1}a = a \cdot \Delta^{-1}ba \cdot a = \Delta^{-1} \cdot b \cdot ba \cdot a$

Dans B_4 , $ab^{-1}a = a \cdot \Delta^{-1}abcba \cdot a = \Delta^{-1}cabcb \cdot ba \cdot a$

Théorème (Garside ('67))

Soit $b \in \mathbb{B}$, b peut s'écrire de manière unique sous la forme :

$$b = \Delta^k \cdot u_1 \cdot \dots \cdot u_n$$

où $k \in \mathbb{Z}$, $\forall i \in \{1, \dots, n\}$, $u_i \in \mathcal{G} \setminus \{\Delta\}$
 et $\forall i \in \{1, \dots, n-1\}$, $\text{Left}(u_{i+1}) \subset \text{Right}(u_i)$.

On appelle cette écriture la forme normale de Garside (FNG) de b .

Dans $\mathbb{B}_3$, $ab^{-1}a = a \cdot \Delta^{-1}ba \cdot a = \Delta^{-1} \cdot b \cdot ba \cdot a$

Dans B_4 , $ab^{-1}a = a \cdot \Delta^{-1}abcba \cdot a = \Delta^{-1}cabcb \cdot ba \cdot a$

Théorème (Garside ('67))

Soit $b \in \mathbb{B}$, b peut s'écrire de manière unique sous la forme :

$$b = \Delta^k \cdot u_1 \cdot \dots \cdot u_n$$

où $k \in \mathbb{Z}$, $\forall i \in \{1, \dots, n\}$, $u_i \in \mathcal{G} \setminus \{\Delta\}$
 et $\forall i \in \{1, \dots, n-1\}$, $\text{Left}(u_{i+1}) \subset \text{Right}(u_i)$.

On appelle cette écriture la forme normale de Garside (FNG) de b .

Dans $\mathbb{B}_3$, $ab^{-1}a = a \cdot \Delta^{-1}ba \cdot a = \Delta^{-1} \cdot b \cdot ba \cdot a$

Dans B_4 , $ab^{-1}a = a \cdot \Delta^{-1}abcba \cdot a = \Delta^{-1}cabcb \cdot ba \cdot a$

Théorème (Garside ('67))

Soit $b \in \mathbb{B}$, b peut s'écrire de manière unique sous la forme :

$$b = \Delta^k \cdot u_1 \cdot \dots \cdot u_n$$

où $k \in \mathbb{Z}$, $\forall i \in \{1, \dots, n\}$, $u_i \in \mathcal{G} \setminus \{\Delta\}$
 et $\forall i \in \{1, \dots, n-1\}$, $\text{Left}(u_{i+1}) \subset \text{Right}(u_i)$.

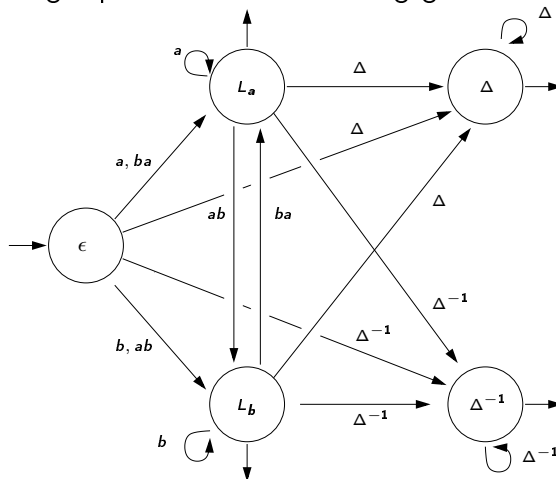
On appelle cette écriture la forme normale de Garside (FNG) de b .

Dans $\mathbb{B}_3$, $ab^{-1}a = a \cdot \Delta^{-1}ba \cdot a = \Delta^{-1} \cdot b \cdot ba \cdot a$

Dans B_4 , $ab^{-1}a = a \cdot \Delta^{-1}abcba \cdot a = \Delta^{-1}cabc \cdot ba \cdot a$

Quelques automates...

Le groupe des tresses est un langage rationnel de $\mathcal{G}^*$



Marcher aléatoirement sur les tresses

Soit ν une mesure de probabilité sur $\mathcal{S} = \{a, b, a^{-1}, b^{-1}\}$ telle que $\nu(s) > 0, \forall s \in \mathcal{S}$

Soit $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires i.i.d de loi ν .

Alors $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$, où X_n est la tresse dont une représentation est $x_0 \dots x_n$, est une réalisation de la marche aléatoire sur $\mathbb{B}_3$

Definition

Soit $\gamma = \lim \frac{|X_n|}{n}$, on appelle γ la **dérive** de la marche aléatoire.

Stabilisation de la FNG

On étudie la suite des formes normales de Garside de X_n

$$\text{Soit } Y_n = u_0 \cdot u_1 \dots u_{p_n} \cdot \Delta^{k_n}$$

On peut définir $\lim Y_n = Y_\infty$, au sens où la longueur du préfixe commun à Y_n et à Y_∞ tend vers l'infini. Il y a **stabilisation de la FNG**.

Retour à Artin

A partir de la FNG, on peut trouver un représentant minimal de la tresse et revenir aux générateurs d'Artin.

Description de l'algorithme glouton :

Retour à Artin

A partir de la FNG, on peut trouver un représentant minimal de la tresse et revenir aux générateurs d'Artin.

Description de l'algorithme glouton :

Retour à Artin

A partir de la FNG, on peut trouver un représentant minimal de la tresse et revenir aux générateurs d'Artin.

Description de l'algorithme glouton :

$$a \cdot ab \cdot ba \cdot a \cdot \Delta^{-1} =$$

Retour à Artin

A partir de la FNG, on peut trouver un représentant minimal de la tresse et revenir aux générateurs d'Artin.

Description de l'algorithme glouton :

$$a \cdot ab \cdot ba \cdot a \cdot \Delta^{-1} = a \cdot ab \cdot \textcolor{red}{ba} \cdot a \cdot \Delta^{-1}$$

Retour à Artin

A partir de la FNG, on peut trouver un représentant minimal de la tresse et revenir aux générateurs d'Artin.

Description de l'algorithme glouton :

$$a \cdot ab \cdot ba \cdot a \cdot \Delta^{-1} = a \cdot ab \cdot \textcolor{red}{ba} \cdot \Delta^{-1} \cdot b$$

Retour à Artin

A partir de la FNG, on peut trouver un représentant minimal de la tresse et revenir aux générateurs d'Artin.

Description de l'algorithme glouton :

$$a \cdot ab \cdot ba \cdot a \cdot \Delta^{-1} = a \cdot ab \cdot a^{-1} \cdot b$$

Retour à Artin

A partir de la FNG, on peut trouver un représentant minimal de la tresse et revenir aux générateurs d'Artin.

Description de l'algorithme glouton :

$$\begin{aligned} a \cdot ab \cdot ba \cdot a \cdot \Delta^{-1} &= a \cdot ab \cdot a^{-1} \cdot b \\ a \cdot ab \cdot ba \cdot a \cdot \Delta^{-3} &= \end{aligned}$$

Retour à Artin

A partir de la FNG, on peut trouver un représentant minimal de la tresse et revenir aux générateurs d'Artin.

Description de l'algorithme glouton :

$$a \cdot ab \cdot ba \cdot a \cdot \Delta^{-1} = a \cdot ab \cdot a^{-1} \cdot b$$

$$a \cdot ab \cdot ba \cdot a \cdot \Delta^{-3} = a \cdot ab \cdot a^{-1} \cdot b \cdot \Delta^{-2}$$

Retour à Artin

A partir de la FNG, on peut trouver un représentant minimal de la tresse et revenir aux générateurs d'Artin.

Description de l'algorithme glouton :

$$a \cdot ab \cdot ba \cdot a \cdot \Delta^{-1} = a \cdot ab \cdot a^{-1} \cdot b$$

$$a \cdot ab \cdot ba \cdot a \cdot \Delta^{-3} = a \cdot ab \cdot a^{-1} \cdot b \cdot \Delta^{-2}$$

Retour à Artin

A partir de la FNG, on peut trouver un représentant minimal de la tresse et revenir aux générateurs d'Artin.

Description de l'algorithme glouton :

$$a \cdot ab \cdot ba \cdot a \cdot \Delta^{-1} = a \cdot ab \cdot a^{-1} \cdot b$$

$$a \cdot ab \cdot ba \cdot a \cdot \Delta^{-3} = a \cdot ab \cdot \Delta^{-1} \cdot b^{-1} \cdot a \cdot \Delta^{-1}$$

Retour à Artin

A partir de la FNG, on peut trouver un représentant minimal de la tresse et revenir aux générateurs d'Artin.

Description de l'algorithme glouton :

$$a \cdot ab \cdot ba \cdot a \cdot \Delta^{-1} = a \cdot ab \cdot \textcolor{red}{a}^{-1} \cdot b$$

$$a \cdot ab \cdot ba \cdot a \cdot \Delta^{-3} = a \cdot b^{-1} \cdot b^{-1} \cdot \textcolor{red}{a} \cdot \Delta^{-1}$$

Retour à Artin

A partir de la FNG, on peut trouver un représentant minimal de la tresse et revenir aux générateurs d'Artin.

Description de l'algorithme glouton :

$$\begin{aligned} a \cdot ab \cdot ba \cdot a \cdot \Delta^{-1} &= a \cdot ab \cdot a^{-1} \cdot b \\ a \cdot ab \cdot ba \cdot a \cdot \Delta^{-3} &= a \cdot b^{-1} \cdot b^{-1} \cdot b^{-1} a^{-1} \end{aligned}$$

Mesure harmonique Markovienne Multiplicative et calcul de la dérive

Definition

On note ν_∞ la loi de probabilité de Y_∞ . C'est la **mesure harmonique** de la marche aléatoire.

La mesure harmonique est **Markovienne multiplicative** :

- ▶ Sa structure est très bien comprise
- ▶ Cela permet des calculs explicites.

Mesure harmonique Markovienne Multiplicative et calcul de la dérive

Definition

On note ν_∞ la loi de probabilité de Y_∞ . C'est la **mesure harmonique** de la marche aléatoire.

La mesure harmonique est **Markovienne multiplicative** :

- ▶ Sa structure est très bien comprise
- ▶ Cela permet des calculs explicites.

Mesure harmonique Markovienne Multiplicative et calcul de la dérive

Definition

On note ν_∞ la loi de probabilité de Y_∞ . C'est la **mesure harmonique** de la marche aléatoire.

La mesure harmonique est **Markovienne multiplicative** :

- ▶ Sa structure est très bien comprise
- ▶ Cela permet des calculs explicites.

Mesure harmonique Markovienne Multiplicative et calcul de la dérive

Definition

On note ν_∞ la loi de probabilité de Y_∞ . C'est la **mesure harmonique** de la marche aléatoire.

La mesure harmonique est **Markovienne multiplicative** :

- ▶ Sa structure est très bien comprise
- ▶ Cela permet des calculs explicites.

La Raie Manta

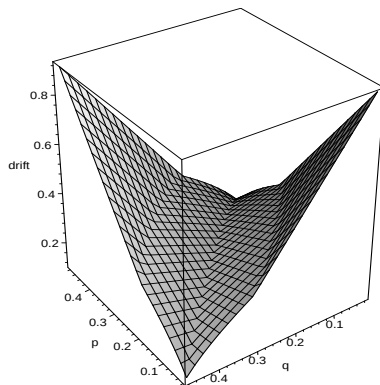


Fig.: La valeur de la dérive en fonction de $p = \nu(a) = \frac{1}{2} - \nu(b^{-1})$,
 $q = \nu(b) = \frac{1}{2} - \nu(a^{-1})$

Trois brins vs quatre brins et plus

Stabilisation de la FNG : devrait pouvoir s'écrire.

Passage de Garside à Artin : pas de moyens connus simples.

L'algo glouton ne marche plus sur $\mathbb{B}_4$:

$$ab^{-1} = a \cdot cbabc \Delta^{-1} = acba \cdot bc \cdot \Delta^{-1} = b^{-1} a^{-1} bc$$

Trois brins vs quatre brins et plus

Stabilisation de la FNG : devrait pouvoir s'écrire.

Passage de Garside à Artin : pas de moyens connus simples.

L'algo glouton ne marche plus sur $\mathbb{B}_4$:

$$ab^{-1} = a \cdot cbabc \Delta^{-1} = acba \cdot bc \cdot \Delta^{-1} = b^{-1} a^{-1} bc$$

Trois brins vs quatre brins et plus

Stabilisation de la FNG : devrait pouvoir s'écrire.

Passage de Garside à Artin : pas de moyens connus simples.

L'algo glouton ne marche plus sur $\mathbb{B}_4$:

$$ab^{-1} = a \cdot cbabc \Delta^{-1} = acba \cdot bc \cdot \Delta^{-1} = b^{-1} a^{-1} bc$$

Problème du mot

Une première réponse est donnée par la forme normale de Garside.
Mais pas très efficace algorithmiquement.

Algorithme des "poignées" de Dehornoy.

Intéressant problème de complexité, vu que la borne exponentielle prouvée est très loin de la borne quadratique qu'on obtient expérimentalement.

Problème du mot

Une première réponse est donnée par la forme normale de Garside.
Mais pas très efficace algorithmiquement.

Algorithme des "poignées" de Dehornoy.

Intéressant problème de complexité, vu que la borne exponentielle prouvée est très loin de la borne quadratique qu'on obtient expérimentalement.

Série de croissance du monoïde

Definition

La série de croissance du monoïde est définie par :

$$F(t) = \sum_{b \in \mathbb{B}^+} t^{|b|_\Sigma} = \sum \#\{\text{tresses de longueur } n\} t^n$$

Soit $J \subset \Sigma$, on note $\bigvee(J)$ le p.p.c.m à gauche des éléments de J .
On note $\tau(J)$ la longueur de $\bigvee(J)$

Théorème

On obtient la formule suivante :

$$\left(\sum_{J \subset \Sigma} (-1)^{|J|} V(J) \right) \cdot \left(\sum_{b \in \mathbb{B}^+} b \right) = 1 \quad (1)$$

La série de croissance est alors :

$$F(t) = \left[\sum_{J \subset \Sigma} (-1)^{|J|} t^{\tau(J)} \right]^{-1} \quad (2)$$

La tête des p.p.c.m

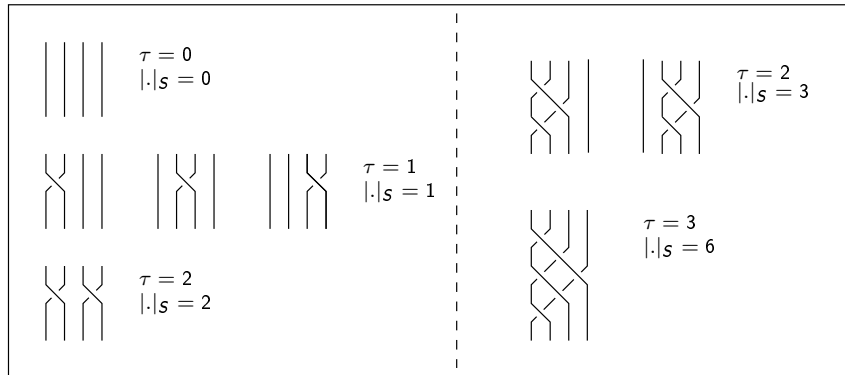
- ▶ Les éléments commutent. Par exemple : $\bigvee(\{a, c\}) = ac = ca$.
- ▶ Les éléments peuvent être dans une relation de tresses.
Par exemple : $\bigvee(\{a, b\}) = aba = bab$.
- ▶ On a un petit mix des deux.
Par exemple : $\bigvee(\{a, b, d\}) = aba \cdot d$.

La tête des p.p.c.m

- ▶ Les éléments commutent. Par exemple : $\bigvee(\{a, c\}) = ac = ca$.
- ▶ Les éléments peuvent être dans une relation de tresses.
Par exemple : $\bigvee(\{a, b\}) = aba = bab$.
- ▶ On a un petit mix des deux.
Par exemple : $\bigvee(\{a, b, d\}) = aba \cdot d$.

La tête des p.p.c.m

- ▶ Les éléments commutent. Par exemple : $\vee(\{a, c\}) = ac = ca$.
- ▶ Les éléments peuvent être dans une relation de tresses.
Par exemple : $\vee(\{a, b\}) = aba = bab$.
- ▶ On a un petit mix des deux.
Par exemple : $\vee(\{a, b, d\}) = aba \cdot d$.

Dans $\mathbb{B}_4$ 

Ebauche de preuve

On veut mettre en correspondance des couples (p.p.c.m, tresse).

On veut construire une involution Ψ :

$$\begin{aligned}\Psi : \mathcal{M} \times \mathbb{B}^+ &\rightarrow \mathcal{M} \times \mathbb{B}^+ \\ (m, b) &\mapsto (m', b') \\ \text{avec } mb &= m'b' \\ \text{et } \tau(m) &= \tau(m') \pm 1\end{aligned}$$

On veut également que Ψ n'ait pas de point fixe autre que $(1, 1)$.
Cela donnera une façon naturelle de regrouper deux à deux les éléments de $\mathcal{M} \times \mathbb{B}^+$.

Ebauche de preuve

On veut mettre en correspondance des couples (p.p.c.m, tresse).

On veut construire une involution Ψ :

$$\begin{aligned}\Psi : \mathcal{M} \times \mathbb{B}^+ &\rightarrow \mathcal{M} \times \mathbb{B}^+ \\ (m, b) &\mapsto (m', b') \\ \text{avec } mb &= m'b' \\ \text{et } \tau(m) &= \tau(m') \pm 1\end{aligned}$$

On veut également que Ψ n'ait pas de point fixe autre que $(1, 1)$.
Cela donnera une façon naturelle de regrouper deux à deux les éléments de $\mathcal{M} \times \mathbb{B}^+$.

Ebauche de preuve

On veut mettre en correspondance des couples (p.p.c.m, tresse).

On veut construire une involution Ψ :

$$\begin{aligned}\Psi : \mathcal{M} \times \mathbb{B}^+ &\rightarrow \mathcal{M} \times \mathbb{B}^+ \\ (m, b) &\mapsto (m', b') \\ \text{avec } mb &= m'b' \\ \text{et } \tau(m) &= \tau(m') \pm 1\end{aligned}$$

On veut également que Ψ n'ait pas de point fixe autre que $(1, 1)$.
Cela donnera une façon naturelle de regrouper deux à deux les éléments de $\mathcal{M} \times \mathbb{B}^+$.

Ebauche de preuve (suite)

Si on arrive à construire un tel Ψ :

$$\begin{aligned}
 & \left(\sum_{J \subset \Sigma} (-1)^{|J|} V(J) \right) \cdot \left(\sum_{b \in \mathbb{B}^+} b \right) \\
 = & \sum_{(m,b)} (-1)^{\tau(m)} mb \\
 = & 1
 \end{aligned}$$

En projetant ensuite en t , on obtiendra la série de croissance.

Ebauche de preuve (suite)

Si on arrive à construire un tel Ψ :

$$\begin{aligned}
 & \left(\sum_{J \subset \Sigma} (-1)^{|J|} V(J) \right) \cdot \left(\sum_{b \in \mathbb{B}^+} b \right) \\
 = & \sum_{(m,b)} (-1)^{\tau(m)} mb \\
 = & 1
 \end{aligned}$$

En projetant ensuite en t , on obtiendra la série de croissance.

Ebauche de preuve (suite)

Si on arrive à construire un tel Ψ :

$$\begin{aligned}
 & \left(\sum_{J \subset \Sigma} (-1)^{|J|} V(J) \right) \cdot \left(\sum_{b \in \mathbb{B}^+} b \right) \\
 = & \sum_{(m,b)} (-1)^{\tau(m)} mb \\
 = & 1
 \end{aligned}$$

En projetant ensuite en t , on obtiendra la série de croissance.

Ebauche de preuve (suite)

Si on arrive à construire un tel Ψ :

$$\begin{aligned}
 & \left(\sum_{J \subset \Sigma} (-1)^{|J|} V(J) \right) \cdot \left(\sum_{b \in \mathbb{B}^+} b \right) \\
 = & \sum_{(m,b)} (-1)^{\tau(m)} mb \\
 = & 1
 \end{aligned}$$

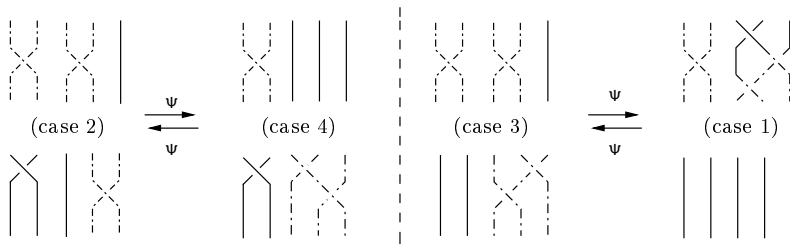
En projetant ensuite en t , on obtiendra la série de croissance.

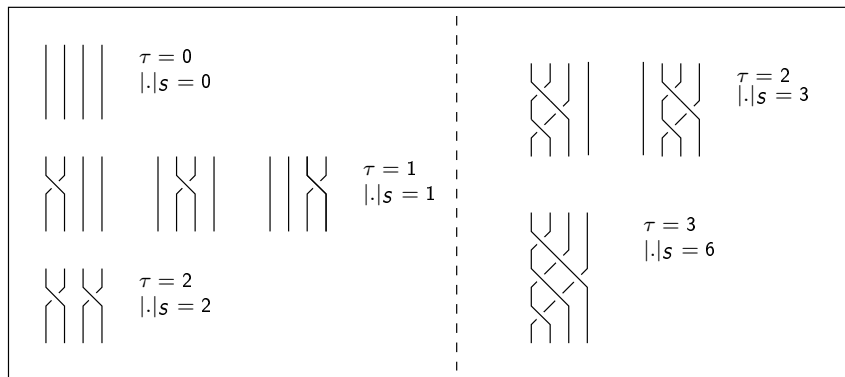
Ebauche de preuve (suite)

Si on arrive à construire un tel Ψ :

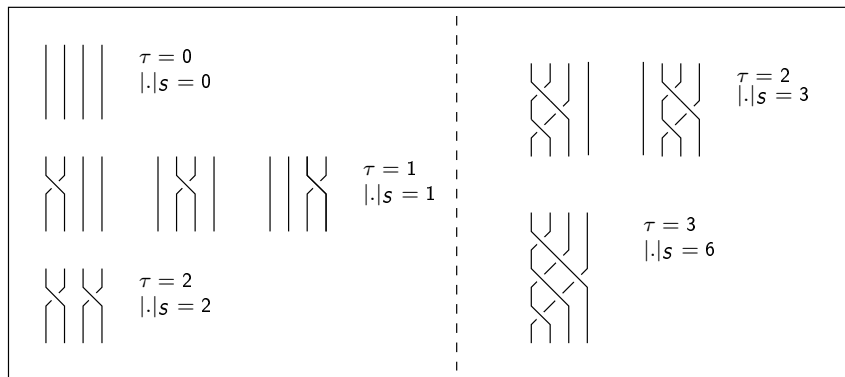
$$\begin{aligned}
 & \left(\sum_{J \subset \Sigma} (-1)^{|J|} V(J) \right) \cdot \left(\sum_{b \in \mathbb{B}^+} b \right) \\
 = & \sum_{(m,b)} (-1)^{\tau(m)} mb \\
 = & 1
 \end{aligned}$$

En projetant ensuite en t , on obtiendra la série de croissance.

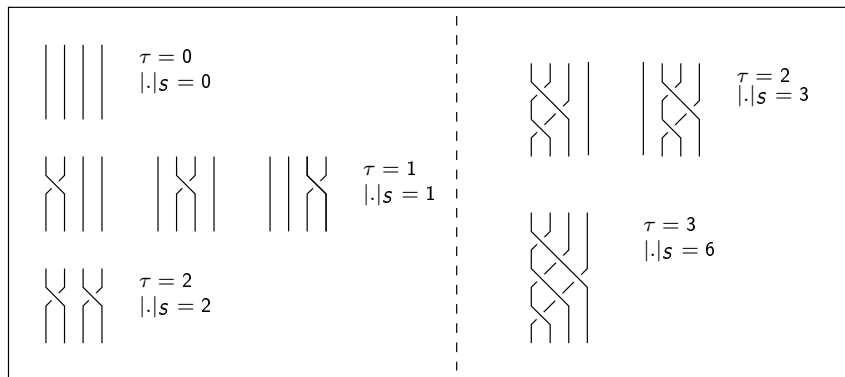
Description de Ψ 

Dans $\mathbb{B}_4$ 

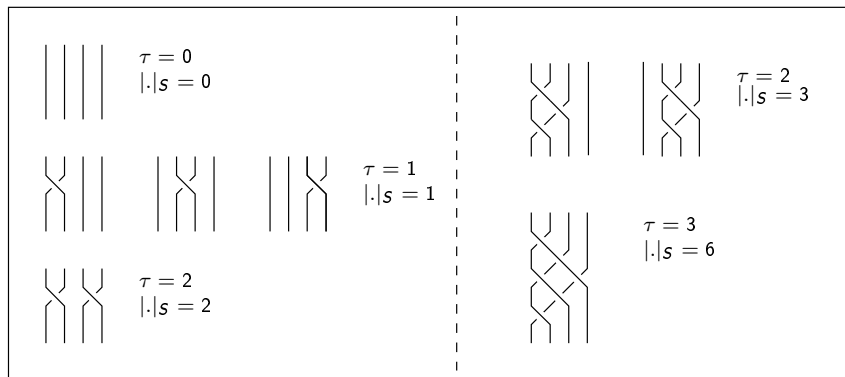
$$F_4(t) = \frac{1}{1 - 3t + t^2 + 2t^3 - t^6}$$

Dans $\mathbb{B}_4$ 

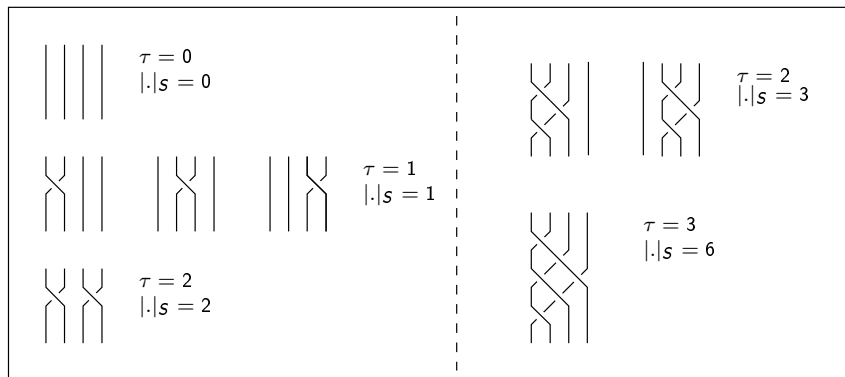
$$F_4(t) = \frac{1}{1 - 3t + t^2 + 2t^3 - t^6}$$

Dans $\mathbb{B}_4$ 

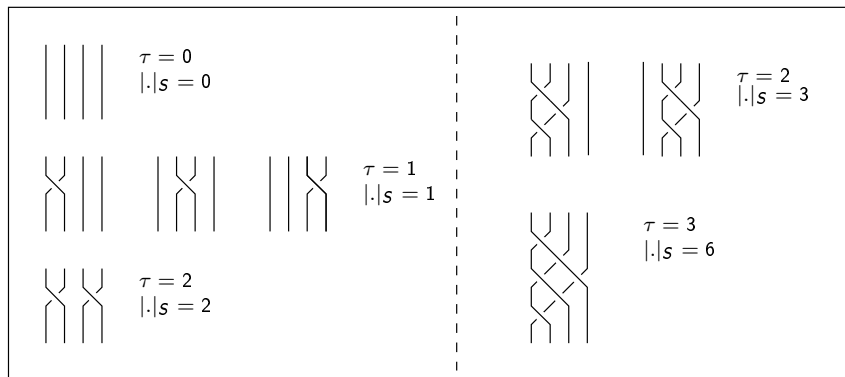
$$F_4(t) = \frac{1}{1 - 3t + t^2 + 2t^3 - t^6}$$

Dans $\mathbb{B}_4$ 

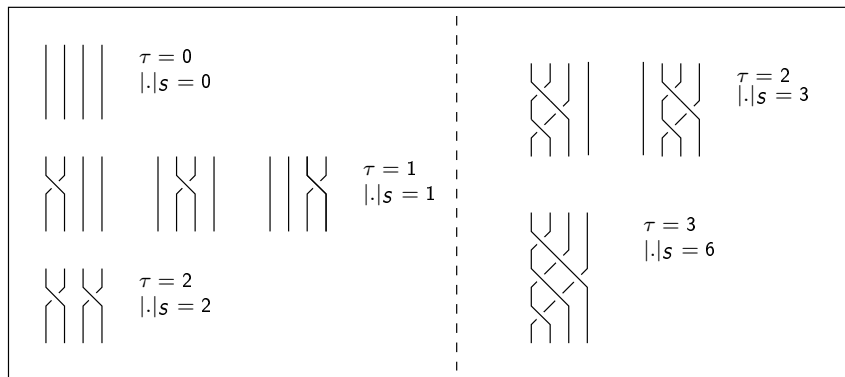
$$F_4(t) = \frac{1}{1 - 3t + t^2 + 2t^3 - t^6}$$

Dans $\mathbb{B}_4$ 

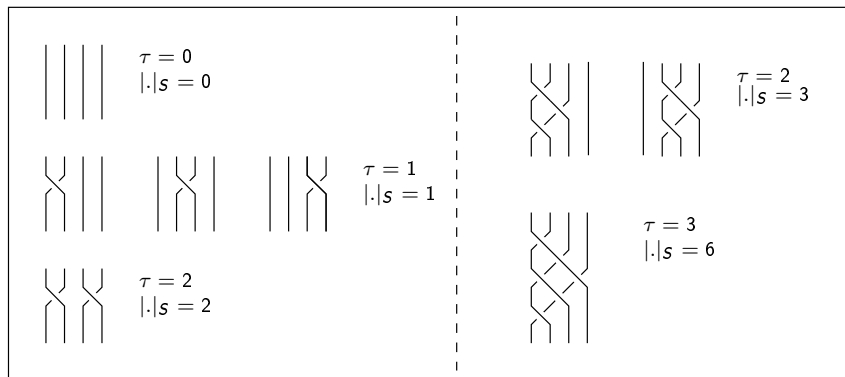
$$F_4(t) = \frac{1}{1 - \textcolor{red}{3}t + t^2 + 2t^3 - t^6}$$

Dans $\mathbb{B}_4$ 

$$F_4(t) = \frac{1}{1 - 3t + t^2 + 2t^3 - t^6}$$

Dans $\mathbb{B}_4$ 

$$F_4(t) = \frac{1}{1 - 3t + t^2 + 2t^3 - t^6}$$

Dans $\mathbb{B}_4$ 

$$F_4(t) = \frac{1}{1 - 3t + t^2 + 2t^3 - t^6}$$

Complexité du problème de représentant minimal

Théorème (Paterson et Razborov ('91))

Déterminer si un mot de Σ^ est un représentant minimal d'une tresse est un problème NP-complet, lorsque le nombre de brins n n'est pas borné.*

Questions:

- ▶ A nombre (≥ 4) de brins fixé, le problème reste-t-il NP-complet ?
- ▶ Y a-t-il un algorithme efficace minimisant (ou presque) ?

Complexité du problème de représentant minimal

Théorème (Paterson et Razborov ('91))

Déterminer si un mot de Σ^ est un représentant minimal d'une tresse est un problème NP-complet, lorsque le nombre de brins n n'est pas borné.*

Questions:

- ▶ A nombre (≥ 4) de brins fixé, le problème reste-t-il NP-complet ?
- ▶ Y a-t-il un algorithme efficace minimisant (ou presque) ?

Complexité du problème de représentant minimal

Théorème (Paterson et Razborov ('91))

Déterminer si un mot de Σ^ est un représentant minimal d'une tresse est un problème NP-complet, lorsque le nombre de brins n n'est pas borné.*

Questions:

- ▶ A nombre (≥ 4) de brins fixé, le problème reste-t-il NP-complet ?
- ▶ Y a-t-il un algorithme efficace minimisant (ou presque) ?

Complexité du problème de représentant minimal

Théorème (Paterson et Razborov ('91))

Déterminer si un mot de Σ^ est un représentant minimal d'une tresse est un problème NP-complet, lorsque le nombre de brins n n'est pas borné.*

Questions:

- ▶ A nombre (≥ 4) de brins fixé, le problème reste-t-il NP-complet ?
- ▶ Y a-t-il un algorithme efficace minimisant (ou presque) ?

A la recherche d'algorithmes

La FNG permet un algorithme de minimisation ; pour savoir si un mot de longueur n est minimal, il suffit de tester sur tous les mots de longueur inférieure à n s'il en existe un qui représente la même tresse.

L'heuristique gloutonne ne marche pas et n'est pas du tout efficace :

$$1 \rightarrow 100\% \quad 4 \rightarrow 69\% \quad 7 \rightarrow 54\%$$

$$2 \rightarrow 87\% \quad 5 \rightarrow 63\% \quad 8 \rightarrow 50\%$$

$$3 \rightarrow 77\% \quad 6 \rightarrow 58\% \quad 9 \rightarrow 46\%$$

Quelques idées

Les approches fondées sur la forme normale de Garside n'aboutissent pas.

=

=

=

Malheureusement :

$$bca^{-1}b =$$

$$= cbac \cdot acba \cdot \Delta^{-1}$$

=

Quelques idées

Les approches fondées sur la forme normale de Garside n'aboutissent pas.

$$acba \cdot bac \cdot \Delta^{-1} =$$

$$=$$

$$=$$

Malheureusement :

$$bca^{-1}b =$$

$$= cbac \cdot acba \cdot \Delta^{-1}$$

$$=$$

Quelques idées

Les approches fondées sur la forme normale de Garside n'aboutissent pas.

$$acba \cdot bac \cdot \Delta^{-1} = \textcolor{red}{acba} \cdot \Delta^{-1} \cdot bca$$

$$=$$

$$=$$

Malheureusement :

$$bca^{-1}b =$$

$$= cbac \cdot acba \cdot \Delta^{-1}$$

$$=$$

Quelques idées

Les approches fondées sur la forme normale de Garside n'aboutissent pas.

$$acba \cdot bac \cdot \Delta^{-1} = b^{-1} a^{-1} \cdot bca$$

$$=$$

$$=$$

Malheureusement :

$$bca^{-1}b =$$

$$= cbac \cdot acba \cdot \Delta^{-1}$$

$$=$$

Quelques idées

Les approches fondées sur la forme normale de Garside n'aboutissent pas.

$$\begin{aligned} acba \cdot bac \cdot \Delta^{-1} &= b^{-1} a^{-1} \cdot bca \\ acb \cdot babc \cdot \Delta^{-1} &= \\ &= \end{aligned}$$

Malheureusement :

$$\begin{aligned} bca^{-1}b &= \\ &= cbac \cdot acba \cdot \Delta^{-1} \\ &= \end{aligned}$$

Quelques idées

Les approches fondées sur la forme normale de Garside n'aboutissent pas.

$$\begin{aligned} acba \cdot bac \cdot \Delta^{-1} &= b^{-1} a^{-1} \cdot bca \\ acb \cdot babc \cdot \Delta^{-1} &= acb \cdot abac \cdot \Delta^{-1} \\ &= \end{aligned}$$

Malheureusement :

$$\begin{aligned} bca^{-1}b &= \\ &= cbac \cdot acba \cdot \Delta^{-1} \\ &= \end{aligned}$$

Quelques idées

Les approches fondées sur la forme normale de Garside n'aboutissent pas.

$$\begin{aligned}
 acba \cdot bac \cdot \Delta^{-1} &= b^{-1} a^{-1} \cdot bca \\
 acb \cdot babc \cdot \Delta^{-1} &= acb \cdot abac \cdot \Delta^{-1} \\
 acbabac \cdot \Delta^{-1} &=
 \end{aligned}$$

Malheureusement :

$$\begin{aligned}
 bca^{-1}b &= \\
 &= cbac \cdot acba \cdot \Delta^{-1} \\
 &=
 \end{aligned}$$

Quelques idées

Les approches fondées sur la forme normale de Garside n'aboutissent pas.

$$\begin{aligned}
 acba \cdot bac \cdot \Delta^{-1} &= b^{-1} a^{-1} \cdot bca \\
 acb \cdot babc \cdot \Delta^{-1} &= acb \cdot abac \cdot \Delta^{-1} \\
 acbabac \cdot \Delta^{-1} &= a cba bac \Delta^{-1}
 \end{aligned}$$

Malheureusement :

$$\begin{aligned}
 bca^{-1}b &= \\
 &= cbac \cdot acba \cdot \Delta^{-1} \\
 &=
 \end{aligned}$$

Quelques idées

Les approches fondées sur la forme normale de Garside n'aboutissent pas.

$$\begin{aligned}
 acba \cdot bac \cdot \Delta^{-1} &= b^{-1} a^{-1} \cdot bca \\
 acb \cdot babc \cdot \Delta^{-1} &= acb \cdot abac \cdot \Delta^{-1} \\
 acbabac \cdot \Delta^{-1} &= a cba \Delta^{-1} bca
 \end{aligned}$$

Malheureusement :

$$\begin{aligned}
 bca^{-1}b &= \\
 &= cbac \cdot acba \cdot \Delta^{-1} \\
 &=
 \end{aligned}$$

Quelques idées

Les approches fondées sur la forme normale de Garside n'aboutissent pas.

$$\begin{aligned}
 acba \cdot bac \cdot \Delta^{-1} &= b^{-1} a^{-1} \cdot bca \\
 acb \cdot babc \cdot \Delta^{-1} &= acb \cdot abac \cdot \Delta^{-1} \\
 acbabac \cdot \Delta^{-1} &= ab^{-1} c^{-1} b^{-1} \cdot bca
 \end{aligned}$$

Malheureusement :

$$\begin{aligned}
 bca^{-1}b &= \\
 &= cbac \cdot acba \cdot \Delta^{-1} \\
 &=
 \end{aligned}$$

Quelques idées

Les approches fondées sur la forme normale de Garside n'aboutissent pas.

$$\begin{aligned}
 acba \cdot bac \cdot \Delta^{-1} &= b^{-1} a^{-1} \cdot bca \\
 acb \cdot babc \cdot \Delta^{-1} &= acb \cdot abac \cdot \Delta^{-1} \\
 acbabac \cdot \Delta^{-1} &= ab^{-1} a
 \end{aligned}$$

Malheureusement :

$$\begin{aligned}
 bca^{-1} b &= \\
 &= cbac \cdot acba \cdot \Delta^{-1} \\
 &=
 \end{aligned}$$

Quelques idées

Les approches fondées sur la forme normale de Garside n'aboutissent pas.

$$\begin{aligned}
 acba \cdot bac \cdot \Delta^{-1} &= b^{-1} a^{-1} \cdot bca \\
 acb \cdot babc \cdot \Delta^{-1} &= acb \cdot abac \cdot \Delta^{-1} \\
 acbabac \cdot \Delta^{-1} &= ab^{-1} a
 \end{aligned}$$

Malheureusement :

$$\begin{aligned}
 bca^{-1}b &= \\
 &= cbac \cdot acba \cdot \Delta^{-1} \\
 &=
 \end{aligned}$$

Quelques idées

Les approches fondées sur la forme normale de Garside n'aboutissent pas.

$$\begin{aligned}
 acba \cdot bac \cdot \Delta^{-1} &= b^{-1} a^{-1} \cdot bca \\
 acb \cdot babc \cdot \Delta^{-1} &= acb \cdot abac \cdot \Delta^{-1} \\
 acbabac \cdot \Delta^{-1} &= ab^{-1} a
 \end{aligned}$$

Malheureusement :

$$\begin{aligned}
 bca^{-1}b &= \\
 &= cbac \cdot acba \cdot \Delta^{-1} \\
 &=
 \end{aligned}$$

Quelques idées

Les approches fondées sur la forme normale de Garside n'aboutissent pas.

$$\begin{aligned}
 acba \cdot bac \cdot \Delta^{-1} &= b^{-1} a^{-1} \cdot bca \\
 acb \cdot babc \cdot \Delta^{-1} &= acb \cdot abac \cdot \Delta^{-1} \\
 acbabac \cdot \Delta^{-1} &= ab^{-1} a
 \end{aligned}$$

Malheureusement :

$$\begin{aligned}
 bca^{-1}b &= bc \cdot bcaba\Delta^{-1}b \\
 &= cbac \cdot acba \cdot \Delta^{-1} \\
 &=
 \end{aligned}$$

Quelques idées

Les approches fondées sur la forme normale de Garside n'aboutissent pas.

$$\begin{aligned}
 acba \cdot bac \cdot \Delta^{-1} &= b^{-1} a^{-1} \cdot bca \\
 acb \cdot babc \cdot \Delta^{-1} &= acb \cdot abac \cdot \Delta^{-1} \\
 acbabac \cdot \Delta^{-1} &= ab^{-1} a
 \end{aligned}$$

Malheureusement :

$$\begin{aligned}
 bca^{-1}b &= bcba \cdot cbab \cdot \Delta^{-1} \\
 &= cbac \cdot acba \cdot \Delta^{-1} \\
 &=
 \end{aligned}$$

Quelques idées

Les approches fondées sur la forme normale de Garside n'aboutissent pas.

$$\begin{aligned}
 acba \cdot bac \cdot \Delta^{-1} &= b^{-1} a^{-1} \cdot bca \\
 acb \cdot babc \cdot \Delta^{-1} &= acb \cdot abac \cdot \Delta^{-1} \\
 acbabac \cdot \Delta^{-1} &= ab^{-1} a
 \end{aligned}$$

Malheureusement :

$$\begin{aligned}
 bca^{-1}b &= bcba \cdot cbab \cdot \Delta^{-1} \\
 &= cbac \cdot acba \cdot \Delta^{-1} \\
 &=
 \end{aligned}$$

Quelques idées

Les approches fondées sur la forme normale de Garside n'aboutissent pas.

$$\begin{aligned}
 acba \cdot bac \cdot \Delta^{-1} &= b^{-1} a^{-1} \cdot bca \\
 acb \cdot babc \cdot \Delta^{-1} &= acb \cdot abac \cdot \Delta^{-1} \\
 acbabac \cdot \Delta^{-1} &= ab^{-1} a
 \end{aligned}$$

Malheureusement :

$$\begin{aligned}
 bca^{-1}b &= bcba \cdot cbab \cdot \Delta^{-1} \\
 &= cbac \cdot acba \cdot \Delta^{-1} \\
 &= cbac \cdot acba \cdot \Delta^{-1}
 \end{aligned}$$

Quelques idées

Les approches fondées sur la forme normale de Garside n'aboutissent pas.

$$\begin{aligned} acba \cdot bac \cdot \Delta^{-1} &= b^{-1} a^{-1} \cdot bca \\ acb \cdot babc \cdot \Delta^{-1} &= acb \cdot abac \cdot \Delta^{-1} \\ acbabac \cdot \Delta^{-1} &= ab^{-1} a \end{aligned}$$

Malheureusement :

$$\begin{aligned} bca^{-1}b &= bcba \cdot cbab \cdot \Delta^{-1} \\ &= cbac \cdot acba \cdot \Delta^{-1} \\ &= cbacac^{-1}b^{-1}c^{-1} \end{aligned}$$

Quelques idées

Les approches fondées sur la forme normale de Garside n'aboutissent pas.

$$\begin{aligned} acba \cdot bac \cdot \Delta^{-1} &= b^{-1} a^{-1} \cdot bca \\ acb \cdot babc \cdot \Delta^{-1} &= acb \cdot abac \cdot \Delta^{-1} \\ acbabac \cdot \Delta^{-1} &= ab^{-1} a \end{aligned}$$

Malheureusement :

$$\begin{aligned} bca^{-1}b &= bcba \cdot cbab \cdot \Delta^{-1} \\ &= cbac \cdot acba \cdot \Delta^{-1} \\ &= cbaab^{-1}c^{-1} \end{aligned}$$

Série de croissance du groupe

1, 6, 26, 98, 338, 1 110, 3 542, 11 098, 34 362, 105 546, 322 400,
980 904, 2 975 728, ... ?

Questions:

- ▶ Y a-t-il une façon plus économique de calculer les premiers termes de la série de croissance ?
- ▶ Est-ce que la série de croissance est rationnelle ?
- ▶ Si oui, y a-t-il une interprétation possible des coefficients ?

Série de croissance du groupe

1, 6, 26, 98, 338, 1 110, 3 542, 11 098, 34 362, 105 546, 322 400,
980 904, 2 975 728, ... ?

Questions:

- ▶ Y a-t-il une façon plus économique de calculer les premiers termes de la série de croissance ?
- ▶ Est-ce que la série de croissance est rationnelle ?
- ▶ Si oui, y a-t-il une interprétation possible des coefficients ?

Série de croissance du groupe

1, 6, 26, 98, 338, 1 110, 3 542, 11 098, 34 362, 105 546, 322 400,
980 904, 2 975 728, ... ?

Questions:

- ▶ Y a-t-il une façon plus économique de calculer les premiers termes de la série de croissance ?
- ▶ Est-ce que la série de croissance est rationnelle ?
- ▶ Si oui, y a-t-il une interprétation possible des coefficients ?

Série de croissance du groupe

1, 6, 26, 98, 338, 1 110, 3 542, 11 098, 34 362, 105 546, 322 400,
980 904, 2 975 728, ... ?

Questions:

- ▶ Y a-t-il une façon plus économique de calculer les premiers termes de la série de croissance ?
- ▶ Est-ce que la série de croissance est rationnelle ?
- ▶ Si oui, y a-t-il une interprétation possible des coefficients ?

Série de croissance du groupe

1, 6, 26, 98, 338, 1 110, 3 542, 11 098, 34 362, 105 546, 322 400,
980 904, 2 975 728, ... ?

Questions:

- ▶ Y a-t-il une façon plus économique de calculer les premiers termes de la série de croissance ?
- ▶ Est-ce que la série de croissance est rationnelle ?
- ▶ Si oui, y a-t-il une interprétation possible des coefficients ?

Merci !



Marie Albenque.

Enumerative combinatorics of positive braids.

Preprint, 2007.



Aaron Bronfman.

Growth functions of a class of monoids.

Preprint, 2001.



Ruth Charney.

Geodesic automation and growth functions for Artin groups of finite type.

Math. Ann., 301(2) :307–324, 1995.



Patrick Dehornoy.

A fast method for comparing braids.

Adv. Math., 125(2) :200–235, 1997.



Mairesse Jean and Mathéus Frédéric.

Randomly growing braid on three strands and the manta ray.

Ann. Appl. Probab., 2006.



Jean Michel.

A note on words in braid monoids.

J. Algebra, 215(1) :366–377, 1999.



Gérard Xavier Viennot.

Heaps of pieces. I. Basic definitions and combinatorial lemmas.

In *Combinatoire énumérative (Montreal, Que., 1985/Quebec, Que., 1985)*, volume 1234 of *Lecture Notes in Math.*, pages 321–350. Springer, Berlin, 1986.