Entropie et information

Entropie d'un système composé

Exercices

Théorème de la source binomiale

Codage

Codage de source

Déchiffrabilité

Notion de code préfixe

Théorie de l'Information (2)

Philippe Duchon

ENSEIRB

2008-09

Système composé

Définition

*On appelle **système composé**, soit la donnée de deux (ou plus) variables aléatoires discrètes (X, Y) sur un même espace probabilisé, soit un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ muni de deux (ou plus) partitions :*

$$\Omega = A_1 + \cdots + A_m = B_1 + \cdots + B_n.$$

Comme pour un système simple, les deux définitions sont fonctionnellement équivalentes, dans la mesure où on ne s'intéresse pas aux valeurs des variables aléatoires.
On utilise les notations suivantes, moyennement cohérentes mais consacrées par l'usage :

$$p_i = \mathbb{P}(A_i) \quad q_j = \mathbb{P}(B_j) \quad p_{ij} = \mathbb{P}(A_i \cap B_j).$$

Exemples de systèmes composés

Les systèmes composés prennent leur sens lorsque les variables aléatoires qui les composent ne sont pas indépendantes. Quelques exemples de situations pouvant être modélisées de la sorte :

- deux variables relatives à l'état d'un même système, l'une pouvant être "facile à mesurer" alors que l'autre l'est moint ;
- deux symboles émis consécutivement par une même source ;
- l'une des variables peut représenter le symbole réellement émis par une source, tandis que l'autre représente le symbole reçu après transmission sur un canal bruité.

Entropie totale, information mutuelle, entropie mutuelle

Soit $(X.Y)$ un système composé. On définit les quantités suivantes :

Définition (Entropie totale)

*L'**entropie totale** du système est celle définie par la partition formée de toutes les intersections de parties des deux partitions :*

$$H(X,Y) = \mathbb{E}(I(XY)) = -\sum_{i,j} p_{ij} \log(p_{ij})$$

Ici, XY doit être compris comme désignant la partition de Ω formée de toutes les intersections d'un événement de la première partition avec un événement de la seconde :

$$XY = \{A_i \cap B_j : 1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n\}$$

Entropie totale, information mutuelle, entropie mutuelle

Soit $(X.Y)$ un système composé. On définit les quantités suivantes :

Définition (Information mutuelle)

*L'**information mutuelle** entre deux événements A_i et B_j, la "part commune"*

$$I(A_i, B_j) = I(A_i) + I(B_j) - I(A_i \cap B_j) = \log\left(\frac{p_{ij}}{p_i q_j}\right).$$

*L'**information mutuelle** entre les deux variables X et Y, l'espérance de l'information mutuelle entre événements :*

$$I(X, Y) = \sum_{A \in X} \sum_{B \in Y} \mathbb{P}(A \cap B) I(A, B) = \sum_{i,j} p_{ij} \log\left(\frac{p_{ij}}{p_i q_j}\right).$$

Liens entre les différentes quantités

On a une première relation de décomposition (ce n'est rien d'autre que la *linéarite de l'espérance* appliquée à la définition de l'information mutuelle entre événements) :

Première décomposition de l'information mutuelle

$$H(X,Y) = H(X) + H(Y) - I(X,Y)$$

Signe de l'information mutuelle

Remarque

Il est important de noter que $I(A, B)$ peut être de signe quelconque :

- positif, si A et B "se ressemblent" (cas limite, $A = B$)
- négatif, si A et B sont "presque incompatibles" (cas limite, A et B disjoints, l'information mutuelle vaut $-\infty$)
- nul, si A et B sont indépendants.

En revanche, on verra que $I(X, Y)$ est toujours positif ou nul.

Entropie mutuelle de deux variables aléatoires

Théorème

Soit (X, Y) un système composé.

- $I(X, Y) \geq 0$, avec égalité si et seulement si X et Y sont deux variables aléatoires indépendantes ;
- de manière équivalente, $H(X, Y) \leq H(X) + H(Y)$, avec égalité si et seulement si X et Y sont deux variables aléatoires indépendantes.

Entropie mutuelle de deux variables aléatoires

Théorème

Soit (X, Y) un système composé.

- $I(X, Y) \geq 0$, avec égalité si et seulement si X et Y sont deux variables aléatoires indépendantes ;
- de manière équivalente, $H(X, Y) \leq H(X) + H(Y)$, avec égalité si et seulement si X et Y sont deux variables aléatoires indépendantes.

Si vous n'avez pas eu la preuve du théorème au tableau, la réclamer

Entropie conditionnelle

- On part des probabilités conditionnelles :

$$\mathbb{P}(B_j|A_i) = \frac{\mathbb{P}(A_i \cap B_j)}{\mathbb{P}(A_i)} = \frac{p_{ij}}{p_i}$$

Entropie conditionnelle

- On part des probabilités conditionnelles :

$$\mathbb{P}(B_j|A_i) = \frac{\mathbb{P}(A_i \cap B_j)}{\mathbb{P}(A_i)} = \frac{p_{ij}}{p_i}$$

- On peut réécrire la définition de l'information mutuelle :

$$I(A_i, B_j) = \log\left(\frac{p_{ij}}{p_i q_j}\right) = -\log(q_j) + \log\left(\frac{p_{ij}}{p_i}\right)$$

Entropie conditionnelle

- On part des probabilités conditionnelles :

$$\mathbb{P}(B_j|A_i) = \frac{\mathbb{P}(A_i \cap B_j)}{\mathbb{P}(A_i)} = \frac{p_{ij}}{p_i}$$

- On peut réécrire la définition de l'information mutuelle :

$$I(A_i, B_j) = \log\left(\frac{p_{ij}}{p_i q_j}\right) = -\log(q_j) + \log\left(\frac{p_{ij}}{p_i}\right)$$

- On définit l'information conditionnelle
  $I(B_j|A_i) = -\log(p_{ij}/p_i)$

Entropie conditionnelle

- On part des probabilités conditionnelles :

$$\mathbb{P}(B_j|A_i) = \frac{\mathbb{P}(A_i \cap B_j)}{\mathbb{P}(A_i)} = \frac{p_{ij}}{p_i}$$

- On peut réécrire la définition de l'information mutuelle :

$$I(A_i, B_j) = \log\left(\frac{p_{ij}}{p_i q_j}\right) = -\log(q_j) + \log\left(\frac{p_{ij}}{p_i}\right)$$

- On définit l'information conditionnelle
  $I(B_j|A_i) = -\log(p_{ij}/p_i)$
- On a ainsi la décomposition (pour l'information) :

$$I(A_i, B_j) = I(B_j) - I(B_j|A_i)$$

Entropie conditionnelle

- On part des probabilités conditionnelles :

$$\mathbb{P}(B_j|A_i) = \frac{\mathbb{P}(A_i \cap B_j)}{\mathbb{P}(A_i)} = \frac{p_{ij}}{p_i}$$

- On peut réécrire la définition de l'information mutuelle :

$$I(A_i, B_j) = \log\left(\frac{p_{ij}}{p_i q_j}\right) = -\log(q_j) + \log\left(\frac{p_{ij}}{p_i}\right)$$

- On définit l'information conditionnelle
  $I(B_j|A_i) = -\log(p_{ij}/p_i)$
- On a ainsi la décomposition (pour l'information) :

$$I(A_i, B_j) = I(B_j) - I(B_j|A_i)$$

- Ou encore :

$$I(B_j) = I(A_i, B_j) + I(B_j|A_i)$$

Interprétations des informations mutuelle/conditionnelle

- L'information $I(B_j)$ s'interprète comme la quantité d'information obtenue si l'on apprend que B_j se réalise.

Interprétations des informations mutuelle/conditionnelle

- L'information $I(B_j)$ s'interprète comme la quantité d'information obtenue si l'on apprend que B_j se réalise.
- L'information mutuelle $I(A_i, B_j)$ s'interpète comme la quantité d'information **sur** B_j apportée par la (connaissance de la) réalisation de A_i (ou, symétriquement, l'information sur A_i apportée par la réalisation de B_j)

Interprétations des informations mutuelle/conditionnelle

- L'information $I(B_j)$ s'interprète comme la quantité d'information obtenue si l'on apprend que B_j se réalise.
- L'information mutuelle $I(A_i, B_j)$ s'interpète comme la quantité d'information **sur** B_j apportée par la (connaissance de la) réalisation de A_i (ou, symétriquement, l'information sur A_i apportée par la réalisation de B_j)
- L'information conditionnelle $I(B_j|A_i)$ s'interprète comme la quantité d'information "résiduelle" obtenue lorsque l'on apprend que B_j se réalise, alors qu'on savait déjà que A_i se réalise (et donc, la probabilité perçue de B_j était la probabilité conditionnelle)

Entropie conditionnelle

Définition : entropie conditionnelle

On appelle **entropie conditionnelle** de Y sachant X, l'espérance mathématique (sur toutes les réalisations possibles de X et Y) de l'information conditionnelle de la réalisation de Y sachant celle de X :

$$\begin{aligned} H(Y|X) &= \mathbb{E}(I(Y|X)) = \sum_{A\in X}\sum_{B\in Y} \mathbb{P}(A\cap B) I(B|A) \\ &= -\sum_{i,j} p_{ij} \log\left(\frac{p_{ij}}{p_i}\right) \end{aligned}$$

D'autres décompositions

- $H(X,Y) = H(X) + H(Y|X)$ (l'information complète sur (X,Y) est la somme de l'information sur X seule, et de l'information résiduelle sur Y lorsque X est connue)

D'autres décompositions

- $H(X,Y) = H(X) + H(Y|X)$ (l'information complète sur (X,Y) est la somme de l'information sur X seule, et de l'information résiduelle sur Y lorsque X est connue)
- $H(X,Y) = H(Y) + H(X|Y)$

D'autres décompositions

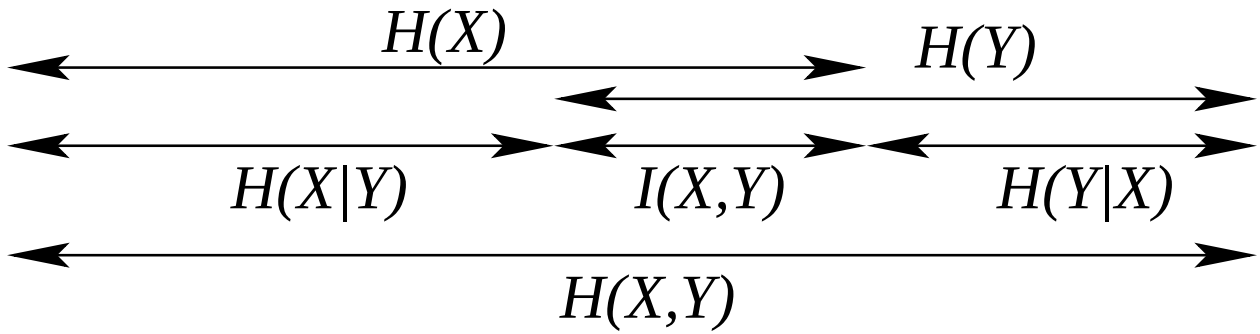
- $H(X,Y) = H(X) + H(Y|X)$ (l'information complète sur (X,Y) est la somme de l'information sur X seule, et de l'information résiduelle sur Y lorsque X est connue)
- $H(X,Y) = H(Y) + H(X|Y)$
- $H(X) = I(X,Y) + H(X|Y)$ (l'information sur X seule est la somme de l'information commune à X et Y, et de l'information résiduelle sur X sachant Y)

D'autres décompositions

- $H(X,Y) = H(X) + H(Y|X)$ (l'information complète sur (X,Y) est la somme de l'information sur X seule, et de l'information résiduelle sur Y lorsque X est connue)
- $H(X,Y) = H(Y) + H(X|Y)$
- $H(X) = I(X,Y) + H(X|Y)$ (l'information sur X seule est la somme de l'information commune à X et Y, et de l'information résiduelle sur X sachant Y)
- $H(Y) = I(X,Y) + H(Y|X)$

D'autres décompositions

- $H(X,Y) = H(X) + H(Y|X)$ (l'information complète sur (X,Y) est la somme de l'information sur X seule, et de l'information résiduelle sur Y lorsque X est connue)
- $H(X,Y) = H(Y) + H(X|Y)$
- $H(X) = I(X,Y) + H(X|Y)$ (l'information sur X seule est la somme de l'information commune à X et Y, et de l'information résiduelle sur X sachant Y)
- $H(Y) = I(X,Y) + H(Y|X)$
- Mnémotechniquement :



Remarque : entropie conditionnelle nulle

- On sait à quoi correspond le cas $I(X, Y) = 0$: X et Y indépendants ;

Remarque : entropie conditionnelle nulle

- On sait à quoi correspond le cas $I(X, Y) = 0$: X et Y indépendants ;
- Peut-on interpréter le cas "complémentaire" $H(Y|X) = 0$, *i.e.* $I(X, Y) = H(Y)$?

Remarque : entropie conditionnelle nulle

- On sait à quoi correspond le cas $I(X, Y) = 0$: X et Y indépendants ;
- Peut-on interpréter le cas "complémentaire" $H(Y|X) = 0$, *i.e.* $I(X, Y) = H(Y)$?
- $H(Y|X) = -\sum_{i,j} p_{ij} \log(p_{ij}/p_i)$ est **nul** si et seulement si les (i, j) tels que $p_{ij} > 0$ donnent tous $p_{ij} = p_i$ (sinon un des logarithmes sera strictement négatif)

Remarque : entropie conditionnelle nulle

- On sait à quoi correspond le cas $I(X, Y) = 0$: X et Y indépendants ;
- Peut-on interpréter le cas "complémentaire" $H(Y|X) = 0$, *i.e.* $I(X, Y) = H(Y)$?
- $H(Y|X) = -\sum_{i,j} p_{ij} \log(p_{ij}/p_i)$ est **nul** si et seulement si les (i, j) tels que $p_{ij} > 0$ donnent tous $p_{ij} = p_i$ (sinon un des logarithmes sera strictement négatif)
- c'est-à-dire si, pour tout i (tel que $p_i > 0$), il existe un j (forcément **unique**) tel que $p_{ij} = p_i$

Remarque : entropie conditionnelle nulle

- On sait à quoi correspond le cas $I(X, Y) = 0$: X et Y indépendants ;
- Peut-on interpréter le cas "complémentaire" $H(Y|X) = 0$, *i.e.* $I(X, Y) = H(Y)$?
- $H(Y|X) = -\sum_{i,j} p_{ij} \log(p_{ij}/p_i)$ est **nul** si et seulement si les (i, j) tels que $p_{ij} > 0$ donnent tous $p_{ij} = p_i$ (sinon un des logarithmes sera strictement négatif)
- c'est-à-dire si, pour tout i (tel que $p_i > 0$), il existe un j (forcément **unique**) tel que $p_{ij} = p_i$
- c'est-à-dire si Y s'écrit comme une fonction déterministe de X (la connaissance de X donne à coup sûr la valeur de Y).

Exercice : entropie et décision

Une naissance a eu lieu un jour de la semaine, sur lequel on n'a aucune information. On a le choix de recevoir la réponse à une question :

- Q_1 : "la naissance a-t-elle eu lieu (a) lundi, mardi ou mercredi, ou (b) jeudi, vendredi, samedi ou dimanche ?"
- Q_2 : "la naissance a-t-elle eu lieu (a) samedi, ou (b) dimanche, ou (c) un autre jour ?"
- Q_3 : "la naissance a-t-elle eu lieu (a) lundi ou mardi, ou (b) mercredi ou jeudi, ou (c) vendredi, samedi ou dimanche ?"

Décrire la situation par trois systèmes composés, et proposer un critère de choix de la question à poser.

Exercice : prévisions météorologiques (janvier 2005)

On teste un système de prévisions météorologiques pour lequel on a obtenu, sur un an, les fréquences de résultats suivantes :

	Temps : Pluie	Temps : Soleil
Prévu : Pluie	1/12	1/6
Prévu : Soleil	1/12	2/3

- Quelle est la probabilité que le système donne une prévision incorrecte ?
- Calculer l'information mutuelle entre le temps prévu et le temps effectif.
- Comparer à un système de "prévisions" qui prédit systématiquement du soleil. Commenter.

Exercice : test de dépistage

On considère une situation dans laquelle un test de dépistage pour une maladie est censé discriminer entre les situations $X \in \{V, nV\}$, en donnant un résultat $Y \in \{T^+, T^-\}$. Les probabilités respectives des différents cas sont les suivantes :

	T^+	T^-
V	0.07	0.01
nV	0.03	0.89

On définit l'*efficacité* du test comme étant $r = \frac{I(X,Y)}{H(X)}$.

- Quelles valeurs peut, *a priori*, prendre r ?
- Calculer $H(X)$, $I(X, Y)$ et r.
- À quoi correspondraient des valeurs $r = 0$? $r = 1$?

Source simple

- $k \geq 2$ entier, $(p_1, \ldots, p_k)$ distribution de probabilités
- On considère une "source" S qui émet des symboles $X_1, X_2, \ldots$ aléatoires

Source simple

- $k \geq 2$ entier, $(p_1, \ldots, p_k)$ distribution de probabilités
- On considère une "source" S qui émet des symboles $X_1, X_2, \ldots$ aléatoires
- **Source simple :** les X_i sont des variables aléatoires **indépendantes**, toutes **de même loi** $\mathbb{P}(X_i = s_j) = p_j$

Source simple

- $k \geq 2$ entier, $(p_1, \ldots, p_k)$ distribution de probabilités
- On considère une "source" S qui émet des symboles $X_1, X_2, \ldots$ aléatoires
- **Source simple :** les X_i sont des variables aléatoires **indépendantes**, toutes **de même loi** $\mathbb{P}(X_i = s_j) = p_j$
- **Entropie de la source :** $H(S) = H(X_1)$

Source simple

- $k \geq 2$ entier, $(p_1, \ldots, p_k)$ distribution de probabilités
- On considère une "source" S qui émet des symboles $X_1, X_2, \ldots$ aléatoires
- **Source simple :** les X_i sont des variables aléatoires **indépendantes**, toutes **de même loi** $\mathbb{P}(X_i = s_j) = p_j$
- **Entropie de la source :** $H(S) = H(X_1)$
- r-suite : la suite de r symboles $X_1, X_2, \ldots, X_r$

Source simple

- $k \geq 2$ entier, $(p_1, \ldots, p_k)$ distribution de probabilités
- On considère une "source" S qui émet des symboles $X_1, X_2, \ldots$ aléatoires
- **Source simple :** les X_i sont des variables aléatoires **indépendantes**, toutes **de même loi** $\mathbb{P}(X_i = s_j) = p_j$
- **Entropie de la source :** $H(S) = H(X_1)$
- r-suite : la suite de r symboles $X_1, X_2, \ldots, X_r$
- On a facilement (récurrence sur r)

$$H(X_1, X_2, \ldots, X_r) = rH(S).$$

Occurrences d'un symbole, suites typiques

Théorie de l'Information (2)

Philippe Duchon

Entropie et information

Entropie d'un système composé

Exercices

Théorème de la source binomiale

Codage

Codage de source

Déchiffrabilité

Notion de code préfixe

- On note $N_i(r)$, le **nombre d'occurrences** du symbole s_i dans la r-suite $X_1, \ldots, X_r$.

Occurrences d'un symbole, suites typiques

- On note $N_i(r)$, le **nombre d'occurrences** du symbole s_i dans la r-suite $X_1, \ldots, X_r$.
- La **loi** de $N_i(r)$ est la loi **binomiale** $\mathcal{B}_{r,p_i}$; espérance $r.p_i$, variance $r.p_i(1-p_i)$

Occurrences d'un symbole, suites typiques

- On note $N_i(r)$, le **nombre d'occurrences** du symbole s_i dans la r-suite $X_1, \ldots, X_r$.
- La **loi** de $N_i(r)$ est la loi **binomiale** $\mathcal{B}_{r,p_i}$; espérance $r.p_i$, variance $r.p_i(1-p_i)$
- Le **théorème de la limite centrale** affirme

$$\frac{N_i(r) - rp_i}{\sqrt{rp_i(1-p_i)}} \xrightarrow{(d)} \mathcal{N}(0,1)$$

Occurrences d'un symbole, suites typiques

- On note $N_i(r)$, le **nombre d'occurrences** du symbole s_i dans la r-suite $X_1, \ldots, X_r$.
- La **loi** de $N_i(r)$ est la loi **binomiale** $\mathcal{B}_{r,p_i}$; espérance $r.p_i$, variance $r.p_i(1-p_i)$
- Le **théorème de la limite centrale** affirme

$$\frac{N_i(r) - rp_i}{\sqrt{rp_i(1-p_i)}} \xrightarrow{(d)} \mathcal{N}(0,1)$$

- L'**inégalité de Tchebycheff** donne

$$\mathbb{P}\left(\frac{|N_i(r) - rp_i|}{\sqrt{rp_i(1-p_i)}} \geq \lambda\right) \leq \frac{1}{\lambda^2}$$

Occurrences d'un symbole, suites typiques

- On note $N_i(r)$, le **nombre d'occurrences** du symbole s_i dans la r-suite $X_1, \ldots, X_r$.
- La **loi** de $N_i(r)$ est la loi **binomiale** $\mathcal{B}_{r,p_i}$; espérance $r.p_i$, variance $r.p_i(1-p_i)$
- Le **théorème de la limite centrale** affirme

$$\frac{N_i(r) - rp_i}{\sqrt{rp_i(1-p_i)}} \xrightarrow{(d)} \mathcal{N}(0,1)$$

- L'**inégalité de Tchebycheff** donne

$$\mathbb{P}\left(\frac{|N_i(r) - rp_i|}{\sqrt{rp_i(1-p_i)}} \geq \lambda\right) \leq \frac{1}{\lambda^2}$$

- Une suite est λ-typique pour le symbole s_i, si son nombre d'occurrences du symbole satisfait l'inégalité

Occurrences d'un symbole, suites typiques

- On note $N_i(r)$, le **nombre d'occurrences** du symbole s_i dans la r-suite $X_1, \ldots, X_r$.
- La **loi** de $N_i(r)$ est la loi **binomiale** $\mathcal{B}_{r,p_i}$; espérance $r.p_i$, variance $r.p_i(1-p_i)$
- Le **théorème de la limite centrale** affirme

$$\frac{N_i(r) - rp_i}{\sqrt{rp_i(1-p_i)}} \xrightarrow{(d)} \mathcal{N}(0,1)$$

- L'**inégalité de Tchebycheff** donne

$$\mathbb{P}\left(\frac{|N_i(r) - rp_i|}{\sqrt{rp_i(1-p_i)}} \geq \lambda\right) \leq \frac{1}{\lambda^2}$$

- Une suite est λ-typique pour le symbole s_i, si son nombre d'occurrences du symbole satisfait l'inégalité
- Une suite est λ-typique, si elle est λ-typique pour chaque symbole

Théorème de la source binomiale

- La probabilité que la source émette une r-suite qui soit λ-typique, est d'au moins $1 - k/\lambda^2$;

Théorème de la source binomiale

- La probabilité que la source émette une r-suite qui soit λ-typique, est d'au moins $1 - k/\lambda^2$;
- Dans la pratique, si r est grand, cette probabilité est **beaucoup plus proche que cela de** 1 lorsque λ dépasse quelques unités (TCL).

Théorème de la source binomiale

- La probabilité que la source émette une r-suite qui soit λ-typique, est d'au moins $1 - k/\lambda^2$;
- Dans la pratique, si r est grand, cette probabilité est **beaucoup plus proche que cela de** 1 lorsque λ dépasse quelques unités (TCL).
- **Théorème (admis) :** le nombre $T_{r,\lambda}$ de r-suites λ-typiques est "approximativement"

$$T_{r,\lambda} \simeq 2^{rH(S)}$$

(au sens logarithmique : $\log(T_{r,\lambda}) - rH(S) = o(r)$)

Théorème de la source binomiale

- La probabilité que la source émette une r-suite qui soit λ-typique, est d'au moins $1 - k/\lambda^2$;
- Dans la pratique, si r est grand, cette probabilité est **beaucoup plus proche que cela de** 1 lorsque λ dépasse quelques unités (TCL).
- **Théorème (admis) :** le nombre $T_{r,\lambda}$ de r-suites λ-typiques est "approximativement"

$$T_{r,\lambda} \simeq 2^{rH(S)}$$

(au sens logarithmique : $\log(T_{r,\lambda}) - rH(S) = o(r)$)

- Dans la pratique, le nombre de suites λ-typiques ne dépend quasiment pas de λ (si r est assez grand)

Théorème de la source binomiale

- La probabilité que la source émette une r-suite qui soit λ-typique, est d'au moins $1 - k/\lambda^2$;
- Dans la pratique, si r est grand, cette probabilité est **beaucoup plus proche que cela de** 1 lorsque λ dépasse quelques unités (TCL).
- **Théorème (admis) :** le nombre $T_{r,\lambda}$ de r-suites λ-typiques est "approximativement"

$$T_{r,\lambda} \simeq 2^{rH(S)}$$

(au sens logarithmique : $\log(T_{r,\lambda}) - rH(S) = o(r)$)

- Dans la pratique, le nombre de suites λ-typiques ne dépend quasiment pas de λ (si r est assez grand)
- La preuve se fait en torturant la formule de Stirling

Problématique du codage

Théorie de l'Information (2)

Philippe Duchon

Entropie et information

Entropie d'un système composé

Exercices

Théorème de la source binomiale

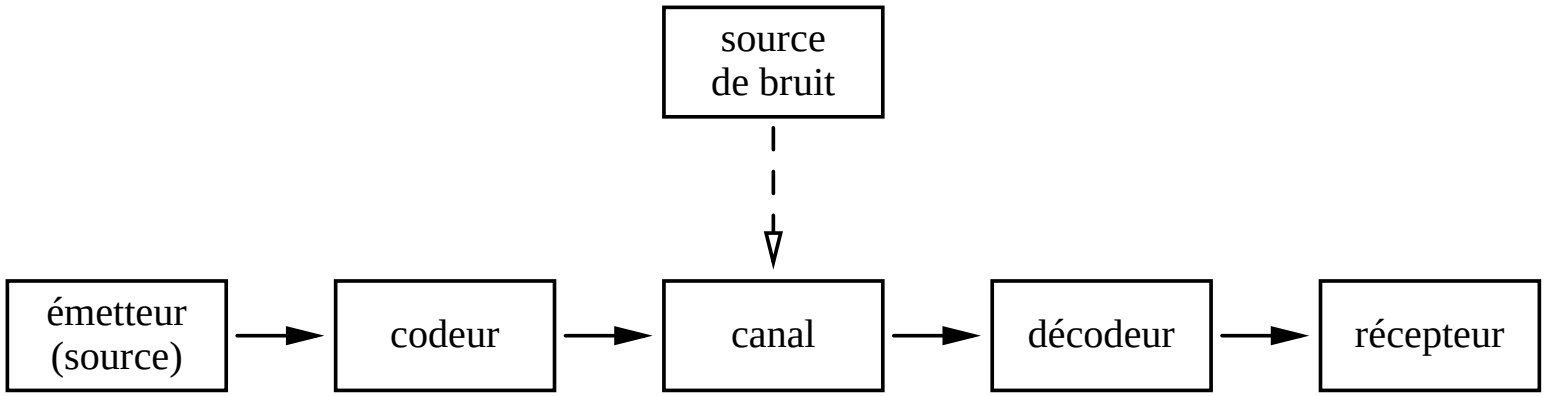
Codage

Codage de source

Déchiffrabilité

Notion de code préfixe

Modélisation classique d'une transmission d'information :



Notion de code

- Une **source** S émet des **messages**, qui sont des suites de symboles pris dans un **alphabet de source** A

Notion de code

- Une **source** S émet des **messages**, qui sont des suites de symboles pris dans un **alphabet de source** A
- Un **code** est une **fonction** qui à chaque message $m \in A^*$, fait correspondre un mot $C(m) \in B^*$ où B est un **alphabet de codage**

Notion de code

- Une **source** S émet des **messages**, qui sont des suites de symboles pris dans un **alphabet de source** A
- Un **code** est une **fonction** qui à chaque message $m \in A^*$, fait correspondre un mot $C(m) \in B^*$ où B est un **alphabet de codage**
- Typiquement, en vue d'une transmission sur un canal donné, l'alphabet de codage est adapté au canal

Notion de code

Théorie de l'Information (2)

Philippe Duchon

Entropie et information

Entropie d'un système composé

Exercices

Théorème de la source binomiale

Codage

Codage de source

Déchiffrabilité

Notion de code préfixe

- Une **source** S émet des **messages**, qui sont des suites de symboles pris dans un **alphabet de source** A
- Un **code** est une **fonction** qui à chaque message $m \in A^*$, fait correspondre un mot $C(m) \in B^*$ où B est un **alphabet de codage**
- Typiquement, en vue d'une transmission sur un canal donné, l'alphabet de codage est adapté au canal
- Le plus souvent : **codage binaire**, l'alphabet de codage est $B = \{0, 1\}$

Codage de source

Cas particulier dans l'ensemble des codes possibles

- Pour chaque symbole $s \in A$, on définit son codage $C(s) \in B^*$ (un mot de l'alphabet de codage)

Codage de source

Cas particulier dans l'ensemble des codes possibles

- Pour chaque symbole $s \in A$, on définit son codage $C(s) \in B^*$ (un mot de l'alphabet de codage)
- Si un message m est composé d'une suite de lettres,

$$m = s_1 s_2 \cdots s_\ell,$$

on définit son codage $C(m)$ par concaténation :

$$C(m) = C(s_1)C(s_2)\cdots C(s_\ell)$$

Codage de source

Cas particulier dans l'ensemble des codes possibles

- Pour chaque symbole $s \in A$, on définit son codage $C(s) \in B^*$ (un mot de l'alphabet de codage)
- Si un message m est composé d'une suite de lettres,

$$m = s_1 s_2 \cdots s_\ell,$$

on définit son codage $C(m)$ par concaténation :

$$C(m) = C(s_1)C(s_2)\cdots C(s_\ell)$$

- Si l'on était grossier, on dirait qu'on a défini C comme un **morphisme du monoïde libre A^* vers le monoïde libre B^***

Codage de source

Cas particulier dans l'ensemble des codes possibles

- Pour chaque symbole $s \in A$, on définit son codage $C(s) \in B^*$ (un mot de l'alphabet de codage)
- Si un message m est composé d'une suite de lettres,

$$m = s_1 s_2 \cdots s_\ell,$$

on définit son codage $C(m)$ par concaténation :

$$C(m) = C(s_1)C(s_2)\cdots C(s_\ell)$$

- Si l'on était grossier, on dirait qu'on a défini C comme un **morphisme du monoïde libre A^* vers le monoïde libre B^***
- Mais on va essayer de rester poli

Notations : longueurs

- La **longueur d'un mot** m est le **nombre de lettres** (pas forcément distinctes) qui le composent

Notations : longueurs

- La **longueur d'un mot** m est le **nombre de lettres** (pas forcément distinctes) qui le composent
- On la note $\ell(m)$, parfois $|m|$

Notations : longueurs

- La **longueur d'un mot** m est le **nombre de lettres** (pas forcément distinctes) qui le composent
- On la note $\ell(m)$, parfois $|m|$
- On note $\ell_s(m)$, ou $|m|_s$, le nombre d'occurrences de la lettre s dans le mot m

Notations : longueurs

- La **longueur d'un mot** m est le **nombre de lettres** (pas forcément distinctes) qui le composent
- On la note $\ell(m)$, parfois $|m|$
- On note $\ell_s(m)$, ou $|m|_s$, le nombre d'occurrences de la lettre s dans le mot m
- Pour définir un codage de source pour l'alphabet $A = \{s_1, \ldots, s_k\}$, on utilise la notation $C = \{M_1, \ldots, M_k\}$, ce qui sous-entend $C(s_i) = M_i$

Notations : longueurs

- La **longueur d'un mot** m est le **nombre de lettres** (pas forcément distinctes) qui le composent
- On la note $\ell(m)$, parfois $|m|$
- On note $\ell_s(m)$, ou $|m|_s$, le nombre d'occurrences de la lettre s dans le mot m
- Pour définir un codage de source pour l'alphabet $A = \{s_1, \ldots, s_k\}$, on utilise la notation $C = \{M_1, \ldots, M_k\}$, ce qui sous-entend $C(s_i) = M_i$
- Notation : $\ell_i = \ell(M_i)$

Notations : longueurs

- La **longueur d'un mot** m est le **nombre de lettres** (pas forcément distinctes) qui le composent
- On la note $\ell(m)$, parfois $|m|$
- On note $\ell_s(m)$, ou $|m|_s$, le nombre d'occurrences de la lettre s dans le mot m
- Pour définir un codage de source pour l'alphabet $A = \{s_1, \ldots, s_k\}$, on utilise la notation $C = \{M_1, \ldots, M_k\}$, ce qui sous-entend $C(s_i) = M_i$
- Notation : $\ell_i = \ell(M_i)$
- On a trivialement, pour tout mot $m \in A^*$,

$$\ell(C(m)) = \sum_{i=1}^{k} \ell_{s_i}(m)\ell_i$$

Notations : longueurs

- La **longueur d'un mot** m est le **nombre de lettres** (pas forcément distinctes) qui le composent
- On la note $\ell(m)$, parfois $|m|$
- On note $\ell_s(m)$, ou $|m|_s$, le nombre d'occurrences de la lettre s dans le mot m
- Pour définir un codage de source pour l'alphabet $A = \{s_1, \ldots, s_k\}$, on utilise la notation $C = \{M_1, \ldots, M_k\}$, ce qui sous-entend $C(s_i) = M_i$
- Notation : $\ell_i = \ell(M_i)$
- On a trivialement, pour tout mot $m \in A^*$,

$$\ell(C(m)) = \sum_{i=1}^{k} \ell_{s_i}(m)\ell_i$$

- Notion de *longueur maximale d'un code* : $L = \max_i(\ell_i)$

Notations : longueurs

- La **longueur d'un mot** m est le **nombre de lettres** (pas forcément distinctes) qui le composent
- On la note $\ell(m)$, parfois $|m|$
- On note $\ell_s(m)$, ou $|m|_s$, le nombre d'occurrences de la lettre s dans le mot m
- Pour définir un codage de source pour l'alphabet $A = \{s_1, \ldots, s_k\}$, on utilise la notation $C = \{M_1, \ldots, M_k\}$, ce qui sous-entend $C(s_i) = M_i$
- Notation : $\ell_i = \ell(M_i)$
- On a trivialement, pour tout mot $m \in A^*$,

$$\ell(C(m)) = \sum_{i=1}^{k} \ell_{s_i}(m)\ell_i$$

- Notion de *longueur maximale d'un code* : $L = \max_i(\ell_i)$
- Trivialement, $\ell(C(m)) \leq L\ell(m)$

Deux théories du codage

Entropie et information
Entropie d'un système composé
Exercices
Théorème de la source binomiale
Codage
Codage de source
Déchiffrabilité
Notion de code préfixe

On peut essayer d'aborder la théorie du codage de deux manières différentes :

- **Purement combinatoire :** on a des mots qu'on réécrit en d'autres mots, et on s'intéresse à des propriétés combinatoires du code. Par exemple, la possibilité de retrouver le mot à partir de son codage (notion de déchiffrabilité)

Deux théories du codage

On peut essayer d'aborder la théorie du codage de deux manières différentes :

- **Purement combinatoire :** on a des mots qu'on réécrit en d'autres mots, et on s'intéresse à des propriétés combinatoires du code. Par exemple, la possibilité de retrouver le mot à partir de son codage (notion de déchiffrabilité)
- **Probabiliste :** on suppose que la source est un objet probabiliste qui émet des suites de symboles aléatoires, ce qui permet de s'intéresser à des propriétés ou à des grandeurs *en moyenne* ; c'est là qu'intervient fructueusement la notion d'entropie.

Notion de déchiffrabilité

Définition

*Un code C est dit **déchiffrable** (ou **uniquement déchiffrable**, ou **non ambigu**) s'il est injectif :*

$$\forall m \in A^*, \forall m' \in A^*, C(m) = C(m') \implies m = m'$$

*Un code qui n'est pas uniquement déchiffrable est dit **ambigu**.*

- Si un code est uniquement déchiffrable, il existe donc une **fonction de décodage** (fonction réciproque) $D : C(A^*) \to A^*$ telle que $D(C(m)) = m$ pour tout m ;
- En toute généralité, **il n'est pas toujours facile** de décider si un code est uniquement déchiffrable, ni, s'il l'est, de calculer la fonction de décodage.

C'est-y déchiffrable ?

Entropie et information

Entropie d'un système composé

Exercices

Théorème de la source binomiale

Codage

Codage de source

Déchiffrabilité

Notion de code préfixe

- **Prouver** qu'un code est ambigu est conceptuellement simple : "il suffit" d'exhiber deux mots distincts qui ont le même codage

C'est-y déchiffrable ?

Entropie et information
Entropie d'un système composé
Exercices
Théorème de la source binomiale
Codage
Codage de source
Déchiffrabilité
Notion de code préfixe

- **Prouver** qu'un code est ambigu est conceptuellement simple : "il suffit" d'exhiber deux mots distincts qui ont le même codage
- Pour **prouver** qu'un code est uniquement déchiffrable, c'est *a priori* plus compliqué : moralement, il faut exhiber la fonction de décodage et prouver qu'elle est correcte

C'est-y déchiffrable ?

- **Prouver** qu'un code est ambigu est conceptuellement simple : "il suffit" d'exhiber deux mots distincts qui ont le même codage
- Pour **prouver** qu'un code est uniquement déchiffrable, c'est *a priori* plus compliqué : moralement, il faut exhiber la fonction de décodage et prouver qu'elle est correcte
- Dans la pratique, on verra qu'il existe des conditions suffisantes pour qu'un code soit uniquement déchiffrable, et que l'ensemble des codes u.d. qui satisfont ces conditions contient "presque" tous les codes "utiles".

Des exemples !

Pour chaque code, donné par l'ensemble des mots de code des symboles, dire s'il est ou non uniquement déchiffrable. S'il l'est, donner l'algorithme de décodage ; sinon, donner deux mots ayant le même codage.

- $\mathcal{C}_1 = \{0, 11, 101\}$
- $\mathcal{C}_2 = \{00, 01, 001\}$
- $\mathcal{C}_3 = \{0, 01, 10\}$
- $\mathcal{C}_4 = \{000, 001, 01, 1\}$
- $\mathcal{C}_5 = \{000100, 100101, 010101, 111000\}$
- $\mathcal{C}_6 = \{0, 01, 11\}$

D'autres propriétés combinatoires

- Les propriétés utiles des codes qui sont de nature combinatoire ne s'arrêtent pas à la déchiffrabilité. Même si un code est non ambigu, il peut être difficile de prendre une séquence codée "en marche" : c'est le problème de la synchronisation, ou du formatage.

D'autres propriétés combinatoires

- Les propriétés utiles des codes qui sont de nature combinatoire ne s'arrêtent pas à la déchiffrabilité. Même si un code est non ambigu, il peut être difficile de prendre une séquence codée "en marche" : c'est le problème de la synchronisation, ou du formatage.
- Autre problème potentiel, le "délai" : nombre de symboles de code qu'on peut avoir besoin d'examiner au-delà de ceux qui codent une lettre, avant de pouvoir décoder cette lettre.

D'autres propriétés combinatoires

- Les propriétés utiles des codes qui sont de nature combinatoire ne s'arrêtent pas à la déchiffrabilité. Même si un code est non ambigu, il peut être difficile de prendre une séquence codée "en marche" : c'est le problème de la synchronisation, ou du formatage.
- Autre problème potentiel, le "délai" : nombre de symboles de code qu'on peut avoir besoin d'examiner au-delà de ceux qui codent une lettre, avant de pouvoir décoder cette lettre.
- Exemple de $\mathcal{C}_6 = \{0, 01, 11\}$: déchiffrable, mais pour décoder $011\cdots1$ il faut connaître la **parité** du nombre de 1 consécutifs avant d'être capable de décoder la première lettre (délai non borné).

Codes préfixes

Un mot m est un **préfixe** d'un mot m', s'il existe un mot w tel que $m' = m.w$.

Définition

*Un code $C = \{M_1, \ldots, M_k\}$ est dit **préfixe** s'il n'existe pas deux mots de code M_i, M_j (autres que $i = j$) tels que M_i soit un préfixe de M_j.*

Théorème

Tout code préfixe est uniquement déchiffrable.