

# Logique et preuve : Examen de décembre 2016

## Tous documents autorisés

Automne 2016

### Notes importantes

- Vos démonstrations doivent être parfaitement lisibles et documentées (en précisant à chaque fois quelle règle ou méta-théorème vous appliquez).
- Barème indicatif :
  - Exercices 1,2 et 3 : 4 points chacun
  - Problème : 8 points

### 1 Exercice

Montrer en logique propositionnelle intuitionniste le séquent suivant :

$$P \rightarrow Q, Q \rightarrow \sim P \vdash \sim P$$

### 2 Exercice

Montrer que le séquent suivant n'est pas démontrable en logique classique. Est-il démontrable en logique intuitionniste? minimale?

$$P \rightarrow Q, Q \rightarrow P \vdash P$$

### 3 Exercice

Soient  $A$  et  $B$  deux types, et  $P$  un prédicat sur  $A \times B$ .

1. Démontrer le séquent

$$\exists a : A, \forall b : A, P(a, b) \vdash \forall b : B, \exists a : A, P(a, b)$$

2. Montrer que le séquent suivant n'est pas démontrable :

$$\forall b : B, \exists a : A, P(a, b) \vdash \exists a : A, \forall b : A, P(a, b)$$

**Aide :** On pourra utiliser la cohérence du calcul des prédicats, et une structure d'interprétation qui permet de montrer que le séquent ci-dessus n'est pas valide.

## 4 Problème

1. Montrer le jugement  $\vdash_J \sim(P \leftrightarrow \sim P)$
2. On définit le *ou exclusif* par l'abréviation

$$A \oplus B =_{\text{def}} (A \wedge \sim B) \vee (B \wedge \sim A)$$

Montrer la règle dérivée suivante

$$\frac{\Gamma \vdash A \quad \Gamma \vdash \sim B}{\Gamma \vdash A \oplus B} \oplus_{i,1}$$

3. Montrer le jugement
4. [facultatif] Supposons qu'on puisse prouver le jugement

$$\sim(P \leftrightarrow Q) \vdash_J P \oplus Q$$

Montrer alors qu'on pourrait prouver le tiers-exclu (**Aide** : on peut se servir de la première question de ce problème et de diverses propriétés de la logique propositionnelle).