

## Remarques

- Les exercices sont indépendants. N'importe quelle question peut être faite en supposant les autres résolues.
- Vos démonstrations doivent être parfaitement lisibles et documentées (en précisant à chaque fois quelle règle ou méta-théorème vous appliquez).
- Le barème est indicatif.
- Le sujet contient ?? pages, dont un aide-mémoire.

## Exercice 1 : Logique minimale (4 pts)

Parmi les deux séquents suivants, l'un est prouvable en logique minimale et l'autre non. Donner une preuve de celui qui est prouvable, et justifier la non-prouvabilité de l'autre.

- $P \rightarrow Q, Q \rightarrow R \vdash R \rightarrow P$
- $(P \rightarrow Q) \rightarrow R \vdash Q \rightarrow R$

## Exercice 2 : Logique propositionnelle intuitionniste (4 pts)

Prouver le séquent suivant en logique propositionnelle intuitionniste

$$P \rightarrow (Q \vee R), \sim(P \wedge Q) \vdash P \rightarrow R$$

## Exercice 3 : Logique propositionnelle classique (3pts)

Montrer que la règle suivante est une règle dérivée de la logique propositionnelle classique :

$$\frac{\Gamma \vdash A \rightarrow B \quad \Gamma \vdash \sim A \rightarrow B}{\Gamma \vdash B}$$

## Exercice 4 : traduction en formules du premier ordre (3 pts)

On s'intéresse à un jeu de démineur. Une case  $c$  du jeu peut contenir un entier entre 0 et 8 ou une bombe. On considère les prédicats suivants sur l'ensemble des cases  $c, c'$  du jeu et les entiers de 0 à 8 :

- Voisin( $c, c'$ ) qui vaut vrai si  $c$  et  $c'$  sont des cases et que ces deux cases sont voisines (la relation Voisin est supposée symétrique).
- Contient( $c, i$ ), qui vaut vrai si  $c$  est une case et  $i$  un entier compris entre 0 et 8, et que la case  $c$  contient le nombre  $i$ .
- Bombe( $c$ ) qui vaut vrai si  $c$  est une case et contient une bombe.

On considère que l'on peut appliquer les quantificateurs aussi bien aux cases qu'aux entiers (qui sont tous supposés être entre 0 et 8). On pourra utiliser aussi le prédicat d'égalité. Traduire les assertions suivantes en formules du premier ordre (on fera particulièrement attention au parenthésage des formules).

1. Toute case qui contient un nombre ne contient pas de bombe.
2. Toute case qui a une case voisine contenant une bombe, ne contient pas 0.
3. Si une case contient le nombre 1, alors elle a une unique case voisine qui contient une bombe.

## Exercice 5 : Preuves en logique du premier ordre classique (6 pts)

Donner une preuve des séquents suivants en logique du premier ordre classique.

$$\exists x, P(x) \wedge Q(x); \forall y, Q(y) \rightarrow \sim P(y) \vdash \perp$$

$$\forall x, (P(x) \rightarrow Q(w)); (\sim \exists y, P(y)) \rightarrow (\exists z, P(z)) \vdash Q(w)$$

## Aide-mémoire

- Règle d'hypothèse :

$$\frac{}{\Gamma, A \vdash A} \text{hyp}$$

- Introduction de  $\rightarrow$  :

$$\frac{\Gamma, A \vdash B}{\Gamma \vdash A \rightarrow B} \rightarrow_i$$

- Modus ponens (élimination de  $\rightarrow$ ) :

$$\frac{\Gamma \vdash A \rightarrow B \quad \Gamma \vdash A}{\Gamma \vdash B} \text{m.p.}$$

- Élimination de  $\perp$  :

$$\frac{\Gamma \vdash \perp}{\Gamma \vdash A} \perp_e$$

- Introduction de  $\sim$  :

$$\frac{\Gamma, A \vdash \perp}{\Gamma \vdash \sim A} \sim_i$$

- Introduction de  $\vee$  :

$$\frac{\Gamma \vdash A}{\Gamma \vdash A \vee B} \vee_{i,1} \quad \frac{\Gamma \vdash B}{\Gamma \vdash A \vee B} \vee_{i,2}$$

- Élimination de  $\vee$  :

$$\frac{\Gamma \vdash A \vee B \quad \Gamma, A \vdash C \quad \Gamma, B \vdash C}{\Gamma \vdash C} \vee_e$$

- Introduction de  $\wedge$  :

$$\frac{\Gamma \vdash A \quad \Gamma \vdash B}{\Gamma \vdash A \wedge B} \wedge_i$$

- Élimination de  $\wedge$  :

$$\frac{\Gamma \vdash A \wedge B \quad \Gamma, A, B \vdash C}{\Gamma \vdash C} \wedge_e \quad \frac{\Gamma \vdash A \wedge B}{\Gamma \vdash A} \wedge_e^g \quad \frac{\Gamma \vdash A \wedge B}{\Gamma \vdash B} \wedge_e^d$$

- Introduction du tiers-exclu :

$$\frac{}{\vdash A \vee \sim A} \text{exm}_i$$

- Introduction de  $\forall$  : si  $x$  n'apparaît pas comme variable libre dans  $\Gamma$ ,

$$\frac{\Gamma \vdash A}{\Gamma \vdash \forall x, A} \forall_i$$

- Élimination de  $\forall$  (la substitution doit être licite) :

$$\frac{\Gamma \vdash \forall x, A}{\Gamma \vdash A[x \leftarrow t]} \forall_e, t$$

- Introduction de  $\exists$  (la substitution doit être licite) :

$$\frac{\Gamma \vdash A[x \leftarrow t]}{\Gamma \vdash \exists x, A} \exists_i, t$$

- Élimination de  $\exists$  : si  $x$  n'apparaît pas comme variable libre dans  $\Gamma$  ni dans  $B$ ,

$$\frac{\Gamma \vdash \exists x, A \quad \Gamma, A \vdash B}{\Gamma \vdash B} \exists_e$$