

Remarques

- Les exercices sont indépendants. N’importe quelle question peut être faite en supposant les autres résolues.
- Vos preuves doivent être parfaitement lisibles et documentées (en précisant à chaque fois quelle règle ou méta-théorème vous appliquez).
- Vos preuves peuvent être écrites dans l’un ou l’autre des formats vus en cours ; les preuves “en arbre” pouvant facilement devenir volumineuses, il est recommandé de les écrire soigneusement, possiblement en les découpant en plusieurs sous-arbres (de la manière la plus claire possible).
- Le barème est indicatif.
- Le sujet contient ?? pages, dont un aide-mémoire.

Exercice 1 : Logique propositionnelle intuitionniste (4 pts)

Pour les deux séquents suivants, dire s’ils sont démontrables ou non en logique propositionnelle intuitionniste. Si vous affirmez qu’un séquent est démontrable, vous devez en fournir une preuve ; si vous affirmez qu’un séquent n’est pas démontrable, vous devez justifier votre affirmation par des propriétés vues en cours.

$$P \rightarrow Q, Q \rightarrow \sim P \vdash \sim P$$

$$P \rightarrow Q, Q \rightarrow P \vdash P$$

Exercice 2 : Logique propositionnelle classique (6pts)

Les deux séquents suivants sont prouvables en logique propositionnelle classique, mais un seul l’est en logique intuitionniste.

$$P \rightarrow Q \rightarrow R, \sim R \vdash \sim(P \wedge Q).$$

$$P \rightarrow Q \rightarrow R, \sim R \vdash (\sim P) \vee (\sim Q).$$

Donner une preuve classique de l’un, et une preuve intuitionniste de l’autre.

En mobilisant votre connaissance des différences entre la logique intuitionniste et la logique classique, expliquer pourquoi l’un des séquents n’est pas prouvable en logique intuitionniste (on ne demande pas une preuve complète).

Exercice 3 : traduction en formules du premier ordre (4 pts)

On cherche à modéliser une population composée de professeurs et d’étudiants, et les connaissances entre ces personnes. On va donc écrire des formules dont les variables désignent des personnes, au moyen de deux prédicats et d’une relation binaire :

- Professeur(x) énonce que la personne x fait partie des professeurs (peut être abrégée en $P(x)$) ;
 - Etudiant(x) énonce que la personne x fait partie des étudiants (peut être abrégée en $E(x)$) ;
 - Connait(x, y) énonce que la personne x connaît la personne y (peut être abrégée en $C(x, y)$).
- (on autorise également le symbole d’égalité $=$; $x = y$ énonce que x et y sont la même personne)

Traduire par une formule du premier ordre chacun des énoncés suivants :

1. chaque personne est soit étudiant, soit professeur, et pas les deux à la fois ;
2. chaque professeur connaît chaque professeur ;
3. il existe (au moins) un étudiant qui connaît chaque professeur et ne connaît aucun étudiant autre que lui-même ;
4. il existe (au moins) un étudiant qui connaît un et un seul professeur.

Exercice 4 : Logique du premier ordre classique (6 pts)

Question de cours : Rappeler la définition, en termes de variables libres ou liées, de la condition “la substitution doit être licite” dans les règles d’élimination du quantificateur universel (\forall_e) et d’introduction du quantificateur existentiel (\exists_i) (cf. aide-mémoire).

Preuves : Donner une preuve des séquents suivants en logique du premier ordre classique.

$$(\forall x, P(x)) \vee (\forall y, Q(y)) \vdash \forall z, P(z) \vee Q(z)$$

$$\forall x, P(x) \vee Q(x); \exists y, \sim P(y) \vdash \exists z, Q(z)$$

Aide-mémoire

- Règle d'hypothèse :

$$\frac{}{\Gamma, A \vdash A} \text{hyp}$$

- Introduction de \rightarrow :

$$\frac{\Gamma, A \vdash B}{\Gamma \vdash A \rightarrow B} \rightarrow_i$$

- Modus ponens (élimination de \rightarrow) :

$$\frac{\Gamma \vdash A \rightarrow B \quad \Gamma \vdash A}{\Gamma \vdash B} \text{m.p.}$$

- Élimination de \perp :

$$\frac{\Gamma \vdash \perp}{\Gamma \vdash A} \perp_e$$

- Introduction de \sim :

$$\frac{\Gamma, A \vdash \perp}{\Gamma \vdash \sim A} \sim_i$$

- Introduction de \vee :

$$\frac{\Gamma \vdash A}{\Gamma \vdash A \vee B} \vee_{i,1} \quad \frac{\Gamma \vdash B}{\Gamma \vdash A \vee B} \vee_{i,2}$$

- Élimination de \vee :

$$\frac{\Gamma \vdash A \vee B \quad \Gamma, A \vdash C \quad \Gamma, B \vdash C}{\Gamma \vdash C} \vee_e$$

- Introduction de \wedge :

$$\frac{\Gamma \vdash A \quad \Gamma \vdash B}{\Gamma \vdash A \wedge B} \wedge_i$$

- Élimination de \wedge :

$$\frac{\Gamma \vdash A \wedge B \quad \Gamma, A, B \vdash C}{\Gamma \vdash C} \wedge_e \quad \frac{\Gamma \vdash A \wedge B}{\Gamma \vdash A} \wedge_e^g \quad \frac{\Gamma \vdash A \wedge B}{\Gamma \vdash B} \wedge_e^d$$

- Introduction du tiers-exclu :

$$\frac{}{\vdash A \vee \sim A} \text{exm}_i$$

- Introduction de \forall : si x n'apparaît pas comme variable libre dans Γ ,

$$\frac{\Gamma \vdash A}{\Gamma \vdash \forall x, A} \forall_i$$

- Élimination de \forall (la substitution doit être licite) :

$$\frac{\Gamma \vdash \forall x, A}{\Gamma \vdash A[x \leftarrow t]} \forall_{e,t}$$

- Introduction de \exists (la substitution doit être licite) :

$$\frac{\Gamma \vdash A[x \leftarrow t]}{\Gamma \vdash \exists x, A} \exists_{i,t}$$

- Élimination de \exists : si x n'apparaît pas comme variable libre dans Γ ni dans B ,

$$\frac{\Gamma \vdash \exists x, A \quad \Gamma, A \vdash B}{\Gamma \vdash B} \exists_e$$