

Exercices sur la Logique Minimale

Exercice 1. Dessiner la structure des formules suivantes :

1. $P \rightarrow (P \rightarrow Q) \rightarrow Q$
2. $(P \rightarrow Q) \rightarrow (Q \rightarrow R) \rightarrow P \rightarrow R$
3. $(P \rightarrow Q \rightarrow R) \rightarrow Q \rightarrow P \rightarrow R$

Exercice 2. Prouver le séquent suivant (dans les deux formats)

$$P \rightarrow Q \rightarrow R, P \rightarrow Q, P \vdash R$$

(attention à l'associativité droite de \rightarrow !)

Exercice 3. Prouver les séquents suivants (si possible dans les deux formats de preuve).

$$\vdash P \rightarrow P.$$

$$\vdash (P \rightarrow P) \rightarrow (P \rightarrow P)$$

$$\vdash (P \rightarrow Q) \rightarrow (Q \rightarrow R) \rightarrow P \rightarrow R$$

$$P \rightarrow Q \rightarrow R \vdash Q \rightarrow P \rightarrow R$$

$$P \rightarrow R \vdash P \rightarrow Q \rightarrow R$$

$$P \rightarrow P \rightarrow Q \vdash P \rightarrow Q$$

$$P \rightarrow Q, P \rightarrow R, Q \rightarrow R \rightarrow T \vdash P \rightarrow T$$

Exercice 4. Montrer que la généralisation de la règle \rightarrow_i à plusieurs hypothèses est bien une règle dérivée de la logique minimale.

Exercice 5. (*) Montrer que la règle d'affaiblissement est bien une règle dérivée. On pourra procéder par récurrence sur [la taille de] la preuve de $\Gamma \vdash A$

Exercice 6. On considère la Formule de Peirce : $((P \rightarrow Q) \rightarrow P) \rightarrow P$.

Montrer que la formule de Peirce est une tautologie (autrement dit, le séquent $\vdash ((P \rightarrow Q) \rightarrow P) \rightarrow P$ est valide.

Exercice 7. (*) Étendre la notion de substitution aux séquents, de façon à définir la notation $(\Gamma \vdash A)[v_1/B_1, \dots, v_n/B_n]$

Exercice 8. Reprendre si possible les exercices 2 et 3, en utilisant la stratégie de recherche systématique de preuve.

Exercice 9. *Il est difficile de trouver à la main une preuve du séquent suivant :*

$$(((P \rightarrow Q) \rightarrow P) \rightarrow P) \rightarrow Q \vdash Q$$

En revanche, il ne posera pas de problème en séance sur machine.