

Exercices sur la négation en logique minimale

Exercice 1. *Faire des recherches sur Internet sur les termes “ex falso quodlibet sequitur” et “principe of explosion”*

Exercice 2. *Prouver les séquents suivants (en utilisant les deux formats de preuve) :*

- $P \rightarrow Q \vdash \sim Q \rightarrow \sim P$
- $\vdash P \rightarrow \sim P \rightarrow Q$
- $\sim(P \rightarrow Q) \vdash \sim Q$

Exercice 3. *Justifier (par une dérivation) la règle dérivée suivante :*

$$\frac{\Gamma \vdash \sim B \quad \Gamma \vdash B}{\Gamma \vdash A} \textit{ absurde}$$

Exercice 4. *En utilisant la règle **absurde**, prouver le séquent*

$$P \rightarrow Q, P \rightarrow \sim Q \vdash P \rightarrow S$$

Exercice 5. *Prouver les règles dérivées suivantes (une fois prouvées, on pourra les utiliser dans tout raisonnement ultérieur)*

$$\frac{\Gamma, B \vdash A \quad \Gamma \vdash \sim A}{\Gamma \vdash \sim B}$$

$$\frac{\Gamma \vdash A}{\Gamma \vdash \sim \sim A} \textit{ double négation}_i$$

$$\frac{\Gamma \vdash \sim \sim \sim A}{\Gamma \vdash \sim A} \textit{ triple négation}_e$$

Exercice 6. *Le but de cet exercice est de prouver que si l’on peut prouver la formule de Peirce, alors on peut prouver la formule $\sim \sim P \rightarrow P$, et réciproquement.*

1. *Supposons qu’on sache prouver le séquent $\vdash ((P \rightarrow Q) \rightarrow P) \rightarrow P$.*
 - (a) *Montrer qu’on peut alors prouver $\vdash (\sim P \rightarrow P) \rightarrow P$.*
 - (b) *En déduire qu’on peut prouver le séquent $\vdash \sim \sim P \rightarrow P$.*
2. *Réciproquement, supposons que l’on sache prouver $\vdash \sim \sim P \rightarrow P$.*
 - (a) *Prouver $\vdash \sim \sim(((P \rightarrow Q) \rightarrow P) \rightarrow P)$ (preuve pas trop facile).*
 - (b) *En déduire qu’on peut prouver $\vdash ((P \rightarrow Q) \rightarrow P) \rightarrow P$.*

On s’efforcera de justifier chaque étape du raisonnement, soit en appliquant une règle (dérivée ou pas) de la logique intuitionniste, soit en appliquant un méta-théorème qu’il faudra alors citer.

Exercice 7. *Pour chacun des séquents suivants, en écrire une preuve (dans le format de votre choix), **ou** justifier, au moyen d’un méta-théorème et éventuellement d’une preuve partielle, qu’il est prouvable.*

- $P \rightarrow Q, R \rightarrow \sim Q, P \rightarrow R \vdash P \rightarrow S$
- $\sim P \rightarrow \sim Q \vdash \sim \sim Q \rightarrow \sim \sim P$
- $P \rightarrow \sim P \vdash \sim P$
- $\sim \sim P \vdash \sim P \rightarrow \sim Q$
- $P \rightarrow \sim Q, R \rightarrow Q \vdash P \rightarrow \sim R$
- $\sim(P \rightarrow Q) \vdash \sim Q$