

Exercices sur la logique propositionnelle (avec ou sans tiers-exclus)

Exercice 1 (propriétés de la conjonction). *Montrer les règles suivantes :*

$$\frac{}{A \wedge B \vdash B \wedge A} \text{ commutativité de } \wedge$$

$$\frac{}{(A \wedge B) \wedge C \vdash A \wedge (B \wedge C)} \text{ associativité de } \wedge$$

$$\frac{}{A \wedge \perp \vdash \perp} \text{ loi d'absorption de } \wedge$$

Exercice 2. *Prouver les règles dérivées suivantes :*

$$\frac{\Gamma \vdash A \vee B \quad \Gamma \vdash \sim B}{\Gamma \vdash A}$$

$$\frac{}{\sim A \vee B \vdash A \rightarrow B}$$

$$\frac{}{\sim(A \vee B) \vdash \sim A \wedge \sim B} \text{ de Morgan}_1$$

Exercice 3. *Montrer les jugements suivants (qu'on pourra par la suite utiliser comme règles dérivées) :*

$$A \wedge \perp \equiv_J \perp \tag{1}$$

$$A \vee \perp \equiv_J A \tag{2}$$

$$A \vee B \equiv_J B \vee A \tag{3}$$

$$A \wedge B \equiv_J B \wedge A \tag{4}$$

$$A \vee (B \vee C) \equiv_J A \vee B \vee C \tag{5}$$

$$A \wedge (B \wedge C) \equiv_J A \wedge B \wedge C \tag{6}$$

$$A \wedge (B \vee C) \equiv_J A \wedge B \vee A \wedge C \tag{7}$$

$$A \vee B \wedge C \equiv_J (A \vee B) \wedge (A \vee C) \tag{8}$$

$$(A \wedge \sim B) \vdash_J \sim(A \rightarrow B) \tag{9}$$

$$\sim(A \vee B) \equiv_J \sim A \wedge \sim B \text{ [loi de De Morgan]} \tag{10}$$

$$A \rightarrow \sim A \vdash_J \sim A \text{ [reductio ad absurdum]} \tag{11}$$

$$\sim A \rightarrow A \vdash_J \sim \sim A \tag{12}$$

Exercice 4. *L'énoncé suivant est-il vrai ou faux ? Pourquoi ?*

“ Il n'existe aucun séquent $\Gamma \vdash A$ tel qu'on ait à la fois $\Gamma \vdash_J A$ et $\Gamma \vdash_J \sim A$.”

Exercice 5. On considère la variante suivante du théorème de remplacement :

Méta-théorème 1. Si $\Delta \vdash_J A \leftrightarrow B$ et $\Gamma \vdash_J C$, avec $\Delta \subseteq \Gamma$, alors $\Gamma \vdash_J D$, où D est obtenue en remplaçant dans C et Γ une ou plusieurs occurrences de A par B .

Pouvez-vous justifier cette variante ?

Inventez un exemple où le non-respect de la condition $\Delta \subseteq \Gamma$ entraîne la dérivation d'un séquent absurde.

Exercice 6. Prouver en logique propositionnelle classique les règles suivantes :

$$\sim\sim A \vdash A \text{ [élimination de la double négation]} \quad (13)$$

$$\vdash \sim(A \wedge B) \leftrightarrow \sim A \vee \sim B \text{ [loi de de Morgan]} \quad (14)$$

$$\vdash \sim(A \rightarrow B) \leftrightarrow (A \wedge \sim B) \quad (15)$$

$$\vdash (A \rightarrow B) \leftrightarrow (\sim B \rightarrow \sim A) \quad (16)$$

Exercice 7. Dériver la règle suivante (raisonnement par l'absurde en logique classique).

$$\frac{\Gamma, \sim A \vdash \perp}{\Gamma \vdash A} \text{ absurde}$$

Exercice 8. Dériver la règle suivante (élimination du tiers-exclu) en logique classique.

$$\frac{\Gamma, B \vdash A \quad \Gamma, \sim B \vdash A}{\Gamma \vdash A} \text{ exm}_e$$

Exercice 9. Montrer le théorème suivant :

Méta-théorème 2. Soient Γ un contexte et A une proposition, alors $\Gamma \vdash_K A$ si et seulement si $\Gamma \cup \{\sim A\}$ n'est pas satisfaisable.

Exercice 10. Prouver le jugement suivant

$$\sim A \rightarrow A \vdash_K A$$

Aide : On pourra d'abord prouver le jugement

$$\sim A \rightarrow A \vdash_J \sim\sim A$$

puis utiliser l'élimination de la double négation.

Exercice 11. Prouver le jugement suivant

$$\vdash_K (A \rightarrow B) \vee (B \rightarrow A)$$

Remarque : Nous avons là un exemple de jugement prouvable en logique classique, donc valide, mais dont l'intuition nous échappe.

Que veut dire, et surtout comment utiliser l'instance suivante ?

$$\vdash_K (x = 2 \rightarrow x = 3) \vee (x = 3 \rightarrow x = 2)$$

Exercice 12. Soient P et Q deux propositions atomiques.

1. Montrer l'équivalence $(\sim P \rightarrow P) \equiv_J \sim \sim P$.
2. En déduire l'équivalence $(\sim P \rightarrow P) \rightarrow P \equiv_J \sim \sim P \rightarrow P$.
3. (*) En déduire que si la formule de Peirce était prouvable en logique intuitionniste, alors on pourrait prouver l'élimination de la double négation c'est à dire prouver tout jugement de la forme $\sim \sim A \vdash_J A$. On pourra utiliser le théorème de substitution uniforme.
4. Donner une preuve en logique classique de la formule de Peirce :

$$((P \rightarrow Q) \rightarrow P) \rightarrow P$$

5. Donner une preuve en logique intuitionniste du séquent suivant :

$$P \vee \sim P \vdash ((P \rightarrow Q) \rightarrow P) \rightarrow P$$

6. (*) Montrer que si l'on ajoute à la logique intuitionniste la règle d'élimination de la double négation :

$$\frac{\Gamma \vdash \sim \sim A}{\Gamma \vdash A} \text{ double negation}_e$$

Alors, on peut en dériver la règle du tiers exclu.

7. Que peut-on en conclure sur le tiers-exclu, la loi de la double négation et la formule de Peirce ?