

# Logique du premier ordre (calcul des prédicats)

26 novembre 2019

**Exercice 1.** En utilisant les règles associées à l'égalité, prouver la règle de transitivité de l'égalité.

$$\frac{\Gamma \vdash a = b \quad \Gamma \vdash b = c}{\Gamma \vdash a = c}$$

**Exercice 2.** Dans cet exercice, les individus sont les entiers naturels. Compléter la (fausse) preuve suivante : Quelle règle n'a pas été respectée ?

- 1  $\exists x, x = 0$  [exercice]
- 2 { soit  $x$  tel que  $x = 0$
- 3  $x + x = x$  [exercice]
- 4 }
- 5  $x + x = x$  [ $\exists_e, 2, 7$ ]

**Exercice 3.** Prouver les jugements suivants (**Attention à la portée des quantificateurs !**).

$$\forall x P(x) \wedge Q(x) \equiv_J (\forall x P(x)) \wedge (\forall x Q(x)) \quad (1)$$

$$(\forall x, P(x)) \vee (\forall x, Q(x)) \vdash_J \forall x, P(x) \vee Q(x) \quad (2)$$

$$\forall x, P(x) \vee Q(x) \not\vdash_K (\forall x, P(x)) \vee (\forall x, Q(x)) \quad (3)$$

$$\exists x, P(x) \wedge Q(x) \vdash_J (\exists x, P(x)) \wedge (\exists x, Q(x)) \quad (4)$$

$$(\exists x, P(x)) \wedge (\exists x, Q(x)) \not\vdash_K \exists x, P(x) \wedge Q(x) \quad (5)$$

$$\exists x, P(x) \vee Q(x) \equiv_J (\exists x, P(x)) \vee (\exists x, Q(x)) \quad (6)$$

$$\forall x, P(x) \rightarrow Q(x), \quad \exists x, P(x) \vdash_J \exists x, Q(x) \quad (7)$$

$$\vdash_J \forall x, (P(x) \rightarrow \exists y, P(y)) \quad (8)$$

$$\sim(\forall x, P(x)) \equiv_K \exists x, \sim P(x) \quad (9)$$

$$\sim(\exists x, P(x)) \equiv_J \forall x, \sim P(x) \quad (10)$$

$$(\exists x, P(x)) \rightarrow Q \equiv_J \forall x, P(x) \rightarrow Q \quad (11)$$

$$\exists x, \forall y, Q(x, y) \vdash_J \forall y, \exists x, Q(x, y) \quad (12)$$

$$\forall y, \exists x, Q(x, y) \not\vdash_K \exists x, \forall y, Q(x, y) \quad (13)$$

**Exercice 4.** Démontrer en logique classique le paradoxe du buveur :

“Soit un café avec au moins une personne (par exemple le patron).  
Alors, il existe une personne dans ce café qui, si elle boit, alors tout  
le monde boit”

On considère un univers dont les individus sont les personnes présentes dans le café, et une constante *patron*. On suppose également qu'on dispose d'un prédicat *boit*.

Il s'agit alors de montrer le jugement

$\vdash_K \exists c, \text{boit}(c) \rightarrow \forall x, \text{boit}(x)$ .

**Aide :** On pourra utiliser le tiers-exclu avec la proposition  $\forall x, \text{boit}(x)$ .

**Exercice 5.** On peut exprimer que l'univers est vide par la proposition  $\text{vide} =_{\text{def}} \forall x, x \neq x$  (Rappelons que  $\neq$  n'est pas un nouveau symbole :  $a \neq b$  est simplement un raccourci pour  $\sim(a = b)$ , soit  $(a = b) \rightarrow \perp$ .)

Montrer les jugements :

$$\text{vide} \vdash_J \forall x, P(x) \tag{14}$$

$$\sim \text{vide}, \forall x, P(x) \vdash_K \exists x, P(x) \tag{15}$$

$$\forall x y, x \neq y \vdash_J \text{vide} \tag{16}$$

**Exercice 6.** Montrer que le séquent  $\forall x, P(x) \vdash \exists x, P(x)$  n'est pas prouvable en logique classique, ni en logique intuitionniste. **Aide :** Revoir l'exercice 5.

**Exercice 7.** On considère le contexte  $\Gamma$  formé des axiomes suivants (où  $<$  et  $\leq$  sont supposés représenter deux symboles de relations binaires, écrites de manière infixé; on peut les remplacer par des symboles classiques  $L$  et  $L'$ , et noter  $L(a, b)$  à la place de  $a < b$  et  $L'(a, b)$  à la place de  $a \leq b$ ) :

$$\begin{aligned} &\forall x, \sim x < x \\ &\forall x y z, x < y \rightarrow y < z \rightarrow x < z \\ &\forall x y, x \leq y \leftrightarrow x < y \vee x = y \end{aligned}$$

Montrer que de  $\Gamma$  on peut déduire les propositions suivantes :

$$\begin{aligned} &\forall x, x \leq x \\ &\forall x y, x \leq y \rightarrow y \leq x \rightarrow x = y \\ &\forall x y z, x \leq y \rightarrow y \leq z \rightarrow x \leq z \end{aligned}$$