

Probabilités, Statistiques, Combinatoire : Devoir surveillé

7 mars 2018 – durée 1h20

Document autorisé : une feuille A4 manuscrite - Calculatrices autorisées

Les différents exercices sont indépendants. Il est important de justifier toutes vos réponses ; chaque fois que vous calculez une probabilité ou une probabilité conditionnelle, ou que vous interprétez l'énoncé d'un exercice en termes de probabilités ou de probabilités conditionnelles, faites-le le plus explicitement possible.

Il est rappelé que “décrire la loi d'une variable aléatoire” peut se faire de deux manières : soit en décrivant l'ensemble des valeurs possibles et, pour chacune d'elles, sa probabilité ; soit, quand la loi possède un nom standard, en donnant le nom (et, le plus souvent, un ou deux paramètres). L'un comme l'autre est acceptable ici.

Barème indicatif : 3, 3, 7, 7 points respectivement pour les exercices 1 à 4.

Exercice 1.1

Sur la route que suit Alice de chez elle à l'université, elle traverse quatre carrefours munis de feux de circulation. Pour chaque feu, 25% du temps le feu est vert, 75% du temps il est rouge (on néglige l'orange). On suppose que les feux sont indépendants.

Notons X la variable aléatoire qui compte le nombre de feux verts passés avant d'arriver au premier feu rouge ou à l'université (le feu rouge n'est pas compté). Quelles sont les valeurs possibles de X ? Donner la loi de X , et calculer $\mathbb{E}(X)$.

Exercice 1.2

Un serveur est 95% du temps dans un état d'attente ; 4% du temps il y a un administrateur connecté pour faire des mises à jour ; et 1% du temps il est soumis à une attaque. Pour simplifier, on suppose que le même état dure une heure complète.

Au cours d'une heure, la probabilité que le serveur tombe en panne s'il est en état d'attente est de 0.001 ; pendant une mise à jour, elle est de 0.1 ; pendant une attaque, elle est de 0.7. On constate que le serveur est tombé en panne entre 11h et midi. On cherche à savoir “à quoi est due la panne”. Plus précisément, quelle est la probabilité que la panne se soit produite pendant une attaque ? Pendant une mise à jour ?

Exercice 1.3

Considérons une pièce de monnaie biaisée, avec probabilité p de tomber côté Face. On fait l'expérience suivante : on lance la pièce jusqu'à obtenir Face pour la première fois, et on note X le nombre total de lancers. Puis, on utilise une seconde pièce de monnaie, non biaisée, pour ajouter un signe (± 1) à X , et on note Y le résultat ; c'est-à-dire qu'on a, pour tout entier $k > 0$, $\mathbb{P}(Y = k | X = k) = \mathbb{P}(Y = -k | X = k) = 1/2$.

1. Donner la loi de X .
2. Donner, pour tout couple d'entiers positifs ou nuls (x, y) , $\mathbb{P}((X, Y) = (x, y))$ (ne pas oublier de préciser pour quels couples cette probabilité est nulle).
3. Donner la loi de Y .

4. Calculer l'espérance de X et celle de Y .
5. Montrer que l'on a $\mathbb{E}(XY) = \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y)$. *Que vous ayez ou non réussi à faire cette question et la précédente, il est possible de résoudre les deux dernières.*
6. Montrer que $\mathbb{P}((X, Y) = (1, 2)) \neq \mathbb{P}(X = 1)\mathbb{P}(Y = 2)$.
7. Est-ce qu'on peut déduire des questions précédentes que X et Y sont des variables aléatoires indépendantes ?

Exercice 1.4

À une foire, Alice, Bob, et 98 autres personnes (100 personnes au total) participent à un jeu de hasard. Chacun doit tirer une boule d'une urne qui contient 4 boules noires et une boule blanche. Un joueur qui tire une boule noire ne gagne rien ; un joueur qui tire la boule blanche gagne un lot, lequel est déterminé en faisant tourner une roue : la roue a 70% de chances de s'arrêter sur le lot "boîte de chocolats", 20% de chances de s'arrêter sur le lot "barbapapa", et 10% de chances de s'arrêter sur le lot "peluche géante" (à chaque fois qu'on fait tourner la roue, elle désigne un et un seul lot). On suppose que les tours de roue sont indépendants, ainsi que les tirages de boules (et que les tours de roue sont indépendants des tirages de boules).

1. Pour Bob, quelle est la probabilité de gagner un lot quelqu'il soit ? La probabilité de gagner une peluche géante ?
2. On note N_C la variable aléatoire qui compte les joueurs qui gagnent une boîte de chocolats ; N_B celle qui compte les joueurs gagnant une barbapapa ; et N_P celle qui compte les joueurs qui gagnent une peluche géante.
Déterminer la loi de N_C , celle de N_B , et celle de N_P , et leurs espérances respectives.
3. On pose $N = N_C + N_B + N_P$. Que représente la variable aléatoire N ? Quelle est sa loi ?
4. Les variables aléatoires N_B et N_P sont-elles indépendantes ?