

Probabilités, Statistiques, Combinatoire : TD1

Mise en bouche

Cette première feuille de TD a volontairement lieu avant la première séance de cours ; il s'agit de dégager, autant que possible, les “règles” que devraient suivre des notions de “probabilité”. On cherche donc à évaluer les “chances” que quelque chose d'incertain se produise, soit sous la forme d'un pourcentage (de 0% à 100%) soit sous la forme d'une “probabilité” (de 0 à 1).

Exercice 1.1

Imaginons la situation suivante : on lance un dé, et on note le résultat. Proposer une valeur pour la probabilité de chacune des possibilités suivantes :

- obtenir 1
- obtenir 2
- obtenir un nombre autre que 1
- obtenir un résultat strictement supérieur à 2
- obtenir un nombre pair

Comparez les valeurs que vous avez proposées à celles de vos voisins. Si vous n'êtes pas d'accord, discutez-en et expliquez-vous réciproquement comment vous êtes arrivés à ces valeurs.

Exercice 1.2

On lance maintenant deux dés, un rouge et un bleu, simultanément. Même question que précédemment, pour les descriptions suivantes :

- obtenir un 1 sur chaque dé
- obtenir un 1 rouge et un 2 bleu
- obtenir un 2 rouge et un 1 bleu
- que la somme des deux résultats soit égale à 3
- que la somme des deux résultats soit paire

Exercice 1.3

On lance maintenant deux dés identiques (ils sont de même couleur, même poids, il est impossible de les distinguer). Proposer des probabilités pour les possibilités suivantes :

- obtenir un 1 et un 2
- obtenir un double (les résultats des deux dés sont identiques)
- que la somme des deux résultats soit égale à 5
- que la somme des deux résultats soit paire

Exercice 1.4

Une urne contient 6 boules, indistinguables au toucher : 2 blanches et 4 noires. On en tire une, sans regarder sa couleur, puis une autre. De nouveau, proposer une valeur pour les probabilités suivantes :

- probabilité que la première boule soit blanche

- probabilité que la seconde boule soit noire
- probabilité que la première boule soit blanche, et la seconde, noire
- probabilité qu'on obtienne au moins une boule noire
- probabilité qu'on obtienne au moins une boule blanche

Dans la même urne (où on a remis les deux boules précédentes), on tire cette fois trois boules, d'un seul coup. Proposer des valeurs pour :

- probabilité que l'on n'obtienne que des boules noires
- probabilité que l'on n'obtienne que des boules blanches
- probabilité que l'on obtienne au moins une boule de chaque couleur

On reprend toujours la même urne (avec ses boules d'origine), et on fait l'expérience suivante : on tire une première boule, qu'on met de côté sans la regarder ; puis une seconde boule, qu'on regarde.

Dans cette situation, peut-on évaluer facilement la probabilité que la seconde boule (celle qu'on regarde) soit blanche ?

Exercice 1.5

On dispose d'une pièce de monnaie, et on joue à pile ou face avec, selon la règle suivante : on la lance, on regarde le résultat ("Pile" ou "Face"), et si le résultat est Pile, on relance, jusqu'à obtenir Face. On compte le nombre total de lancers qu'on effectue.

- quelle est la probabilité de s'arrêter au bout d'exactly un lancer ? au bout d'exactly deux lancers ?
- quelle est la probabilité que le nombre de lancers soit d'au moins 5 ?
- quelle est la probabilité que le nombre de lancers soit un nombre impair ? un nombre multiple de 3 ?

Exercice 1.6

Il est peut-être temps de récapituler...

- De quoi est-ce qu'il est *légitime* de prétendre calculer la probabilité ?
- Proposer un ensemble de règles, aussi complet et aussi général que possible, que devrait satisfaire un système de calcul de probabilités.

Exercice 1.7

Cet exercice a pour but de s'interroger sur ce que cela signifie quand on apprend une affirmation sur une probabilité, et ce que l'on peut en déduire.

La planète Zorclub a deux types d'habitants, bien distinguables : les bleus et les verts. Les habitants sont également catalogués comme riches ou pauvres – il n'y a pas d'intermédiaires.

- Vous apprenez que, sur la planète Zorclub, un bleu a 90% de chances d'être pauvre. Pouvez-vous en déduire qu'il y a une inégalité sociale liée à la couleur sur Zorclub ?
- Vous apprenez que, sur la planète Zorclub, un bleu a 90% de chances d'être pauvre, **et** un pauvre a 90% de chances d'être bleu. Pouvez-vous en déduire qu'il y a une inégalité sociale liée à la couleur sur Zorclub ?
- On se place dans la situation décrite à la question précédente. On apprend par ailleurs que la proportion, parmi la population totale, de bleus, est p . Discuter de la situation, en fonction de la valeur de p ($0 < p < 1$).