

Probabilités, Statistiques, Combinatoire : TD2

Manipulation d'ensembles

Exercice 2.1

On suppose qu'on dispose d'un univers de probabilités Ω , sur lequel sont définis des événements A , B et C . Exprimer, au moyen d'unions, intersections, et d'exclusions (\setminus), les événements suivants ; puis, si possible, exprimer ces mêmes événements comme *unions disjointes*. On pourra aussi utiliser la notation \bar{A} pour le complémentaire de A , i.e. $\Omega \setminus A$.

1. D : A et B se produisent.
2. E : A se produit, mais pas B .
3. F : A et B se produisent, mais pas C .
4. G : Au moins deux événements parmi A , B et C se produisent.
5. H : Exactement un des trois événements A , B , C se produit.

Exercice 2.2

Comme précédemment, on suppose donné un univers, et définis une famille infini $(A_i)_{i \in \mathbb{N}}$ d'événements. Exprimer, au moyen d'unions, intersections (possiblement infinies), et exclusions, les événements suivants :

1. B : au moins un des événements A_i se produit.
2. C : tous les événements A_i se produisent.
3. D_n : au moins un des événements A_i , pour $i \geq n$, se produit.
4. E_n : tous les événements A_i , pour $i \geq n$, se produisent.
5. F : une infinité d'événements A_i se produisent (**Indication** : on pourra justifier, et utiliser, la remarque suivante : un ensemble I d'entiers est infini **si et seulement si**, pour tout n , I contient au moins un entier plus grand que n).

Exercice 2.3

1. On tire une pièce non-biaisée une fois à pile ou face. Quel est l'univers de probabilités Ω pour ce problème ?
2. On tire la même pièce deux fois à pile ou face. Quel est l'univers de probabilité Ω_2 pour ce problème ?
3. Que vaut l'ensemble $\text{Parties}(\Omega_2)$? Combien $\text{Parties}(\Omega_2)$ a-t-il d'éléments ?
4. Comment noter de façon ensembliste l'événement E_1 : "on a tiré pile la première fois" ? Quelle est la probabilité de cet événement ? (Rappelez-vous qu'un événement est défini comme un élément de $\text{Parties}(\Omega_2)$)
5. Comment noter de façon ensembliste l'événement E_2 "on a tiré pile au moins une fois" ? Quelle est la probabilité de cet événement ?

6. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On tire la même pièce à pile ou face n fois. Décrire l'univers de probabilité Ω_n comme un produit d'ensembles.
7. Écrire de façon ensembliste l'événement F : "pile n'a pas été obtenu lors des 2 premiers lancers".
8. Soit $i \in \{1, \dots, n\}$. Décrire les éléments de l'événement G_i : "le résultat du i -ième lancer est pile".
9. Écrire à l'aide des événements G_i l'événement F .
10. Écrire à l'aide des événements G_i l'événement H : "la pièce est tombée au moins une fois sur pile".
11. Écrire à l'aide des ensembles G_i l'événement J : "la pièce est tombée au moins deux fois sur pile".

Exercice 2.4

Cet exercice a pour but d'explorer la notion d'ensemble dénombrable, ainsi que l'argument historique permettant de montrer que certains ensembles ne sont **pas** dénombrables.

On rappelle qu'un ensemble infini E est **dénombrable** s'il existe une **bijection** de \mathbb{N} vers E , c'est-à-dire une fonction $f : \mathbb{N} \rightarrow E$ telle que, pour tout élément x de E , il existe un et un seul entier n tel que $x = f(n)$.

1. Montrer que \mathbb{Z} est dénombrable en exhibant une bijection entre \mathbb{N} et \mathbb{Z} .
2. Montrer que $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ est dénombrable, en exhibant une bijection.
3. On va maintenant montrer que l'intervalle $[0, 1]$ n'est pas dénombrable; pour cela, on va prouver que, pour toute fonction $f : \mathbb{N} \rightarrow [0, 1]$, il existe au moins un nombre $x \in [0, 1]$ tel qu'aucun entier n ne satisfait $f(n) = x$.

Soit f une fonction quelconque de \mathbb{N} dans $[0, 1]$; pour un entier n quelconque, on définit un chiffre décimal (entier entre 0 et 9) b_n de la manière suivante : soit $x_n = f(n)$, et soit a_n le $(n + 1)$ -ème chiffre après la virgule dans l'écriture décimale de x_n ; on pose alors $b_n = 1 + a_n$ si $a_n \leq 7$, et $b_n = 0$ si $a_n = 8$ ou $a_n = 9$. Enfin, on définit x comme le nombre réel qui, pour tout n , a comme $(n + 1)$ -ème chiffre décimal après la virgule, b_n .

4. Montrer que, pour tout n , $x \neq f(n)$.
5. Conclure!