

Probabilités, Statistiques, Combinatoire : TD3

Probabilités conditionnelles, variables aléatoires discrètes

Exercice 3.1

(**Salon de coiffure**) Dans un salon de coiffure, la clientèle est formée à 60% de femmes et 40% d'hommes. Les chevelures sont longues ou courtes, et 30% des femmes ont les cheveux courts, 10% des hommes ont les cheveux longs.

1. On considère l'expérience consistant à "examiner" un client du salon de coiffure "au hasard", et on définit les événements suivants : "le client est un homme" (H) ; "le client est une femme" (F) ; "le client a les cheveux courts" (C) ; "le client a les cheveux longs" (L).
Sans essayer de décrire d'univers, y a-t-il, parmi ces 4 événements, des couples qu'on peut considérer comme incompatibles ? comme indépendants ?
2. Interpréter les données chiffrées de l'énoncé comme des probabilités et des probabilités conditionnelles.
3. Calculer la probabilité qu'un client ait les cheveux courts.
4. Calculer la probabilité qu'un client soit une femme sachant qu'il a les cheveux longs.
5. Si vous avez l'habitude de calculer des probabilités au moyen d'arbres, refaire les deux questions précédentes en utilisant un arbre.

Exercice 3.2

(La situation décrite dans cet exercice correspond à un exercice de la semaine 1 ; l'objectif est ici de le reprendre, en utilisant le formalisme vu en cours)

Une urne contient 6 boules, indistinguables au toucher : 2 blanches et 4 noires. On en tire une, sans regarder sa couleur, puis une autre.

1. Proposer **deux** espaces de probabilités pour modéliser cette expérience : l'un aura comme univers $\{b_1, b_2, n_1, n_2, n_3, n_4\}^2$, avec une loi de probabilités à préciser ; l'autre sera choisi de manière à ce que la loi de probabilités rendant compte de l'expérience soit la loi uniforme.
2. Soit B_1 l'événement "la première boule tirée est blanche". Dans vos deux univers, décrire B_1 et calculer sa probabilité. Comparer à votre réponse de la semaine 1.
3. Soit N_2 l'événement "la seconde boule tirée est noire". Décrire N_2 dans vos deux univers, et calculer sa probabilité. Comparer à la semaine 1.
4. Calculer la probabilité conditionnelle de N_2 sachant B_1 . Les événements B_1 et N_2 sont-ils indépendants ? Incompatibles ?
5. Soit N l'événement "on tire au moins une boule noire". Exprimer N au moyen des événements N_1 et B_2 . Calculer sa probabilité, de plusieurs manières différentes.
6. Soit X la variable aléatoire "nombre de boules noires tirées". Décrire X sur chacun de vos deux univers de probabilités. Quelles sont les valeurs possibles de X ? Déterminer la loi de X .

Exercice 3.3

On dispose de trois jetons de couleur : un a deux côtés blancs, un a deux côtés noirs, et un a un côté blanc et un côté noir. On tire un des trois jetons “au hasard” (uniformément), et on le pose d’un côté “aléatoire” (uniforme).

Essayez de résoudre cet exercice d’abord sans définir explicitement d’espace de probabilités.

1. Quelle est la probabilité que le jeton choisi ait ses deux faces de la même couleur ?
2. Quelle est la probabilité que la face cachée soit blanche ?
3. La face visible est blanche ; quelle est la probabilité que la face cachée soit blanche ?
On modélise maintenant proprement la situation au moyen d’un univers $\{A, B, C\} \times \{1, 2\}$; le choix d’une lettre désigne le jeton, celui d’un entier la face (le jeton A a ses deux faces blanches ; le jeton B a sa face 1 blanche, et sa face 2 noire ; et le jeton C a ses deux faces noires).
4. Sur cet univers, quelle loi de probabilité est suggérée par l’énoncé ?
5. Répondre de nouveau aux trois premières questions, en décrivant explicitement les événements considérés et les probabilités (ou probabilités conditionnelles) calculées.

Exercice 3.4

On lance deux dés classiques, à 6 faces, équilibrés. On suppose que les deux dés sont distinguables (par exemple, “le premier” est rouge, “le second” est blanc).

1. On définit X_1 comme la variable aléatoire “résultat du premier dé”, et X_2 comme la variable aléatoire “résultat du second dé”. Déterminer la loi de X_1 , et la loi de X_2 .
2. On définit la variable aléatoire $X_3 = X_1 + X_2$. Quelle est son interprétation ? Déterminer la loi de X_3 .
3. On remplace le premier dé par un dé à 4 faces (tétraèdre régulier), et le second par un dé à 8 faces (octaèdre régulier). On définit de nouveau X_1 , X_2 et X_3 comme précédemment. Déterminer les nouvelles lois de X_1 , X_2 et X_3 .

Exercice 3.5

On considère un espace de probabilités (Ω, \mathbb{P}) (qu’il n’est pas question ici d’expliciter), sur lequel on suppose qu’on a défini deux variables aléatoires X et Y à valeurs dans \mathbb{N} . On définit alors $Z = X + Y$ comme variable aléatoire à valeurs également dans \mathbb{N} .

1. On suppose connues les lois de X et de Y : notons, pour chaque entier k , $p_k = \mathbb{P}(X = k)$ et $q_k = \mathbb{P}(Y = k)$. On suppose également que X et Y sont **indépendantes** (notion non encore définie en cours : cela signifie que, pour tous entiers k et ℓ , les événements $(X = k)$ et $(Y = \ell)$ sont indépendants).

Montrer que ces informations permettent de déterminer la loi de Z ; donner une formule générale pour $\mathbb{P}(Z = k)$.

2. Si l’on ne suppose pas que X et Y sont indépendantes, mais qu’on suppose connue, pour tout k et tout ℓ , la quantité $p_{k,\ell} = \mathbb{P}(X = k \text{ et } Y = \ell)$, donner une formule pour $\mathbb{P}(Z = k)$.