

Probabilités, Statistiques, Combinatoire : TD4

Calculs de lois et d'espérances

Exercice 4.1

On considère deux variables aléatoires X et Y , dont la loi jointe (loi du couple (X, Y)) est définie par le tableau suivant :

$Y \backslash X$	1	2	3
1	0.2	0.1	0.2
2	0.3	0.15	0.05

1. Les variables X et Y sont-elles indépendantes ?
2. Calculer l'espérance de X et celle de Y .
3. Calculer la loi de $X + Y$.
4. Calculer l'espérance de $X + Y$, et de $X - Y$.

Exercice 4.2

Un jeu possible de casino est le suivant : le joueur paie 1 euro pour jouer une partie, et lance trois dés (équilibrés, à 6 faces) ; son gain G est alors déterminé en fonction du nombre N de 6 obtenus sur les trois dés :

- si $N = 0$, il ne gagne rien ($G = 0$) ;
- si $N = 1$ ou $N = 2$, il gagne 2 euros ($G = 2$) ;
- si $N = 3$, il gagne 20 euros ($G = 20$).

1. Déterminer la loi de N , ainsi que celle de G .
2. Déterminer l'espérance de G .
3. Par quelle valeur faudrait-il remplacer le gain lorsque $N = 3$, pour que le jeu devienne "équitable" (au sens où l'espérance de gain serait égale à la mise, soit 1) ?

Exercice 4.3

Le jeu "Tapis vert" était un jeu télévisé de la Française des Jeux, similaire au précédent : le joueur choisissait, sur une grille, une carte de chaque couleur (Pique, Coeur, Carreau, Trèfle) d'un jeu de 32 cartes ; puis, lors d'un tirage aléatoire télévisé quotidien, une carte de chaque couleur était tirée, et le gain de chaque joueur était déterminé de la manière suivante : un joueur ayant trouvé 2 des 4 cartes gagnait 2 fois sa mise ; un joueur ayant trouvé 3 des 4 cartes, gagnait 30 fois sa mise ; et un joueur ayant trouvé les 4 cartes, gagnait 1000 fois sa mise.

1. Déterminer, pour une mise de 1 franc (on parle des années 1980-90!), l'espérance de gain. Le jeu, tel qu'il est défini, est-il plutôt favorable au joueur, ou à l'organisateur du jeu ?
2. Quelle est la probabilité qu'un tirage donné donne une combinaison donnée ? Qu'une combinaison donnée sorte au moins une fois en N tirages ?

3. Il se trouve qu'après environ deux ans d'existence du jeu, une combinaison "carré d'As" est sortie, coûtant une fortune à la Française des Jeux. Commenter cette situation : où se trouve l'erreur de conception dans ce jeu (du point de vue de l'organisateur) ?

Exercice 4.4

On rappelle la formule donnant la somme des n premiers termes d'une suite géométrique : si $u_n = a.r^n$ pour tout $n \geq 0$ (avec $r \neq 1$), alors

$$\sum_{k=0}^{n-1} u_k = a \frac{1 - r^n}{1 - r}.$$

Pour un paramètre p ($0 < p < 1$), on dit qu'une variable aléatoire X suit la *loi géométrique de paramètre p* si on a, pour tout entier $k > 0$:

$$p_k = \mathbb{P}(X = k) = (1 - p)^{k-1} p.$$

- Donner une formule, en fonction de n et p , pour $s_n = \sum_{k=1}^n p_k$. Quelle est la limite de s_n quand n tend vers $+\infty$? Quelle valeur doit-on donner à p_0 pour avoir $\sum_{k=0}^{+\infty} p_k = 1$? (la valeur de la somme infinie est définie comme la limite des sommes jusqu'à $k = n$, quand n tend vers l'infini)
- On suppose que les variables aléatoires X et Y sont indépendantes, et respectivement les lois géométriques de paramètre p et q . Déterminer, en fonction de n , p et q , la probabilité des événements suivants :

$$(i)\{X > n\} \qquad (ii)\{X \leq n\} \qquad (iii)\{X > n \text{ et } Y > n\}$$

- On pose $M = \min(X, Y)$. En décrivant astucieusement l'événement $\{M > n\}$, et en utilisant les résultats de la question précédente, déterminer la fonction de répartition de M , et la loi de M .
- On interprète classiquement la loi géométrique de paramètre p de la manière suivante : c'est le nombre total de "tirages" qu'on doit faire jusqu'au premier tirage "réussi", si les tirages sont indépendants et ont chacun probabilité p de réussir. Au vu de cette interprétation, retrouver le résultat de la question précédente.

Exercice 4.5

La "loi uniforme sur $[0, 1]$ " est une loi de probabilités \mathbb{U} sur l'ensemble (infini, et non dénombrable) $[0, 1]$, et qui a la propriété suivante : pour tout intervalle $[a, b]$ avec $0 \leq a \leq b \leq 1$, $\mathbb{U}([a, b]) = b - a$. On ne s'interrogera pas ici sur la façon de prouver qu'une telle loi existe ; on l'admettra.

On se donne n réels p_1, p_2, \dots, p_n , qui satisfont les conditions suivantes : pour tout i , $p_i \geq 0$, et $p_1 + \dots + p_n = 1$.

- On définit $s_0 = 0$ et, pour chaque entier k avec $1 \leq k \leq n$, $s_k = \sum_{i=1}^k p_i$. Calculer la suite $(s_k)_{0 \leq k \leq 10}$ pour $(p_k)_{1 \leq k \leq 10} = (0, 0.1, 0.3, 0.2, 0.05, 0.05, 0, 0.1, 0.15, 0.05)$.
- Pour chaque entier k , $1 \leq k < n$, on définit l'intervalle $I_k = [s_{k-1}, s_k[$ (et $I_n = [s_{n-1}, 1]$), de telle sorte que les intervalles forment une partition de $[0, 1]$). Puis, en supposant que U est une variable aléatoire uniforme sur $[0, 1]$, on définit la variable aléatoire K de la manière suivante : K est l'unique entier k tel que l'on ait $U \in I_k$.

Déterminer la loi de K , d'abord pour la suite (p_k) de la question précédente, puis dans le cas général.