

Probabilités, Statistiques, Combinatoire : TD5

Autour des lois usuelles

Exercice 5.1

Minimum de géométriques

On considère deux variables aléatoires G_1 et G_2 , indépendantes ; G_1 suit la loi géométrique de paramètre p , et G_2 , la loi géométrique de paramètre q .

1. Déterminer, en fonction de $k \in \mathbb{N}$, la probabilité des événements $A_k = \{G_1 > k\}$ et $B_k = \{G_2 > k\}$.
2. On définit la variable aléatoire $G = \min(G_1, G_2)$. Déterminer la probabilité de l'événement $C_k = \{G > k\}$; en déduire une description la plus concise possible de la loi de G .
3. En mobilisant vos connaissances sur l'indépendance de variables aléatoires, ainsi que sur ce que représente la loi géométrique, retrouvez sans calculs le résultat précédent.
4. Un étudiant indécis triche à son test hebdomadaire chaque semaine, dans deux UE. Chaque semaine, il a 2 chances sur 5 d'être repéré dans la première UE, et 3 chances sur 10 dans la seconde (l'enseignant est moins soupçonneux). On suppose que ce qui se passe dans un test est indépendant de ce qui se passe dans tous les autres tests. En négligeant le fait qu'il n'y ait qu'un nombre limité de semaines de cours, quelle est le nombre moyen de semaines avant que l'étudiant ne se fasse repérer dans l'UE 1 ? Dans l'UE 2 ? Avant qu'il ne se fasse repérer dans l'UE 1 ou l'UE 2 ?

Exercice 5.2

Bouillabaisse (ajout de Poisson)

On rappelle l'identité dite du binôme de Newton : pour a et b des réels quelconques, et n un entier naturel quelconque, on a

$$(a + b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k b^{n-k},$$

où $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$ désigne le coefficient binomial (d'où le nom !).

On considère deux variables aléatoires indépendantes P_1 et P_2 , toutes deux suivant une loi de Poisson ; P_1 est de paramètre x_1 , et P_2 de paramètre x_2 . On définit ensuite $P = P_1 + P_2$.

1. Quelle est l'espérance de P ?
2. On définit, pour tout entier naturel k , les événements $A_k = \{P_1 = k\}$ et $B_k = \{P_2 = k\}$. Rappeler (en fonction de j et k) les probabilités des événements A_j , B_k et $C_{j,k} = A_j \cap B_k$.
3. Considérons deux des événements $C_{j,k}$ et $C_{\ell,m}$, avec $(j, k) \neq (\ell, m)$. Ces deux événements sont-ils indépendants ? incompatibles ?
4. Pour un entier naturel n quelconque, écrire l'événement $D_n = \{P = n\}$ en fonction des événements $C_{j,k}$. En déduire une formule sous forme de somme pour la probabilité de D_n .

5. En utilisant la formule du binôme, montrer que P suit une loi de Poisson.
6. (**Cette question peut être faite sans avoir fait la question précédente**) Déterminer, sans calculs, le paramètre de P en tant que variable de Poisson (deux preuves élémentaires sont possibles, si on admet que P est une variable de Poisson).

Exercice 5.3

Amnésie

On considère une variable aléatoire G , de loi géométrique de paramètre p .

1. Pour deux entiers n et k quelconques, déterminer $\mathbb{P}(G = n + k)$, $\mathbb{P}(G > k)$, et en déduire $\mathbb{P}(G = n + k | G > k)$.
2. Décrire le plus concisément possible la loi de $G - k$ sachant $G > k$.
3. L'étudiant indéclicat de l'exercice 1 constate qu'au bout de 5 semaines, il n'a encore jamais été repéré. Sachant cela, quel est, en moyenne, le nombre total de semaines avant qu'il soit finalement repéré ?

La propriété mise en évidence par cet exercice est parfois appelée *absence de mémoire* de la loi géométrique.

Exercice 5.4

Insecte et Poisson

Pour cet exercice, on admet la formule suivante, valable pour tout nombre réel t :

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} = e^t.$$

Un insecte pond des oeufs. Le nombre d'oeufs pondus est une variable aléatoire X suivant une loi de Poisson de paramètre $x > 0$. Chaque oeuf a une probabilité p d'éclore, indépendamment des autres oeufs. Soit Z le nombre d'oeufs qui éclosent.

1. Pour $(k, n) \in \mathbb{N}^2$, déterminer $P(Z = k | X = n)$.
2. Utiliser la formule des probabilités totales pour en déduire une formule sous forme de somme infinie, pour la probabilité de l'événement $\{Z = k\}$.
3. En utilisant la formule donnée en préambule, déterminer la loi de Z .
4. Quelle est l'espérance de Z ?
5. On note Z' le nombre d'oeufs non éclos. Quelle est la loi de Z' ? Déterminer $\mathbb{P}(Z = k \text{ et } Z' = k')$, en fonction de k et k' . Qu'en déduit-on sur Z et Z' ?