

Probabilités, Statistiques, Combinatoire : TD5

Combinatoire énumérative

Exercice 6.1

Formation d'équipes

1. À partir d'un groupe de 7 filles et 13 garçons, combien d'équipes paritaires (comportant autant de filles que de garçons) de beach volley (4 personnes) peut-on former ? De volley (6 personnes) ?
2. Généraliser : à partir d'un groupe de n filles et m garçons, combien d'équipes paritaires de $2k$ personnes peut-on former ?
3. Un groupe de 4 filles et 10 garçons veut jouer au volley, en formant deux équipes de 2 filles et 4 garçons chacune (il restera deux arbitres). De combien de façons peut-on former les équipes ?

Exercice 6.2

Anagrammes On appelle *anagramme* d'un mot (ou d'une séquence de mots), tout mot ou séquence de mots qui utilise les mêmes lettres, chacune le même nombre de fois que le mot original. La recherche d'anagrammes ayant un sens dans une langue donnée est un passe-temps littéraire ; du point de vue de la combinatoire, on s'affranchit de la contrainte "avoir un sens".

Par exemple, le mot AABB a un total de 6 anagrammes (lui-même compris) : AABB, ABAB, ABBA, BAAB, BABA et BBAA (le nombre d'anagrammes ayant un sens dépend de votre degré de familiarité avec la musique disco suédoise).

1. On vient de voir que le mot BABA possédait 6 anagrammes. Trouver un argument simple pour justifier que le mot BABAR en possède 30.
2. Dans le cas où le mot de départ ne comporte que deux lettres distinctes, montrer que le nombre d'anagrammes peut s'exprimer comme un coefficient binomial $\binom{n}{k}$ avec n et k faciles à déterminer. En revenant à la définition vue en cours des coefficients binomiaux, trouver une bijection explicite entre les anagrammes d'un mot quelconque n'utilisant que deux lettres distinctes, et les parties à k éléments d'un ensemble à n éléments.
3. Dans le cas où le mot de départ possède 3 lettres distinctes, montrer que son nombre d'anagrammes peut s'écrire comme le produit de deux coefficients binomiaux. Réécrire ce produit de coefficients binomiaux comme quotient de deux nombres, chacun étant un produit de factorielles.
4. Généraliser les formules obtenues pour obtenir le nombre d'anagrammes d'un mot quelconque, en fonction de son nombre k de lettres distinctes, et des nombres d'occurrences n_1, n_2, \dots, n_k des k lettres.
5. Combien le mot ANAGRAMME a-t-il d'anagrammes ?

Exercice 6.3

Un match de football entre deux équipes A et B s'est terminé sur le score de 4 à 4. On s'intéresse aux évolutions possibles du score lors du match ; par exemple, une évolution possible est $(0, 0) - (1, 0) - (2, 0) - (2, 1) - (3, 1) - (3, 2) - (3, 3) - (3, 4) - (4, 4)$.

1. Trouver une bijection entre l'ensemble des évolutions possibles et une partie de l'ensemble des suites binaires de longueur 8, $\{0, 1\}^8$. Quelle est cette partie ? Quel est son cardinal ? Combien y a-t-il d'évolutions possibles pour ce match ?
2. On apprend que le premier but a été marqué par l'équipe A . Quel sous-ensemble des évolutions possibles satisfait cette contrainte ? Combien y en a-t-il ?
3. On apprend maintenant que l'équipe A n'a jamais été menée au score (ce qui ne correspond pas à l'exemple donné). Combien reste-t-il d'évolutions possibles ?
4. Si, de manière générale, un match se termine sur le score de n à n , et qu'on suppose que toutes les évolutions possibles sont équiprobables, quelle est la probabilité que l'équipe A n'ait jamais été menée au score ?

Exercice 6.4

L'objectif de cet exercice est d'obtenir une preuve *sans calcul* de deux formules classiques sur les coefficients binomiaux : pour tous entiers k et n , tels que l'on ait $1 \leq k \leq n$, les deux identités suivantes sont vraies (et prouvables sans trop de difficultés au moyen de formules connues, mais ce n'est pas l'objectif ici) :

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1} \quad \text{et} \quad \binom{n}{k} = \sum_{m=k-1}^{n-1} \binom{m}{k-1}$$

1. Combien y a-t-il de parties de $\{1, \dots, n\}$ qui contiennent exactement k éléments, et qui ne contiennent pas n ? Combien y a-t-il de parties de $\{1, \dots, n\}$ qui contiennent exactement k éléments, et qui contiennent n ?
2. En déduire la première identité.
3. Pour un entier M donné, combien y a-t-il de parties de $\{1, \dots, n\}$ à exactement k éléments, et dont le plus grand élément est M ? En déduire la seconde identité.

Exercice 6.5

Factorielle et mélange de cartes On sait que le nombre de façons d'ordonner n nombres distincts (ou, de manière équivalente, étant donné un ensemble de n valeurs, le nombre de *listes* distinctes qu'on peut former et qui contiennent chaque valeur exactement une fois) est $n! = 1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot n$. Ce nombre est également le cardinal du produit cartésien $\{1\} \times \{1, 2\} \times \dots \times \{1, 2, \dots, n\}$. Il existe pléthore de bijections assez classiques entre les deux ensembles ; l'idée de cet exercice est d'en décrire une qui soit facile à réaliser sous la forme d'un algorithme de faible complexité.

1. On note S_n l'ensemble des permutations de $\{1, \dots, n\}$, vues comme suites de longueur n d'entiers, dans lesquelles chaque entier de 1 à n apparaît une fois et une seule. Décrire une bijection entre $S_{n-1} \times \{1, \dots, n\}$ et S_n , c'est-à-dire une transformation bijective qui prend en entrée une permutation $\sigma \in S_{n-1}$ et un entier $k \in \{1, \dots, n\}$ et qui donne une permutation $\sigma' \in S_n$, de telle sorte qu'on puisse retrouver σ et k à

partir de la donnée de σ' . **Indication** : chercher à faire en sorte que le changement entre σ et σ' soit le plus petit possible, par exemple, que parmi les $n - 1$ premières positions, au plus une soit occupée par une valeur différente dans σ et σ' .

2. En déduire une bijection entre les suites d'entiers $(u_k)_{1 \leq k \leq n}$ qui sont telles que l'on ait, pour tout k , $1 \leq u_k \leq k$, et S_n . Vous pouvez décrire votre bijection par un algorithme (ou une fonction Python) qui prend en entrée une liste décrivant la suite (u_k) , et qui retourne une nouvelle liste décrivant la permutation σ . **Indication** : une bonne solution consiste à commencer par fabriquer la liste des entiers de 1 à n dans l'ordre croissant, et à utiliser la suite (u_k) pour "mélanger" cette liste.

Exercice 6.6

On appelle *mot de Fibonacci* une suite finie binaire (une suite de $\{0, 1\}^n$ pour un entier n) dans laquelle la valeur 0 n'apparaît pas dans deux positions consécutives. L'entier n est alors appelé la *longueur* du mot.

On note F_n le nombre de mots de Fibonacci dont la longueur est exactement n .

1. Combien y a-t-il de mots de Fibonacci de longueur n qui commencent par 0 ? Qui commencent par 1 ? Qui finissent par 0 ? Qui finissent par 1 ?
2. Montrer que la suite (F_n) est la suite de Fibonacci décalée, définie par les conditions initiales $F_0 = 1$, $F_1 = 2$, et pour tout $n \geq 2$, $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$.
3. Montrer que la suite (F_n) ainsi définie satisfait la relation de récurrence suivante : pour tout $n \geq 2$, on a

$$F_{2n} = F_n \cdot F_{n-1} + F_{n-1} \cdot F_{n-2} \text{ et } F_{2n+1} = (F_n)^2 + (F_{n-1})^2$$

Indication : pour un mot de Fibonacci de longueur $2n$ ou $2n + 1$, distinguer selon la $(n + 1)$ -ème valeur.

4. On considère une autre famille de mots : ceux composés des trois symboles 0, 1, 2, sans qu'il y ait jamais deux 0 consécutifs. On note G_n le nombre de tels mots de longueur n . Reprendre les questions précédentes en écrivant des relations (obtenues combinatoirement) entre G_n , G_{n-1} et G_{n-2} d'une part ; entre G_{2n} , G_{2n+1} , G_n , G_{n-1} et G_{n-2} , d'autre part.