

# Probabilités, Statistiques, Combinatoire

Philippe Duchon

Université de Bordeaux – Licence Informatique

2017-2018

# Administratif

- ▶ **Équipe enseignante** : Ph. Duchon, L. Fredes-Carrasco, F. Kardos, A. Lentz, F. Mazoit, Th. Karaboghossian, A. Strock
- ▶ Cours (vendredi après-midi), TD, TD Machine (l'emploi du temps change d'une semaine sur l'autre, à vérifier;  $13 \times 1h20$  TD,  $9 \times 1h20$  TDM)
- ▶ Évaluation : 1 DS (semaine 11, 16 mars); 1 examen (coeff. 1/2 chacun; coeff. 1 exam si meilleur)
- ▶ Documents en DS/Examen : une feuille A4 recto-verso, **manuscrite**, à votre nom.
- ▶ En session 2 : même chose (on ne refait pas le DS)

# Équipe enseignante

- ▶ **Cours** : Ph. Duchon
- ▶ **TD** :
  - ▶ **INF A1** : A. Strock (**TM3**)
  - ▶ **INF A2** : F. Mazoit(\*) (**TM1**)
  - ▶ **INF A3** : Th. Karaboghossian (**TM4**)
  - ▶ **INF A4** : F. Mazoit(\*) (**TM6**)
  - ▶ **INF A5** : L. Fredes-Carrasco (**TM7**)
  - ▶ **MI A1** : F. Kardos (**TM8**)
  - ▶ **MI A2** : Ph. Duchon (**TM10**)
- ▶ **TDM** : les mêmes, plus
  - ▶ **TM2** : F. Kardos
  - ▶ **TM5** : Ph. Duchon
  - ▶ **TM9 (MI)** : A. Lentz

## Contenu de l'UE

**Probabilités** et **statistiques** : disciplines *mathématiques* censées étudier les situations d'*incertitude* ("le hasard", c'est quoi?)

- ▶ **Probabilités** : on définit un modèle pour une expérience, et on *prédit* par le calcul ce qu'il est plus ou moins plausible d'observer

# Contenu de l'UE

**Probabilités** et **statistiques** : disciplines *mathématiques* censées étudier les situations d'*incertitude* ("le hasard", c'est quoi?)

- ▶ **Probabilités** : on définit un modèle pour une expérience, et on *prédit* par le calcul ce qu'il est plus ou moins plausible d'observer
- ▶ **Statistiques** : à partir de données concrètes, on essaie de *diagnostiquer*
  - ▶ décrire de manière concise les données observées
  - ▶ proposer des valeurs plausibles pour les paramètres d'un modèle
  - ▶ "est-ce que les données sont raisonnablement compatibles avec l'hypothèse que. . ."

# Contenu de l'UE

**Probabilités** et **statistiques** : disciplines *mathématiques* censées étudier les situations d'*incertitude* (“le hasard”, c’est quoi ?)

- ▶ **Probabilités** : on définit un modèle pour une expérience, et on *prédit* par le calcul ce qu’il est plus ou moins plausible d’observer
- ▶ **Statistiques** : à partir de données concrètes, on essaie de *diagnostiquer*
  - ▶ décrire de manière concise les données observées
  - ▶ proposer des valeurs plausibles pour les paramètres d’un modèle
  - ▶ “est-ce que les données sont raisonnablement compatibles avec l’hypothèse que . . .”
- ▶ **Combinatoire** : discipline (mathématique ? informatique ?) qui étudie (et *énumère*, compte . . .) les objets discrets (combinaisons, mots, chemins, arbres . . .)
  - ▶ parfois un préalable indispensable à certains calculs de probabilités
  - ▶ utilisée en particulier pour *analyser la complexité* (en moyenne, souvent) des algorithmes

# Pourquoi un cours de probas-stats en informatique ?

Probabilités et statistiques sont présentes dans de nombreux sous-domaines de l'informatique, aussi bien au niveau de la théorie que des application. . . difficile de les éviter !

- ▶ **Conception d'algorithmes** : énormément d'algorithmes "probabilistes" (faisant appel au hasard dans la définition de l'algorithme) existent qui ont des performances bien meilleures que ce qu'atteignent des algorithmes "déterministes" d'un degré comparable de simplicité.

# Pourquoi un cours de probas-stats en informatique ?

Probabilités et statistiques sont présentes dans de nombreux sous-domaines de l'informatique, aussi bien au niveau de la théorie que des application. . . difficile de les éviter !

- ▶ **Conception d'algorithmes** : énormément d'algorithmes "probabilistes" (faisant appel au hasard dans la définition de l'algorithme) existent qui ont des performances bien meilleures que ce qu'atteignent des algorithmes "déterministes" d'un degré comparable de simplicité.
- ▶ **Analyse d'algorithmes** : les techniques probabilistes permettent de faire des analyses assez précises de la complexité d'algorithmes (**QuickSort** n'est pas juste un bon algorithme parce que, *en moyenne*, il est rapide ; on montre que *dans l'immense majorité des cas*, il est rapide)

# Pourquoi un cours de probas-stats en informatique ?

Probabilités et statistiques sont présentes dans de nombreux sous-domaines de l'informatique, aussi bien au niveau de la théorie que des application. . . difficile de les éviter !

- ▶ **Conception d'algorithmes** : énormément d'algorithmes "probabilistes" (faisant appel au hasard dans la définition de l'algorithme) existent qui ont des performances bien meilleures que ce qu'atteignent des algorithmes "déterministes" d'un degré comparable de simplicité.
- ▶ **Analyse d'algorithmes** : les techniques probabilistes permettent de faire des analyses assez précises de la complexité d'algorithmes (**QuickSort** n'est pas juste un bon algorithme parce que, *en moyenne*, il est rapide ; on montre que *dans l'immense majorité des cas*, il est rapide)
- ▶ **Analyse statistique des données** : classification, apprentissage. . . font beaucoup appel aux probabilités et aux statistiques

# Pourquoi un cours de probas-stats en informatique ?

Probabilités et statistiques sont présentes dans de nombreux sous-domaines de l'informatique, aussi bien au niveau de la théorie que des application. . . difficile de les éviter !

- ▶ **Conception d'algorithmes** : énormément d'algorithmes "probabilistes" (faisant appel au hasard dans la définition de l'algorithme) existent qui ont des performances bien meilleures que ce qu'atteignent des algorithmes "déterministes" d'un degré comparable de simplicité.
- ▶ **Analyse d'algorithmes** : les techniques probabilistes permettent de faire des analyses assez précises de la complexité d'algorithmes (**QuickSort** n'est pas juste un bon algorithme parce que, *en moyenne*, il est rapide ; on montre que *dans l'immense majorité des cas*, il est rapide)
- ▶ **Analyse statistique des données** : classification, apprentissage. . . font beaucoup appel aux probabilités et aux statistiques
- ▶ **PageRank** (Google) est au départ basé sur l'application de la théorie des chaînes de Markov (*i.e.* des probabilités)

## La notion de hasard. . .

- ▶ Qu'est-ce que le hasard ? Est-ce que ça existe, d'ailleurs, ou est-ce que ça ne serait pas un mot qu'on utilise pour camoufler notre ignorance, ou notre incapacité à "calculer assez précisément" ce qui va se passer ?

## La notion de hasard. . .

- ▶ Qu'est-ce que le hasard ? Est-ce que ça existe, d'ailleurs, ou est-ce que ça ne serait pas un mot qu'on utilise pour camoufler notre ignorance, ou notre incapacité à “calculer assez précisément” ce qui va se passer ?
- ▶ Ce sont des questions qui peuvent être intéressantes, mais qui *ne sont pas de nature mathématique* ; dans la pratique, *on fait comme si* la théorie des probabilités rendait bien compte de phénomènes imprévisibles (et ça ne marche pas si mal). . .

## La notion de hasard. . .

- ▶ Qu'est-ce que le hasard ? Est-ce que ça existe, d'ailleurs, ou est-ce que ça ne serait pas un mot qu'on utilise pour camoufler notre ignorance, ou notre incapacité à "calculer assez précisément" ce qui va se passer ?
- ▶ Ce sont des questions qui peuvent être intéressantes, mais qui *ne sont pas de nature mathématique* ; dans la pratique, *on fait comme si* la théorie des probabilités rendait bien compte de phénomènes imprévisibles (et ça ne marche pas si mal). . .
- ▶ En gros, les tentatives de définitions de la notion de hasard ont tendance à se mordre la queue.

## La notion de hasard...

- ▶ Qu'est-ce que le hasard ? Est-ce que ça existe, d'ailleurs, ou est-ce que ça ne serait pas un mot qu'on utilise pour camoufler notre ignorance, ou notre incapacité à “calculer assez précisément” ce qui va se passer ?
- ▶ Ce sont des questions qui peuvent être intéressantes, mais qui *ne sont pas de nature mathématique* ; dans la pratique, *on fait comme si* la théorie des probabilités rendait bien compte de phénomènes imprévisibles (et ça ne marche pas si mal)...
- ▶ En gros, les tentatives de définitions de la notion de hasard ont tendance à se mordre la queue.
- ▶ Les mathématiques évitent le problème en définissant un cadre axiomatique ; “on y croit” en se persuadant que les axiomes correspondent à la notion intuitive, ce qui permet de faire confiance aux résultats que donne le calcul.

## Le vocabulaire des probabilités

- ▶ **Modèle, univers** : la description d'une "expérience" dont le résultat est *a priori* incertain ("une expérience" peut en fait décrire une *suite* d'expériences)

# Le vocabulaire des probabilités

- ▶ **Modèle, univers** : la description d'une "expérience" dont le résultat est *a priori* incertain ("une expérience" peut en fait décrire une *suite* d'expériences)
- ▶ **Événement** : la description, dans une expérience, de "quelque chose" qui peut se produire, ou ne pas se produire ; souvent, un événement sera défini par une *condition* sur le résultat de l'expérience

# Le vocabulaire des probabilités

- ▶ **Modèle, univers** : la description d'une "expérience" dont le résultat est *a priori* incertain ("une expérience" peut en fait décrire une *suite* d'expériences)
- ▶ **Événement** : la description, dans une expérience, de "quelque chose" qui peut se produire, ou ne pas se produire ; souvent, un événement sera défini par une *condition* sur le résultat de l'expérience
- ▶ **Probabilité d'un événement** : un nombre, toujours compris entre 0 (0%, impossible) et 1 (100%, certain), et qui est censé décrire le degré de plausibilité de l'événement. Par exemple, si un événement a une probabilité de  $1/2$ , cela correspond à la situation où il est équivalent de parier sur le fait que l'événement se produira, ou sur le fait qu'il ne se produira pas.

# Le vocabulaire des probabilités

- ▶ **Modèle, univers** : la description d'une "expérience" dont le résultat est *a priori* incertain ("une expérience" peut en fait décrire une *suite* d'expériences)
- ▶ **Événement** : la description, dans une expérience, de "quelque chose" qui peut se produire, ou ne pas se produire ; souvent, un événement sera défini par une *condition* sur le résultat de l'expérience
- ▶ **Probabilité d'un événement** : un nombre, toujours compris entre 0 (0%, impossible) et 1 (100%, certain), et qui est censé décrire le degré de plausibilité de l'événement. Par exemple, si un événement a une probabilité de  $1/2$ , cela correspond à la situation où il est équivalent de parier sur le fait que l'événement se produira, ou sur le fait qu'il ne se produira pas.
- ▶ On peut **combiner des événements** pour en décrire de nouveaux : "A et B" ; "A ou B, mais pas C" ; "au moins un des  $A_i$ , pour  $i$  entier positif" . . .

## Les règles (plus ou moins) intuitives

On est amené à énoncer des règles de cohérence que devraient satisfaire, collectivement, les probabilités de tous les événements résultant d'une même expérience :

- ▶ **certitude** : si un événement est considéré comme certain, sa probabilité devrait valoir 1 ;

## Les règles (plus ou moins) intuitives

On est amené à énoncer des règles de cohérence que devraient satisfaire, collectivement, les probabilités de tous les événements résultant d'une même expérience :

- ▶ **certitude** : si un événement est considéré comme certain, sa probabilité devrait valoir 1 ;
- ▶ **impossibilité** : si un événement ne peut pas se produire, sa probabilité devrait valoir 0 ;

## Les règles (plus ou moins) intuitives

On est amené à énoncer des règles de cohérence que devraient satisfaire, collectivement, les probabilités de tous les événements résultant d'une même expérience :

- ▶ **certitude** : si un événement est considéré comme certain, sa probabilité devrait valoir 1 ;
- ▶ **impossibilité** : si un événement ne peut pas se produire, sa probabilité devrait valoir 0 ;
- ▶ **monotonie** : si deux événements  $A$  et  $B$  sont tels que  $A$  ne peut pas se produire sans que  $B$  se produise ( $A$  entraîne automatiquement  $B$ ), alors la probabilité de  $B$  devrait être au moins égale à celle de  $A$  ;

## Les règles (plus ou moins) intuitives

On est amené à énoncer des règles de cohérence que devraient satisfaire, collectivement, les probabilités de tous les événements résultant d'une même expérience :

- ▶ **certitude** : si un événement est considéré comme certain, sa probabilité devrait valoir 1 ;
- ▶ **impossibilité** : si un événement ne peut pas se produire, sa probabilité devrait valoir 0 ;
- ▶ **monotonie** : si deux événements  $A$  et  $B$  sont tels que  $A$  ne peut pas se produire sans que  $B$  se produise ( $A$  entraîne automatiquement  $B$ ), alors la probabilité de  $B$  devrait être au moins égale à celle de  $A$  ;
- ▶ **additivité** : si deux (ou plus) événements sont *incompatibles entre eux* (il est impossible que plus d'un d'entre eux se produise ensemble), la probabilité qu'*au moins un d'entre eux se produise* devrait être la *somme* de leurs probabilités respectives ;

## Les règles (plus ou moins) intuitives

On est amené à énoncer des règles de cohérence que devraient satisfaire, collectivement, les probabilités de tous les événements résultant d'une même expérience :

- ▶ **certitude** : si un événement est considéré comme certain, sa probabilité devrait valoir 1 ;
- ▶ **impossibilité** : si un événement ne peut pas se produire, sa probabilité devrait valoir 0 ;
- ▶ **monotonie** : si deux événements  $A$  et  $B$  sont tels que  $A$  ne peut pas se produire sans que  $B$  se produise ( $A$  entraîne automatiquement  $B$ ), alors la probabilité de  $B$  devrait être au moins égale à celle de  $A$  ;
- ▶ **additivité** : si deux (ou plus) événements sont *incompatibles entre eux* (il est impossible que plus d'un d'entre eux se produise ensemble), la probabilité qu'*au moins un d'entre eux se produise* devrait être la *somme* de leurs probabilités respectives ;
- ▶ **indépendance** : (à ce stade : notion floue) si on peut identifier des *causes* qui influencent l'occurrence

## Notations sur les ensembles

- ▶ On peut noter un ensemble extensivement, entre accolades :  
 $E = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$  ; on peut aussi le décrire par la condition qui définit ses éléments :  $E = \{x \in \mathbf{N} : 1 \leq x \leq 6\}$ .

## Notations sur les ensembles

- ▶ On peut noter un ensemble extensivement, entre accolades :  
 $E = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$  ; on peut aussi le décrire par la condition qui définit ses éléments :  $E = \{x \in \mathbf{N} : 1 \leq x \leq 6\}$ .
- ▶  $\emptyset$  désigne l'ensemble vide (qui n'a aucun élément).

## Notations sur les ensembles

- ▶ On peut noter un ensemble extensivement, entre accolades :  $E = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$  ; on peut aussi le décrire par la condition qui définit ses éléments :  $E = \{x \in \mathbf{N} : 1 \leq x \leq 6\}$ .
- ▶  $\emptyset$  désigne l'ensemble vide (qui n'a aucun élément).
- ▶ On note  $x \in E$  pour dire que  $x$  est un élément de  $E$ , et  $F \subset E$  pour dire que  $F$  est inclus dans  $E$  (*i.e.* chaque élément de  $F$  est aussi un élément de  $E$  ; on dit aussi que  $F$  est une partie de  $E$ ).

## Notations sur les ensembles

- ▶ On peut noter un ensemble extensivement, entre accolades :  $E = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$  ; on peut aussi le décrire par la condition qui définit ses éléments :  $E = \{x \in \mathbf{N} : 1 \leq x \leq 6\}$ .
- ▶  $\emptyset$  désigne l'ensemble vide (qui n'a aucun élément).
- ▶ On note  $x \in E$  pour dire que  $x$  est un élément de  $E$ , et  $F \subset E$  pour dire que  $F$  est inclus dans  $E$  (*i.e.* chaque élément de  $F$  est aussi un élément de  $E$  ; on dit aussi que  $F$  est une partie de  $E$ ).
- ▶ On note  $\text{Parties}(E)$  pour l'ensemble de toutes les parties de  $E$  (y compris l'ensemble vide  $\emptyset$  et  $E$  lui-même) ; par exemple si  $E = \{0, 1\}$ ,  $\text{Parties}(E) = \{\emptyset, \{0\}, \{1\}, E\}$ .

## Notations sur les ensembles

- ▶ On peut noter un ensemble extensivement, entre accolades :  $E = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$  ; on peut aussi le décrire par la condition qui définit ses éléments :  $E = \{x \in \mathbf{N} : 1 \leq x \leq 6\}$ .
- ▶  $\emptyset$  désigne l'ensemble vide (qui n'a aucun élément).
- ▶ On note  $x \in E$  pour dire que  $x$  est un élément de  $E$ , et  $F \subset E$  pour dire que  $F$  est inclus dans  $E$  (*i.e.* chaque élément de  $F$  est aussi un élément de  $E$  ; on dit aussi que  $F$  est une partie de  $E$ ).
- ▶ On note  $\text{Parties}(E)$  pour l'ensemble de toutes les parties de  $E$  (y compris l'ensemble vide  $\emptyset$  et  $E$  lui-même) ; par exemple si  $E = \{0, 1\}$ ,  $\text{Parties}(E) = \{\emptyset, \{0\}, \{1\}, E\}$ .
- ▶ On note  $\#E$  pour le *cardinal* de  $E$ , c'est-à-dire le nombre de ses éléments (si  $E$  est fini).

## Notations sur les ensembles

- ▶ On peut noter un ensemble extensivement, entre accolades :  $E = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$  ; on peut aussi le décrire par la condition qui définit ses éléments :  $E = \{x \in \mathbf{N} : 1 \leq x \leq 6\}$ .
- ▶  $\emptyset$  désigne l'ensemble vide (qui n'a aucun élément).
- ▶ On note  $x \in E$  pour dire que  $x$  est un élément de  $E$ , et  $F \subset E$  pour dire que  $F$  est inclus dans  $E$  (*i.e.* chaque élément de  $F$  est aussi un élément de  $E$  ; on dit aussi que  $F$  est une partie de  $E$ ).
- ▶ On note  $\text{Parties}(E)$  pour l'ensemble de toutes les parties de  $E$  (y compris l'ensemble vide  $\emptyset$  et  $E$  lui-même) ; par exemple si  $E = \{0, 1\}$ ,  $\text{Parties}(E) = \{\emptyset, \{0\}, \{1\}, E\}$ .
- ▶ On note  $\#E$  pour le *cardinal* de  $E$ , c'est-à-dire le nombre de ses éléments (si  $E$  est fini).
- ▶ On peut aussi noter  $\text{Parties}_k(E)$  pour l'ensemble des parties de  $E$  dont le cardinal est  $k$  ; par exemple avec  $E = \{0, 1, 2\}$ ,  $\text{Parties}_2(E) = \{\{0, 1\}, \{0, 2\}, \{1, 2\}\}$ .

## Notations sur les ensembles (2)

- ▶ On note  $E \cap F$  (“ $E$  inter “ $F$ ”) l’intersection de  $E$  et  $F$  : l’ensemble des éléments communs de  $E$  et  $F$  (ceux qui sont dans  $E$  **et** dans  $F$ ).

## Notations sur les ensembles (2)

- ▶ On note  $E \cap F$  (“ $E$  inter “ $F$ ”) l’intersection de  $E$  et  $F$  : l’ensemble des éléments communs de  $E$  et  $F$  (ceux qui sont dans  $E$  **et** dans  $F$ ).
- ▶ De même, on note  $E \cup F$  (“ $E$  union  $F$ ”) la réunion de  $E$  et de  $F$  : l’ensemble des valeurs qui sont dans  $E$  **ou** dans  $F$  (le “ou” étant inclusif).

## Notations sur les ensembles (2)

- ▶ On note  $E \cap F$  (“ $E$  inter “ $F$ ”) l’intersection de  $E$  et  $F$  : l’ensemble des éléments communs de  $E$  et  $F$  (ceux qui sont dans  $E$  **et** dans  $F$ ).
- ▶ De même, on note  $E \cup F$  (“ $E$  union  $F$ ”) la réunion de  $E$  et de  $F$  : l’ensemble des valeurs qui sont dans  $E$  **ou** dans  $F$  (le “ou” étant inclusif).
- ▶ On généralise à des unions et intersections infinies :  $\bigcup_{i \in I} E_i$ ,  $\bigcap_{i \in I} E_i$ .

## Notations sur les ensembles (2)

- ▶ On note  $E \cap F$  (“ $E$  inter “ $F$ ”) l’intersection de  $E$  et  $F$  : l’ensemble des éléments communs de  $E$  et  $F$  (ceux qui sont dans  $E$  **et** dans  $F$ ).
- ▶ De même, on note  $E \cup F$  (“ $E$  union  $F$ ”) la réunion de  $E$  et de  $F$  : l’ensemble des valeurs qui sont dans  $E$  **ou** dans  $F$  (le “ou” étant inclusif).
- ▶ On généralise à des unions et intersections infinies :  $\bigcup_{i \in I} E_i$ ,  $\bigcap_{i \in I} E_i$ .
- ▶ On note enfin  $E \setminus F$  pour l’ensemble des éléments de  $E$  qui **ne sont pas** dans  $F$  (“ $E$  privé de  $F$ ”).

## Notations sur les ensembles (2)

- ▶ On note  $E \cap F$  (“ $E$  inter “ $F$ ”) l’intersection de  $E$  et  $F$  : l’ensemble des éléments communs de  $E$  et  $F$  (ceux qui sont dans  $E$  **et** dans  $F$ ).
- ▶ De même, on note  $E \cup F$  (“ $E$  union  $F$ ”) la réunion de  $E$  et de  $F$  : l’ensemble des valeurs qui sont dans  $E$  **ou** dans  $F$  (le “ou” étant inclusif).
- ▶ On généralise à des unions et intersections infinies :  $\bigcup_{i \in I} E_i$ ,  $\bigcap_{i \in I} E_i$ .
- ▶ On note enfin  $E \setminus F$  pour l’ensemble des éléments de  $E$  qui **ne sont pas** dans  $F$  (“ $E$  privé de  $F$ ”).
- ▶ Deux ensembles  $E$  et  $F$  sont dits **disjoints** si  $E \cap F = \emptyset$  ; dans ce cas on dit que  $G = E \cup F$  est **l’union disjointe** de  $E$  et de  $F$ .

## Ensembles (3) : produits cartésiens

- ▶ Pour  $E$  et  $F$  des ensembles, on note  $E \times F$  l'ensemble des *couples*  $(x, y)$  avec  $x \in E$  et  $y \in F$ .

## Ensembles (3) : produits cartésiens

- ▶ Pour  $E$  et  $F$  des ensembles, on note  $E \times F$  l'ensemble des *couples*  $(x, y)$  avec  $x \in E$  et  $y \in F$ .
- ▶ Si  $E = F$ , l'ensemble  $E \times F$  est aussi noté  $E^2$ .

## Ensembles (3) : produits cartésiens

- ▶ Pour  $E$  et  $F$  des ensembles, on note  $E \times F$  l'ensemble des *couples*  $(x, y)$  avec  $x \in E$  et  $y \in F$ .
- ▶ Si  $E = F$ , l'ensemble  $E \times F$  est aussi noté  $E^2$ .
- ▶ Extension au produit de plus de deux ensembles :  $E \times F \times G$  par exemple.

## Ensembles (3) : produits cartésiens

- ▶ Pour  $E$  et  $F$  des ensembles, on note  $E \times F$  l'ensemble des *couples*  $(x, y)$  avec  $x \in E$  et  $y \in F$ .
- ▶ Si  $E = F$ , l'ensemble  $E \times F$  est aussi noté  $E^2$ .
- ▶ Extension au produit de plus de deux ensembles :  $E \times F \times G$  par exemple.
- ▶  $E^n$  désigne l'ensemble des  $n$ -uplets d'éléments de  $E$  (ou : suites de longueur  $n$  d'éléments de  $E$ )

## Ensembles (3) : produits cartésiens

- ▶ Pour  $E$  et  $F$  des ensembles, on note  $E \times F$  l'ensemble des *couples*  $(x, y)$  avec  $x \in E$  et  $y \in F$ .
- ▶ Si  $E = F$ , l'ensemble  $E \times F$  est aussi noté  $E^2$ .
- ▶ Extension au produit de plus de deux ensembles :  $E \times F \times G$  par exemple.
- ▶  $E^n$  désigne l'ensemble des  $n$ -uplets d'éléments de  $E$  (ou : suites de longueur  $n$  d'éléments de  $E$ )
- ▶ On note également  $E^{\mathbb{N}}$  l'ensemble des *suites infinies* d'éléments de  $E$ .

## Ensembles (3) : produits cartésiens

- ▶ Pour  $E$  et  $F$  des ensembles, on note  $E \times F$  l'ensemble des *couples*  $(x, y)$  avec  $x \in E$  et  $y \in F$ .
- ▶ Si  $E = F$ , l'ensemble  $E \times F$  est aussi noté  $E^2$ .
- ▶ Extension au produit de plus de deux ensembles :  $E \times F \times G$  par exemple.
- ▶  $E^n$  désigne l'ensemble des  $n$ -uplets d'éléments de  $E$  (ou : suites de longueur  $n$  d'éléments de  $E$ )
- ▶ On note également  $E^{\mathbb{N}}$  l'ensemble des *suites infinies* d'éléments de  $E$ .
- ▶ **Cardinaux** : si  $E$  et  $F$  sont des ensembles finis,  $\#(E \times F) = (\#E) \cdot (\#F)$ ; et pour tout  $n$ ,  $\#(E^n) = (\#E)^n$  (on reviendra sur ces formules dans la partie Combinatoire du cours).

# Dénombrabilité

- ▶ Un ensemble peut être **fini** (s'il est vide, ou qu'on peut numéroter ses éléments de 1 à  $n$ , pour un certain entier  $n$ , sans en laisser de côté), ou **infini**.

# Dénombrabilité

- ▶ Un ensemble peut être **fini** (s'il est vide, ou qu'on peut numéroter ses éléments de 1 à  $n$ , pour un certain entier  $n$ , sans en laisser de côté), ou **infini**.
- ▶ Exemples d'ensembles infinis :  $\mathbb{N}$  (entiers naturels),  $\mathbb{Z}$  (entiers relatifs),  $\mathbb{R}$  (nombres réels),  $[0, 1]$  (intervalle); l'ensemble des arbres binaires d'entiers est également infini, de même que l'ensemble des squelettes d'arbres binaires.

# Dénombrabilité

- ▶ Un ensemble peut être **fini** (s'il est vide, ou qu'on peut numéroté ses éléments de 1 à  $n$ , pour un certain entier  $n$ , sans en laisser de côté), ou **infini**.
- ▶ Exemples d'ensembles infinis :  $\mathbb{N}$  (entiers naturels),  $\mathbb{Z}$  (entiers relatifs),  $\mathbb{R}$  (nombres réels),  $[0, 1]$  (intervalle); l'ensemble des arbres binaires d'entiers est également infini, de même que l'ensemble des squelettes d'arbres binaires.
- ▶ Une notion importante, notamment en théorie des probabilités, est celle d'ensemble **dénombrable** :

## Définition

Un ensemble infini  $E$  est **dénombrable** s'il est possible de numéroté ses éléments au moyen des entiers naturels, sans en laisser de côté; *i.e.* s'il existe une **bijection** entre  $\mathbb{N}$  et  $E$ .

# Dénombrabilité

- ▶ Un ensemble peut être **fini** (s'il est vide, ou qu'on peut numéroter ses éléments de 1 à  $n$ , pour un certain entier  $n$ , sans en laisser de côté), ou **infini**.
- ▶ Exemples d'ensembles infinis :  $\mathbb{N}$  (entiers naturels),  $\mathbb{Z}$  (entiers relatifs),  $\mathbb{R}$  (nombres réels),  $[0, 1]$  (intervalle); l'ensemble des arbres binaires d'entiers est également infini, de même que l'ensemble des squelettes d'arbres binaires.
- ▶ Une notion importante, notamment en théorie des probabilités, est celle d'ensemble **dénombrable** :

## Définition

Un ensemble infini  $E$  est **dénombrable** s'il est possible de numéroter ses éléments au moyen des entiers naturels, sans en laisser de côté; *i.e.* s'il existe une **bijection** entre  $\mathbb{N}$  et  $E$ .

- ▶ Exemples d'ensembles dénombrables :  $\mathbb{N}$ ,  $\mathbb{Z}$ ,  $\mathbb{Q}$ ; l'ensemble des *suites finies* d'entiers.

# Dénombrabilité

- ▶ Un ensemble peut être **fini** (s'il est vide, ou qu'on peut numéroter ses éléments de 1 à  $n$ , pour un certain entier  $n$ , sans en laisser de côté), ou **infini**.
- ▶ Exemples d'ensembles infinis :  $\mathbb{N}$  (entiers naturels),  $\mathbb{Z}$  (entiers relatifs),  $\mathbb{R}$  (nombres réels),  $[0, 1]$  (intervalle); l'ensemble des arbres binaires d'entiers est également infini, de même que l'ensemble des squelettes d'arbres binaires.
- ▶ Une notion importante, notamment en théorie des probabilités, est celle d'ensemble **dénombrable** :

## Définition

Un ensemble infini  $E$  est **dénombrable** s'il est possible de numéroter ses éléments au moyen des entiers naturels, sans en laisser de côté; *i.e.* s'il existe une **bijection** entre  $\mathbb{N}$  et  $E$ .

- ▶ Exemples d'ensembles dénombrables :  $\mathbb{N}$ ,  $\mathbb{Z}$ ,  $\mathbb{Q}$ ; l'ensemble des *suites finies* d'entiers.
- ▶ Exemples d'ensembles **non** dénombrables :  $\mathbb{R}$ ,  $[0, 1]$ ; l'ensemble des *suites infinies* d'entiers.

# Probabilités discrètes

La notion importante est celle, abstraite, d'*espace de probabilités*

- ▶ **univers** : un ensemble  $\Omega$  (qu'on va supposer *fini* ou *dénombrable*)

# Probabilités discrètes

La notion importante est celle, abstraite, d'*espace de probabilités*

- ▶ **univers** : un ensemble  $\Omega$  (qu'on va supposer *fini* ou *dénombrable*)
- ▶ les éléments de  $\Omega$  sont parfois appelés *événements élémentaires*;

# Probabilités discrètes

La notion importante est celle, abstraite, d'*espace de probabilités*

- ▶ **univers** : un ensemble  $\Omega$  (qu'on va supposer *fini* ou *dénombrable*)
- ▶ les éléments de  $\Omega$  sont parfois appelés *événements élémentaires* ;
- ▶ **événement** : toute partie de  $\Omega$  (*i.e.* un ensemble d'événements élémentaires) ;

# Probabilités discrètes

La notion importante est celle, abstraite, d'*espace de probabilités*

- ▶ **univers** : un ensemble  $\Omega$  (qu'on va supposer *fini* ou *dénombrable*)
- ▶ les éléments de  $\Omega$  sont parfois appelés *événements élémentaires* ;
- ▶ **événement** : toute partie de  $\Omega$  (*i.e.* un ensemble d'événements élémentaires) ;
- ▶ **loi de probabilité sur  $\Omega$**  : une fonction  $\mathbb{P} : \text{Parties}(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$ , qui doit satisfaire à certaines règles :
  - ▶ **positivité** : pour tout  $A \subset \Omega$ ,  $\mathbb{P}(A) \geq 0$  ;
  - ▶  $\mathbb{P}(\Omega) = 1$  ;
  - ▶ **sigma-additivité** : pour toute famille *finie ou dénombrable* d'événements  $(A_i)_{i \in I}$ , **si** les  $A_i$  sont deux à deux disjoints ( $A_i \cap A_j = \emptyset$  si  $i \neq j$ ), alors on a

$$\mathbb{P}(\cup_{i \in I} A_i) = \sum_{i \in I} \mathbb{P}(A_i)$$

## Retour sur la définition

- ▶ la règle de sigma-additivité est la plus complexe ; dans les cas où  $\Omega$  est un ensemble *fini*, on peut la remplacer par la règle plus simple d'**additivité** : si  $A$  et  $B$  sont des événements et qu'on a  $A \cap B = \emptyset$ , alors  $\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B)$  (qui s'étend alors à n'importe quel nombre fini  $n$  d'événements)

## Retour sur la définition

- ▶ la règle de sigma-additivité est la plus complexe ; dans les cas où  $\Omega$  est un ensemble *fini*, on peut la remplacer par la règle plus simple d'**additivité** : si  $A$  et  $B$  sont des événements et qu'on a  $A \cap B = \emptyset$ , alors  $\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B)$  (qui s'étend alors à n'importe quel nombre fini  $n$  d'événements)
- ▶ (dans les cas infinis, il faudrait au sens strict manipuler des sommes infinies ; pour les cas dont on a besoin, on admettra un ensemble de règles de calcul suffisantes. . .)

## Retour sur la définition

- ▶ la règle de sigma-additivité est la plus complexe ; dans les cas où  $\Omega$  est un ensemble *fini*, on peut la remplacer par la règle plus simple d'**additivité** : si  $A$  et  $B$  sont des événements et qu'on a  $A \cap B = \emptyset$ , alors  $\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B)$  (qui s'étend alors à n'importe quel nombre fini  $n$  d'événements)
- ▶ (dans les cas infinis, il faudrait au sens strict manipuler des sommes infinies ; pour les cas dont on a besoin, on admettra un ensemble de règles de calcul suffisantes. . .)
- ▶ On note qu'il n'y a pas de règle qui parle d'indépendance. . . La formule par le produit de probabilités va servir à *définir* l'indépendance.

# Interprétation

Une interprétation possible de la définition d'un espace de probabilités est la suivante :

- ▶ on a défini l'ensemble des "résultats possibles" de l'expérience (les événements élémentaires) ;

# Interprétation

Une interprétation possible de la définition d'un espace de probabilités est la suivante :

- ▶ on a défini l'ensemble des “résultats possibles” de l'expérience (les événements élémentaires) ;
- ▶ on suppose ensuite que “quelque chose” choisit un élément  $x \in \Omega$  *au hasard, de telle sorte que chaque élément  $x$  a probabilité  $\mathbb{P}(\{x\})$  d'être choisi* ;

# Interprétation

Une interprétation possible de la définition d'un espace de probabilités est la suivante :

- ▶ on a défini l'ensemble des “résultats possibles” de l'expérience (les événements élémentaires) ;
- ▶ on suppose ensuite que “quelque chose” choisit un élément  $x \in \Omega$  *au hasard, de telle sorte que chaque élément  $x$  a probabilité  $\mathbb{P}(\{x\})$  d'être choisi* ;
- ▶ pour n'importe quel événement  $A$ , on considère alors que “l'événement  $A$  se produit” lorsque *le  $x$  choisi est dans  $A$*

# Interprétation

Une interprétation possible de la définition d'un espace de probabilités est la suivante :

- ▶ on a défini l'ensemble des “résultats possibles” de l'expérience (les événements élémentaires) ;
- ▶ on suppose ensuite que “quelque chose” choisit un élément  $x \in \Omega$  *au hasard, de telle sorte que chaque élément  $x$  a probabilité  $\mathbb{P}(\{x\})$  d'être choisi* ;
- ▶ pour n'importe quel événement  $A$ , on considère alors que “l'événement  $A$  se produit” lorsque *le  $x$  choisi est dans  $A$*
- ▶ et donc, “les événements  $A$  et  $B$  se produisent tous les deux” correspond à la condition “ $x \in A$  et  $x \in B$ ”, soit  $x \in A \cap B$  ;  
etc.