

# Probabilités, Statistiques, Combinatoire

Philippe Duchon

Université de Bordeaux – Licence Informatique

2017-2018

## Retour administratif

- ▶ **Nouveaux enseignants** : G. Aupy (TD A2), O. Beaumont (TD A4), L. Eyraud-Dubois (TM3)
- ▶ **Maths-Info** : seulement 2 groupes de TM (correspondant aux groupes TD)
- ▶ **TM1-TM6 (A1-A4)** : merci de respecter la répartition en groupes, cf <http://lstinfo.emi.u-bordeaux.fr/wiki/doku.php?id=l2>
- ▶ (Semaine prochaine : quelques remplacements en TD et TM suite à absences de certains enseignants; **MI A1** : TD 1x1h20 semaine prochaine, 2x1h20 semaine suivante)
- ▶ **Page Web du cours** : <http://www.labri.fr/perso/duchon/Enseignements/Probas-Stats-Combi/> (ébauche de poly, diapos, feuilles de TD/TM)

## Previously, on PSC...

- ▶ le vocabulaire des probabilités (univers, événement, loi de probabilités...)
- ▶ les définitions essentielles (axiomes d'une loi de probabilités)
- ▶ début d'exploration de "ce que ça veut dire"

## Quelques conséquences de la définition

- ▶ **probabilité d'un événement impossible** : on a forcément

$$\mathbb{P}(\emptyset) = 0$$

**Preuve** : pour n'importe quel événement  $A$ , on a  $A \cap \emptyset = \emptyset$  ;  
donc par additivité,  $\mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(\emptyset) = \mathbb{P}(A)$ , ce qui implique  
 $\mathbb{P}(\emptyset) = 0$ .

## Quelques conséquences de la définition

- ▶ **probabilité d'un événement impossible** : on a forcément  $\mathbb{P}(\emptyset) = 0$   
**Preuve** : pour n'importe quel événement  $A$ , on a  $A \cap \emptyset = \emptyset$  ; donc par additivité,  $\mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(\emptyset) = \mathbb{P}(A)$ , ce qui implique  $\mathbb{P}(\emptyset) = 0$ .
- ▶ relations entre **additivité, sigma-additivité, additivité pour un nombre fini** : preuve au tableau

## Quelques conséquences de la définition

- ▶ **probabilité d'un événement impossible** : on a forcément  $\mathbb{P}(\emptyset) = 0$   
**Preuve** : pour n'importe quel événement  $A$ , on a  $A \cap \emptyset = \emptyset$ ; donc par additivité,  $\mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(\emptyset) = \mathbb{P}(A)$ , ce qui implique  $\mathbb{P}(\emptyset) = 0$ .
- ▶ relations entre **additivité, sigma-additivité, additivité pour un nombre fini** : preuve au tableau
- ▶ **monotonie** : “ $A$  entraîne  $B$ ” se traduit par  $A \subset B$ ; en posant  $C = B \setminus A$ , on a par additivité,  $\mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(C)$  et donc on a bien  $\mathbb{P}(B) \geq \mathbb{P}(A)$

## Quelques conséquences de la définition

- ▶ **probabilité d'un événement impossible** : on a forcément  $\mathbb{P}(\emptyset) = 0$   
**Preuve** : pour n'importe quel événement  $A$ , on a  $A \cap \emptyset = \emptyset$ ; donc par additivité,  $\mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(\emptyset) = \mathbb{P}(A)$ , ce qui implique  $\mathbb{P}(\emptyset) = 0$ .
- ▶ relations entre **additivité, sigma-additivité, additivité pour un nombre fini** : preuve au tableau
- ▶ **monotonie** : “ $A$  entraîne  $B$ ” se traduit par  $A \subset B$ ; en posant  $C = B \setminus A$ , on a par additivité,  $\mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(C)$  et donc on a bien  $\mathbb{P}(B) \geq \mathbb{P}(A)$
- ▶ **probabilité d'une union** : en toute généralité, on a

$$\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B).$$

**Preuve** : il suffit de réécrire

$A \cup B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A) \cup (A \cap B)$ ,  $A = (A \setminus B) \cup (A \cap B)$ ,  
 $B = (B \setminus A) \cup (A \cap B)$  (unions disjointes), et par additivité, c'est une identité algébrique.

## Quelques exemples

(Au final, le choix de l'univers n'est pas canonique : on pourrait toujours choisir un autre ensemble pour modéliser une expérience. . . et parfois c'est même plus pratique de choisir un ensemble "riche")

- ▶ **Lancer d'un dé équilibré** : on peut prendre  $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ , et, pour tout  $A \subset \Omega$ ,  $\mathbb{P}(A) = \#A/6$ .

## Quelques exemples

(Au final, le choix de l'univers n'est pas canonique : on pourrait toujours choisir un autre ensemble pour modéliser une expérience. . . et parfois c'est même plus pratique de choisir un ensemble "riche")

- ▶ **Lancer d'un dé équilibré** : on peut prendre  $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ , et, pour tout  $A \subset \Omega$ ,  $\mathbb{P}(A) = \#A/6$ .
- ▶ **Tirage à pile ou face avec une pièce équilibrée** : on peut prendre  $\Omega = \{\text{pile}, \text{face}\}$ , avec  $\mathbb{P}(\{\text{pile}\}) = \mathbb{P}(\{\text{face}\}) = 1/2$ .

## Quelques exemples

(Au final, le choix de l'univers n'est pas canonique : on pourrait toujours choisir un autre ensemble pour modéliser une expérience. . . et parfois c'est même plus pratique de choisir un ensemble "riche")

- ▶ **Lancer d'un dé équilibré** : on peut prendre  $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ , et, pour tout  $A \subset \Omega$ ,  $\mathbb{P}(A) = \#A/6$ .
- ▶ **Tirage à pile ou face avec une pièce équilibrée** : on peut prendre  $\Omega = \{\text{pile}, \text{face}\}$ , avec  $\mathbb{P}(\{\text{pile}\}) = \mathbb{P}(\{\text{face}\}) = 1/2$ .
- ▶ **Tirage deux fois, ou trois fois, à pile ou face** : on peut prendre pour  $\Omega$ , des séquences de longueur 2, ou 3, à valeur dans  $\{P, F\}$  : par exemple,  $\Omega_2 = \{(P, P), (P, F), (F, P), (F, F)\}$  (avec quelle loi de probabilité?)

## Quelques exemples

(Au final, le choix de l'univers n'est pas canonique : on pourrait toujours choisir un autre ensemble pour modéliser une expérience. . . et parfois c'est même plus pratique de choisir un ensemble "riche")

- ▶ **Lancer d'un dé équilibré** : on peut prendre  $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ , et, pour tout  $A \subset \Omega$ ,  $\mathbb{P}(A) = \#A/6$ .
- ▶ **Tirage à pile ou face avec une pièce équilibrée** : on peut prendre  $\Omega = \{\text{pile}, \text{face}\}$ , avec  $\mathbb{P}(\{\text{pile}\}) = \mathbb{P}(\{\text{face}\}) = 1/2$ .
- ▶ **Tirage deux fois, ou trois fois, à pile ou face** : on peut prendre pour  $\Omega$ , des séquences de longueur 2, ou 3, à valeur dans  $\{P, F\}$  : par exemple,  $\Omega_2 = \{(P, P), (P, F), (F, P), (F, F)\}$  (avec quelle loi de probabilité?)
- ▶ **Tirage à pile ou face avec une pièce déséquilibrée** : par exemple,  $\Omega = \{P, F\}$  avec  $\mathbb{P}(\{P\}) = 0.6$  et  $\mathbb{P}(\{F\}) = 0.4$ .

## Décrire une loi de probabilités

Pour décrire de manière complète une loi de probabilités  $\mathbb{P}$ , il faut *a priori* décrire  $\mathbb{P}(A)$  pour *toute* partie  $A$  de  $\Omega$ . . . (ça fait beaucoup !)  
Le théorème suivant nous permet de ne décrire que l'information minimale (et naturelle) : la probabilité de chaque singleton.

### Théorème

Soit  $\Omega$  un ensemble fini ou dénombrable, et soit  $p : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^+$  une fonction telle que l'on ait

$$\sum_{x \in \Omega} p(x) = 1.$$

Alors il existe une unique loi de probabilités  $\mathbb{P}$  sur  $\Omega$  telle que l'on ait, pour tout  $x \in \Omega$ ,  $\mathbb{P}(\{x\}) = p(x)$ ; et cette probabilité est définie, pour toute partie  $A \subset \Omega$ , par

$$\mathbb{P}(A) = \sum_{x \in A} p(x).$$

## Loi uniforme sur un ensemble fini

(On suppose ici que l'univers  $\Omega$  est **fini**.)

Parmi les lois de probabilités sur un tel ensemble, la **loi uniforme** est la seule qui accorde la même probabilité à tous les singletons, *i.e.* pour tout  $x \in \Omega$ ,  $p(x) = 1/\#\Omega$ .

### Définition

La loi uniforme  $\mathbb{P}_U$  sur  $\Omega$  est définie par : pour toute partie  $A \subset \Omega$ ,

$$\mathbb{P}_U(A) = \frac{\#A}{\#\Omega}.$$

- ▶ C'est la loi des "tirages équitables".

## Loi uniforme sur un ensemble fini

(On suppose ici que l'univers  $\Omega$  est **fini**.)

Parmi les lois de probabilités sur un tel ensemble, la **loi uniforme** est la seule qui accorde la même probabilité à tous les singletons, *i.e.* pour tout  $x \in \Omega$ ,  $p(x) = 1/\#\Omega$ .

### Définition

La loi uniforme  $\mathbb{P}_U$  sur  $\Omega$  est définie par : pour toute partie  $A \subset \Omega$ ,

$$\mathbb{P}_U(A) = \frac{\#A}{\#\Omega}.$$

- ▶ C'est la loi des "tirages équitables".
- ▶ C'est ce qu'on entend par "[jeu de cartes] bien mélangé", "dé équilibré", "choisir uniformément"...

## Loi uniforme sur un ensemble fini

(On suppose ici que l'univers  $\Omega$  est **fini**.)

Parmi les lois de probabilités sur un tel ensemble, la **loi uniforme** est la seule qui accorde la même probabilité à tous les singletons, *i.e.* pour tout  $x \in \Omega$ ,  $p(x) = 1/\#\Omega$ .

### Définition

La loi uniforme  $\mathbb{P}_U$  sur  $\Omega$  est définie par : pour toute partie  $A \subset \Omega$ ,

$$\mathbb{P}_U(A) = \frac{\#A}{\#\Omega}.$$

- ▶ C'est la loi des "tirages équitables".
- ▶ C'est ce qu'on entend par "[jeu de cartes] bien mélangé", "dé équilibré", "choisir uniformément"...
- ▶ Ce n'est qu'une loi parmi d'autres – la formule  $\#A/\#\Omega$  est un cas particulier – mais c'est principalement pour ce cas de figure qu'on s'intéressera à obtenir des formules de comptage en combinatoire.

# Notion d'indépendance

## Définition

Soit  $(\Omega, \mathbb{P})$  un espace de probabilités.

- ▶ Soient  $A$  et  $B$  deux événements de  $\Omega$ . On dit que  $A$  et  $B$  sont **indépendants** si on a  $\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)$ .
- ▶ Plus généralement, soit  $(A_i)_{i \in I}$ , une famille (finie ou infinie) d'événements de  $\Omega$ . Ces événements sont **indépendants** si on a, pour toute partie finie  $J = \{i_1, \dots, i_\ell\} \subset I$ ,

$$\mathbb{P}(A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \dots \cap A_{i_\ell}) = \mathbb{P}(A_{i_1}) \cdots \mathbb{P}(A_{i_\ell}).$$

# Notion d'indépendance

## Définition

Soit  $(\Omega, \mathbb{P})$  un espace de probabilités.

- ▶ Soient  $A$  et  $B$  deux événements de  $\Omega$ . On dit que  $A$  et  $B$  sont **indépendants** si on a  $\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)$ .
- ▶ Plus généralement, soit  $(A_i)_{i \in I}$ , une famille (finie ou infinie) d'événements de  $\Omega$ . Ces événements sont **indépendants** si on a, pour toute partie finie  $J = \{i_1, \dots, i_\ell\} \subset I$ ,

$$\mathbb{P}(A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \dots \cap A_{i_\ell}) = \mathbb{P}(A_{i_1}) \dots \mathbb{P}(A_{i_\ell}).$$

- ▶ **Remarque** : la définition mathématique ne s'intéresse pas à la notion de cause ; il arrive qu'on découvre (par le calcul de probabilités) que des événements sont indépendants alors que leur définition ne le fait pas apparaître.

# Notion d'indépendance

## Définition

Soit  $(\Omega, \mathbb{P})$  un espace de probabilités.

- ▶ Soient  $A$  et  $B$  deux événements de  $\Omega$ . On dit que  $A$  et  $B$  sont **indépendants** si on a  $\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)$ .
- ▶ Plus généralement, soit  $(A_i)_{i \in I}$ , une famille (finie ou infinie) d'événements de  $\Omega$ . Ces événements sont **indépendants** si on a, pour toute partie finie  $J = \{i_1, \dots, i_\ell\} \subset I$ ,

$$\mathbb{P}(A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \dots \cap A_{i_\ell}) = \mathbb{P}(A_{i_1}) \dots \mathbb{P}(A_{i_\ell}).$$

- ▶ **Remarque** : la définition mathématique ne s'intéresse pas à la notion de cause ; il arrive qu'on découvre (par le calcul de probabilités) que des événements sont indépendants alors que leur définition ne le fait pas apparaître.
- ▶ La définition générale n'est pas simple, il est facile de s'en souvenir de travers. . .

## Un exemple d'indépendance partielle

On considère l'expérience suivante : on tire deux fois à pile ou face, indépendamment, avec une pièce équilibrée. On note  $A$  l'événement "le premier tirage donne Pile",  $B$  l'événement "le second tirage donne Pile", et  $C$  l'événement "les deux tirages donnent des résultats égaux".

## Un exemple d'indépendance partielle

On considère l'expérience suivante : on tire deux fois à pile ou face, indépendamment, avec une pièce équilibrée. On note  $A$  l'événement "le premier tirage donne Pile",  $B$  l'événement "le second tirage donne Pile", et  $C$  l'événement "les deux tirages donnent des résultats égaux".

Le modèle naturel est par exemple  $\Omega = \{PP, PF, FP, FF\}$ , avec la loi uniforme.

## Un exemple d'indépendance partielle

On considère l'expérience suivante : on tire deux fois à pile ou face, indépendamment, avec une pièce équilibrée. On note  $A$  l'événement "le premier tirage donne Pile",  $B$  l'événement "le second tirage donne Pile", et  $C$  l'événement "les deux tirages donnent des résultats égaux".

Le modèle naturel est par exemple  $\Omega = \{PP, PF, FP, FF\}$ , avec la loi uniforme. On a alors  $A = \{PP, PF\}$ ,  $B = \{PP, FP\}$ , et  $C = \{PP, FF\}$ .

## Un exemple d'indépendance partielle

On considère l'expérience suivante : on tire deux fois à pile ou face, indépendamment, avec une pièce équilibrée. On note  $A$  l'événement "le premier tirage donne Pile",  $B$  l'événement "le second tirage donne Pile", et  $C$  l'événement "les deux tirages donnent des résultats égaux".

Le modèle naturel est par exemple  $\Omega = \{PP, PF, FP, FF\}$ , avec la loi uniforme. On a alors  $A = \{PP, PF\}$ ,  $B = \{PP, FP\}$ , et  $C = \{PP, FF\}$ .

- ▶ On calcule facilement :  $\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(C) = 1/2$ .

## Un exemple d'indépendance partielle

On considère l'expérience suivante : on tire deux fois à pile ou face, indépendamment, avec une pièce équilibrée. On note  $A$  l'événement "le premier tirage donne Pile",  $B$  l'événement "le second tirage donne Pile", et  $C$  l'événement "les deux tirages donnent des résultats égaux".

Le modèle naturel est par exemple  $\Omega = \{PP, PF, FP, FF\}$ , avec la loi uniforme. On a alors  $A = \{PP, PF\}$ ,  $B = \{PP, FP\}$ , et  $C = \{PP, FF\}$ .

- ▶ On calcule facilement :  $\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(C) = 1/2$ .
- ▶ Ces trois événements sont indépendants deux à deux :  
 $\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A \cap C) = \mathbb{P}(B \cap C) = 1/4$ .

## Un exemple d'indépendance partielle

On considère l'expérience suivante : on tire deux fois à pile ou face, indépendamment, avec une pièce équilibrée. On note  $A$  l'événement "le premier tirage donne Pile",  $B$  l'événement "le second tirage donne Pile", et  $C$  l'événement "les deux tirages donnent des résultats égaux".

Le modèle naturel est par exemple  $\Omega = \{PP, PF, FP, FF\}$ , avec la loi uniforme. On a alors  $A = \{PP, PF\}$ ,  $B = \{PP, FP\}$ , et  $C = \{PP, FF\}$ .

- ▶ On calcule facilement :  $\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(C) = 1/2$ .
- ▶ Ces trois événements sont indépendants deux à deux :  
 $\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A \cap C) = \mathbb{P}(B \cap C) = 1/4$ .
- ▶ Mais ils ne sont pas indépendants globalement :  
 $A \cap B \cap C = \emptyset$ , donc  $\mathbb{P}(A \cap B \cap C) = 0 \neq 1/8$ .

## Espace produit, probabilité produit

Considérons deux espaces de probabilités,  $(\Omega_1, \mathbb{P}_1)$  et  $(\Omega_2, \mathbb{P}_2)$  (idée : chacun modélise une certaine expérience) ; on définit leur *espace produit*  $(\Omega, \mathbb{P})$  de la manière suivante :

- ▶  $\Omega = \Omega_1 \times \Omega_2$  (les éléments de  $\Omega$  sont les *couples*  $(x, y)$  avec  $x \in \Omega_1$  et  $y \in \Omega_2$ ) ;
- ▶  $\mathbb{P}$  est définie via le théorème de définition des probabilités : on pose  $p_1(x) = \mathbb{P}_1(\{x\})$  pour  $x \in \Omega_1$ ,  $p_2(y) = \mathbb{P}_2(\{y\})$  pour  $y \in \Omega_2$ , et  $p(x, y) = p_1(x) \cdot p_2(y)$  pour  $(x, y) \in \Omega$  ; et on utilise  $p$  pour définir  $\mathbb{P}$ .

## Espace produit, probabilité produit

Considérons deux espaces de probabilités,  $(\Omega_1, \mathbb{P}_1)$  et  $(\Omega_2, \mathbb{P}_2)$  (idée : chacun modélise une certaine expérience) ; on définit leur *espace produit*  $(\Omega, \mathbb{P})$  de la manière suivante :

- ▶  $\Omega = \Omega_1 \times \Omega_2$  (les éléments de  $\Omega$  sont les *couples*  $(x, y)$  avec  $x \in \Omega_1$  et  $y \in \Omega_2$ ) ;
- ▶  $\mathbb{P}$  est définie via le théorème de définition des probabilités : on pose  $p_1(x) = \mathbb{P}_1(\{x\})$  pour  $x \in \Omega_1$ ,  $p_2(y) = \mathbb{P}_2(\{y\})$  pour  $y \in \Omega_2$ , et  $p(x, y) = p_1(x) \cdot p_2(y)$  pour  $(x, y) \in \Omega$  ; et on utilise  $p$  pour définir  $\mathbb{P}$ .

Cette construction correspond à la situation où on effectue (simultanément ou successivement, peu importe ; mais indépendamment) les deux expériences correspondant aux espaces  $(\Omega_1, \mathbb{P}_1)$  et  $(\Omega_2, \mathbb{P}_2)$  ; cela permet d'avoir un même espace où on peut définir des événements qui portent sur les résultats des **deux** expériences.

## Espace produit, probabilité produit

Considérons deux espaces de probabilités,  $(\Omega_1, \mathbb{P}_1)$  et  $(\Omega_2, \mathbb{P}_2)$  (idée : chacun modélise une certaine expérience) ; on définit leur *espace produit*  $(\Omega, \mathbb{P})$  de la manière suivante :

- ▶  $\Omega = \Omega_1 \times \Omega_2$  (les éléments de  $\Omega$  sont les *couples*  $(x, y)$  avec  $x \in \Omega_1$  et  $y \in \Omega_2$ ) ;
- ▶  $\mathbb{P}$  est définie via le théorème de définition des probabilités : on pose  $p_1(x) = \mathbb{P}_1(\{x\})$  pour  $x \in \Omega_1$ ,  $p_2(y) = \mathbb{P}_2(\{y\})$  pour  $y \in \Omega_2$ , et  $p(x, y) = p_1(x) \cdot p_2(y)$  pour  $(x, y) \in \Omega$  ; et on utilise  $p$  pour définir  $\mathbb{P}$ .

Cette construction correspond à la situation où on effectue (simultanément ou successivement, peu importe ; mais indépendamment) les deux expériences correspondant aux espaces  $(\Omega_1, \mathbb{P}_1)$  et  $(\Omega_2, \mathbb{P}_2)$  ; cela permet d'avoir un même espace où on peut définir des événements qui portent sur les résultats des **deux** expériences.

(Se généralise à un produit de  $k$  espaces ; on pourrait même faire un produit d'une infinité d'espaces, mais  $\Omega$  ne serait plus dénombrable.)

# Notion de probabilité conditionnelle

**Notion importante**, et pas forcément intuitive, destinée à capturer une situation où une expérience aléatoire est faite, mais on n'en apprend pas “tout” le résultat ; on apprend seulement une information partielle, qui **modifie** notre estimation des probabilités de divers événements.

# Notion de probabilité conditionnelle

**Notion importante**, et pas forcément intuitive, destinée à capturer une situation où une expérience aléatoire est faite, mais on n'en apprend pas “tout” le résultat ; on apprend seulement une information partielle, qui **modifie** notre estimation des probabilités de divers événements.

**Exemple** : on lance deux dés équilibrés, et on s'intéresse à la probabilité que la somme des deux dés soit 11.

# Notion de probabilité conditionnelle

**Notion importante**, et pas forcément intuitive, destinée à capturer une situation où une expérience aléatoire est faite, mais on n'en apprend pas “tout” le résultat ; on apprend seulement une information partielle, qui **modifie** notre estimation des probabilités de divers événements.

**Exemple** : on lance deux dés équilibrés, et on s'intéresse à la probabilité que la somme des deux dés soit 11.

- ▶ *A priori*, la probabilité que cela se produise est  $1/18$

# Notion de probabilité conditionnelle

**Notion importante**, et pas forcément intuitive, destinée à capturer une situation où une expérience aléatoire est faite, mais on n'en apprend pas “tout” le résultat ; on apprend seulement une information partielle, qui **modifie** notre estimation des probabilités de divers événements.

**Exemple** : on lance deux dés équilibrés, et on s'intéresse à la probabilité que la somme des deux dés soit 11.

- ▶ *A priori*, la probabilité que cela se produise est  $1/18$
- ▶ Si on sait que *le premier dé donne 6*, la probabilité devient  $1/6$  (cela correspond à la probabilité que le second dé, lancé seul, donne 5)

# Notion de probabilité conditionnelle

**Notion importante**, et pas forcément intuitive, destinée à capturer une situation où une expérience aléatoire est faite, mais on n'en apprend pas “tout” le résultat ; on apprend seulement une information partielle, qui **modifie** notre estimation des probabilités de divers événements.

**Exemple** : on lance deux dés équilibrés, et on s'intéresse à la probabilité que la somme des deux dés soit 11.

- ▶ *A priori*, la probabilité que cela se produise est  $1/18$
- ▶ Si on sait que *le premier dé donne 6*, la probabilité devient  $1/6$  (cela correspond à la probabilité que le second dé, lancé seul, donne 5)
- ▶ Si on sait que *au moins un des dés donne 6*, la probabilité devient. . .

# Probabilité conditionnelle

## Définition

Soit  $(\Omega, \mathbb{P})$  un espace de probabilités, et  $B$  un événement de  $\Omega$ , de probabilité **strictement** positive ( $\mathbb{P}(B) > 0$ ).

Alors pour tout événement  $A$  de  $\Omega$ , on appelle *probabilité de  $A$  sachant  $B$* , notée  $\mathbb{P}(A|B)$  ou  $\mathbb{P}_B(A)$ , la quantité

$$\mathbb{P}(A|B) = \mathbb{P}_B(A) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)}.$$

# Probabilité conditionnelle

## Définition

Soit  $(\Omega, \mathbb{P})$  un espace de probabilités, et  $B$  un événement de  $\Omega$ , de probabilité **strictement** positive ( $\mathbb{P}(B) > 0$ ).

Alors pour tout événement  $A$  de  $\Omega$ , on appelle *probabilité de  $A$  sachant  $B$* , notée  $\mathbb{P}(A|B)$  ou  $\mathbb{P}_B(A)$ , la quantité

$$\mathbb{P}(A|B) = \mathbb{P}_B(A) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)}.$$

**Attention, erreur fréquente :** ne pas confondre  $\mathbb{P}(A \cap B)$  (probabilité de “ $A$  et  $B$ ”) et  $\mathbb{P}(A|B)$  (probabilité de  $A$  sachant  $B$ )...

## Retour sur les deux dés

On lance deux dés : on prend naturellement un espace produit,  $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\} \times \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$  avec la loi uniforme ; l'événement  $A$  "la somme des deux dés donne 11" est alors  $A = \{(5, 6), (6, 5)\}$ , sa probabilité est  $2/36 = 1/18$ .

## Retour sur les deux dés

On lance deux dés : on prend naturellement un espace produit,  $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\} \times \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$  avec la loi uniforme ; l'événement  $A$  "la somme des deux dés donne 11" est alors  $A = \{(5, 6), (6, 5)\}$ , sa probabilité est  $2/36 = 1/18$ .  
L'événement  $B_1$  "le premier dé donne 6" s'écrit alors  $B = \{(6, 1), (6, 2), (6, 3), (6, 4), (6, 5), (6, 6)\}$  ; sa probabilité est  $6/36 = 1/6$ .

## Retour sur les deux dés

On lance deux dés : on prend naturellement un espace produit,  $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\} \times \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$  avec la loi uniforme ; l'événement  $A$  "la somme des deux dés donne 11" est alors  $A = \{(5, 6), (6, 5)\}$ , sa probabilité est  $2/36 = 1/18$ .

L'événement  $B_1$  "le premier dé donne 6" s'écrit alors  $B = \{(6, 1), (6, 2), (6, 3), (6, 4), (6, 5), (6, 6)\}$  ; sa probabilité est  $6/36 = 1/6$ . On calcule :  $A \cap B_1 = \{(6, 5)\}$ ,  $\mathbb{P}(A \cap B_1) = 1/36$  donc  $\mathbb{P}(A|B_1) = (1/36)/(6/36) = 1/6$ .

## Retour sur les deux dés

On lance deux dés : on prend naturellement un espace produit,  $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\} \times \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$  avec la loi uniforme ; l'événement  $A$  "la somme des deux dés donne 11" est alors  $A = \{(5, 6), (6, 5)\}$ , sa probabilité est  $2/36 = 1/18$ .

L'événement  $B_1$  "le premier dé donne 6" s'écrit alors  $B = \{(6, 1), (6, 2), (6, 3), (6, 4), (6, 5), (6, 6)\}$  ; sa probabilité est  $6/36 = 1/6$ . On calcule :  $A \cap B_1 = \{(6, 5)\}$ ,  $\mathbb{P}(A \cap B_1) = 1/36$  donc  $\mathbb{P}(A|B_1) = (1/36)/(6/36) = 1/6$ .

Avec  $B_2$  "l'un au moins des deux dés donne 6", on a  $B_2 = \{(1, 6), (2, 6), (3, 6), (4, 6), (5, 6), (6, 1), (6, 2), (6, 3), (6, 4), (6, 5), (6, 6)\}$ , et  $\mathbb{P}(B_2) = 11/36$ .

## Retour sur les deux dés

On lance deux dés : on prend naturellement un espace produit,  $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\} \times \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$  avec la loi uniforme ; l'événement  $A$  "la somme des deux dés donne 11" est alors  $A = \{(5, 6), (6, 5)\}$ , sa probabilité est  $2/36 = 1/18$ .

L'événement  $B_1$  "le premier dé donne 6" s'écrit alors  $B = \{(6, 1), (6, 2), (6, 3), (6, 4), (6, 5), (6, 6)\}$  ; sa probabilité est  $6/36 = 1/6$ . On calcule :  $A \cap B_1 = \{(6, 5)\}$ ,  $\mathbb{P}(A \cap B_1) = 1/36$  donc  $\mathbb{P}(A|B_1) = (1/36)/(6/36) = 1/6$ .

Avec  $B_2$  "l'un au moins des deux dés donne 6", on a  $B_2 = \{(1, 6), (2, 6), (3, 6), (4, 6), (5, 6), (6, 1), (6, 2), (6, 3), (6, 4), (6, 5), (6, 6)\}$ , et  $\mathbb{P}(B_2) = 11/36$ . On calcule de nouveau :

$A \cap B_2 = \{(6, 5), (5, 6)\}$ ,  $\mathbb{P}(A \cap B_2) = 2/36$ , donc  $\mathbb{P}(A|B_2) = (2/36)/(11/36) = 2/11$ .

# Interprétation “fréquentiste” de la probabilité conditionnelle

Imaginons qu'on réalise un très grand nombre  $N$  de fois, indépendamment, l'expérience modélisée par  $\Omega$ ; on note  $n_A$  le nombre de fois où  $A$  se réalise,  $n_B$  le nombre de fois où  $B$  se réalise, et  $n_{AB}$  le nombre de fois où  $A \cap B$  se réalise (*i.e.*, le nombre de fois où  $A$  et  $B$  se réalisent tous les deux).

# Interprétation “fréquentiste” de la probabilité conditionnelle

Imaginons qu'on réalise un très grand nombre  $N$  de fois, indépendamment, l'expérience modélisée par  $\Omega$ ; on note  $n_A$  le nombre de fois où  $A$  se réalise,  $n_B$  le nombre de fois où  $B$  se réalise, et  $n_{AB}$  le nombre de fois où  $A \cap B$  se réalise (*i.e.*, le nombre de fois où  $A$  et  $B$  se réalisent tous les deux).

On s'attend à ce que l'on ait  $n_A/N \simeq \mathbb{P}(A)$ ,  $n_B/N \simeq \mathbb{P}(B)$ , et  $n_{AB}/N \simeq \mathbb{P}(A \cap B)$ .

# Interprétation “fréquentiste” de la probabilité conditionnelle

Imaginons qu'on réalise un très grand nombre  $N$  de fois, indépendamment, l'expérience modélisée par  $\Omega$ ; on note  $n_A$  le nombre de fois où  $A$  se réalise,  $n_B$  le nombre de fois où  $B$  se réalise, et  $n_{AB}$  le nombre de fois où  $A \cap B$  se réalise (*i.e.*, le nombre de fois où  $A$  et  $B$  se réalisent tous les deux).

On s'attend à ce que l'on ait  $n_A/N \simeq \mathbb{P}(A)$ ,  $n_B/N \simeq \mathbb{P}(B)$ , et  $n_{AB}/N \simeq \mathbb{P}(A \cap B)$ .

Donc, on devrait avoir  $n_{AB}/n_B \simeq \mathbb{P}(A \cap B)/\mathbb{P}(B)$ ; or ce ratio représente, **parmi** les  $n_B$  essais où  $B$  se réalise, la proportion (fréquence) de ceux où  $A$  se réalise.

## Probabilité conditionnelle (suite)

La notation  $\mathbb{P}_B(A)$  n'est pas fortuite :  $\mathbb{P}_B$  est une vraie loi de probabilités.

### Proposition

Soit  $(\Omega, \mathbb{P})$  un espace de probabilités, et  $B$  un événement de probabilité strictement positive. La fonction  $\mathbb{P}_B : \text{Parties}(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$  définie par  $\mathbb{P}_B(A) = \mathbb{P}(A|B)$ , est bien une loi de probabilités sur  $\Omega$ .

## Probabilité conditionnelle (suite)

La notation  $\mathbb{P}_B(A)$  n'est pas fortuite :  $\mathbb{P}_B$  est une vraie loi de probabilités.

### Proposition

Soit  $(\Omega, \mathbb{P})$  un espace de probabilités, et  $B$  un événement de probabilité strictement positive. La fonction  $\mathbb{P}_B : \text{Parties}(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$  définie par  $\mathbb{P}_B(A) = \mathbb{P}(A|B)$ , est bien une loi de probabilités sur  $\Omega$ .

**Preuve** : tableau

## Probabilité conditionnelle (suite)

La notation  $\mathbb{P}_B(A)$  n'est pas fortuite :  $\mathbb{P}_B$  est une vraie loi de probabilités.

### Proposition

Soit  $(\Omega, \mathbb{P})$  un espace de probabilités, et  $B$  un événement de probabilité strictement positive. La fonction  $\mathbb{P}_B : \text{Parties}(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$  définie par  $\mathbb{P}_B(A) = \mathbb{P}(A|B)$ , est bien une loi de probabilités sur  $\Omega$ .

**Note :**  $\mathbb{P}_B$  est une loi de probabilités sur  $\Omega$ , qui satisfait  $\mathbb{P}_B(B) = 1$  ; on l'assimile parfois à une loi de probabilités *sur*  $B$ .

# Probabilité conditionnelle et indépendance

On remarque la chose suivante : si  $A$  et  $B$  sont tous les deux de probabilité strictement positive,  $A$  et  $B$  sont indépendants **si et seulement si** on a  $\mathbb{P}(A|B) = \mathbb{P}(A)$ .

# Probabilité conditionnelle et indépendance

On remarque la chose suivante : si  $A$  et  $B$  sont tous les deux de probabilité strictement positive,  $A$  et  $B$  sont indépendants **si et seulement si** on a  $\mathbb{P}(A|B) = \mathbb{P}(A)$ .

“Apprendre que  $B$  se produit, ne modifie pas la probabilité que  $A$  se produise”

# Formule des probabilités totales

- ▶ **Définition** : des événements  $A_1, \dots, A_k$  forment une *partition* de l'univers  $\Omega$ , s'ils sont deux à deux disjoints et que l'on a  $\Omega = A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_k$  (*tout élément  $x$  de  $\Omega$  est dans **un et un seul** des  $A_i$* ).

# Formule des probabilités totales

- ▶ **Définition** : des événements  $A_1, \dots, A_k$  forment une *partition* de l'univers  $\Omega$ , s'ils sont deux à deux disjoints et que l'on a  $\Omega = A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_k$  (*tout élément  $x$  de  $\Omega$  est dans **un et un seul** des  $A_i$* ).
- ▶ **Formule des probabilités totales** : si  $A_1, \dots, A_k$  sont une partition de  $\Omega$  et ont chacun une probabilité strictement positive, alors, pour tout événement  $B$ , on a

$$\mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(B|A_1).\mathbb{P}(A_1) + \mathbb{P}(B|A_2).\mathbb{P}(A_2) + \dots + \mathbb{P}(B|A_k).\mathbb{P}(A_k).$$

# Formule des probabilités totales

- ▶ **Définition** : des événements  $A_1, \dots, A_k$  forment une *partition* de l'univers  $\Omega$ , s'ils sont deux à deux disjoints et que l'on a  $\Omega = A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_k$  (*tout élément  $x$  de  $\Omega$  est dans **un et un seul** des  $A_i$* ).
- ▶ **Formule des probabilités totales** : si  $A_1, \dots, A_k$  sont une partition de  $\Omega$  et ont chacun une probabilité strictement positive, alors, pour tout événement  $B$ , on a

$$\mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(B|A_1).\mathbb{P}(A_1) + \mathbb{P}(B|A_2).\mathbb{P}(A_2) + \dots + \mathbb{P}(B|A_k).\mathbb{P}(A_k).$$

- ▶ (se généralise à une famille infinie dénombrable  $(A_i)_{i \in \mathbb{N}}$ )

# Formule de Bayes

- ▶ utilisée pour “inverser un conditionnement” : calculer la probabilité de  $A$  sachant  $B$ , quand on connaît la probabilité de  $B$  sachant  $A$  (et les probabilités de  $A$  et  $B$ )

# Formule de Bayes

- ▶ utilisée pour “inverser un conditionnement” : calculer la probabilité de  $A$  sachant  $B$ , quand on connaît la probabilité de  $B$  sachant  $A$  (et les probabilités de  $A$  et  $B$ )
- ▶ **Formule de Bayes** : si  $A$  et  $B$  sont deux événements de probabilité strictement positive, alors on a

$$\mathbb{P}(A|B) = \mathbb{P}(B|A) \frac{\mathbb{P}(A)}{\mathbb{P}(B)}$$

# Formule de Bayes

- ▶ utilisée pour “inverser un conditionnement” : calculer la probabilité de  $A$  sachant  $B$ , quand on connaît la probabilité de  $B$  sachant  $A$  (et les probabilités de  $A$  et  $B$ )
- ▶ **Formule de Bayes** : si  $A$  et  $B$  sont deux événements de probabilité strictement positive, alors on a

$$\mathbb{P}(A|B) = \mathbb{P}(B|A) \frac{\mathbb{P}(A)}{\mathbb{P}(B)}$$

- ▶ En réécrivant  $\mathbb{P}(B)$  par la formule des probabilités totales ( $A, \bar{A}$  forment une partition) :

$$\mathbb{P}(A|B) = \frac{\mathbb{P}(B|A)\mathbb{P}(A)}{\mathbb{P}(B|A)\mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B|\bar{A})\mathbb{P}(\bar{A})}$$

## Formule de Bayes

- ▶ utilisée pour “inverser un conditionnement” : calculer la probabilité de  $A$  sachant  $B$ , quand on connaît la probabilité de  $B$  sachant  $A$  (et les probabilités de  $A$  et  $B$ )
- ▶ **Formule de Bayes** : si  $A$  et  $B$  sont deux événements de probabilité strictement positive, alors on a

$$\mathbb{P}(A|B) = \mathbb{P}(B|A) \frac{\mathbb{P}(A)}{\mathbb{P}(B)}$$

- ▶ En réécrivant  $\mathbb{P}(B)$  par la formule des probabilités totales ( $A, \bar{A}$  forment une partition) :

$$\mathbb{P}(A|B) = \frac{\mathbb{P}(B|A)\mathbb{P}(A)}{\mathbb{P}(B|A)\mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B|\bar{A})\mathbb{P}(\bar{A})}$$

- ▶ “Un test de dépistage a 95% de chances de détecter correctement le virus  $V$  chez un porteur, mais aussi 1% de le détecter incorrectement chez un non porteur. On estime à 2% la proportion de porteurs du virus dans la population. Quelle est la probabilité d’être porteur du virus si le test est positif?”

## Quelques problèmes de modélisation/calcul

- ▶ On dispose de trois jetons de couleur : un a deux côtés blancs, un a deux côtés noirs, et un a un côté blanc et un côté noir. On tire un des trois jetons de manière aléatoire uniforme, et on le pose d'un côté aléatoire uniforme.
  - ▶ Quelle est la probabilité que le jeton choisi ait ses deux faces de la même couleur ?
  - ▶ Quelle est la probabilité que la face cachée soit blanche ?
  - ▶ La face visible est blanche ; quelle est la probabilité que la face cachée soit blanche ?

## Modélisation/calcul (2)

Ce problème se présente comme un jeu télévisé. Le candidat a face à lui trois portes fermées, dont une cache un cadeau de valeur et les deux autres un prix sans valeur. Les règles du jeu sont les suivantes :

1. Le candidat désigne une porte de son choix.
2. Le présentateur du jeu, qui sait quelle porte cache le cadeau de valeur, ouvre alors une porte, qui ne peut pas être celle montrée par le candidat, et derrière laquelle se trouve un cadeau sans valeur (s'il a le choix, il choisit au hasard).
3. Le candidat doit alors choisir définitivement une des portes restantes (soit celle qu'il avait désignée, soit la troisième porte), et il partira avec le cadeau qu'elle cache.

Le candidat peut-il adopter une stratégie "intelligente" pour maximiser ses chances d'obtenir le cadeau de valeur, ou est-ce qu'il n'a aucune prise sur ses chances ? S'il dispose d'une stratégie meilleure que les autres, quelle est-elle, et quelles sont alors ses chances d'obtenir le cadeau de valeur ?

# Notion de “variable aléatoire”

- ▶ *Intuitivement*, la notion de variable aléatoire recouvre *toute quantité (souvent numérique, mais pas forcément) que l'on peut déterminer en connaissant entièrement le résultat d'une expérience.*
- ▶ **Définition** : si  $(\Omega, \mathbb{P})$  est un espace de probabilités, une *variable aléatoires* sur  $\Omega$ , à valeurs dans un ensemble  $E$ , est n'importe quelle fonction  $X : \Omega \rightarrow E$ .

## Notion de “variable aléatoire”

- ▶ *Intuitivement*, la notion de variable aléatoire recouvre *toute quantité (souvent numérique, mais pas forcément) que l'on peut déterminer en connaissant entièrement le résultat d'une expérience.*
- ▶ **Définition** : si  $(\Omega, \mathbb{P})$  est un espace de probabilités, une *variable aléatoires* sur  $\Omega$ , à valeurs dans un ensemble  $E$ , est n'importe quelle fonction  $X : \Omega \rightarrow E$ .
- ▶ (Dans un cours plus complet de probabilités, il faudrait que  $X$  soit une fonction “mesurable” ; dans notre cadre, où  $\Omega$  est fini ou dénombrable, on peut considérer que toute fonction est mesurable)

## Notion de “variable aléatoire”

- ▶ *Intuitivement*, la notion de variable aléatoire recouvre *toute quantité (souvent numérique, mais pas forcément) que l'on peut déterminer en connaissant entièrement le résultat d'une expérience.*
- ▶ **Définition** : si  $(\Omega, \mathbb{P})$  est un espace de probabilités, une *variable aléatoires* sur  $\Omega$ , à valeurs dans un ensemble  $E$ , est n'importe quelle fonction  $X : \Omega \rightarrow E$ .
- ▶ (Dans un cours plus complet de probabilités, il faudrait que  $X$  soit une fonction “mesurable” ; dans notre cadre, où  $\Omega$  est fini ou dénombrable, on peut considérer que toute fonction est mesurable)
- ▶ **Note** : la terminologie est trompeuse : une variable aléatoire n'est pas une variable, c'est plutôt une fonction ; elle n'est pas vraiment aléatoire (ne dépend pas de la loi de probabilités). . .mais on ne va pas changer un siècle d'habitudes !

## Exemples

- ▶ Avec une expérience “lancer de deux dés” modélisée par un espace  $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}^2$ , on peut définir des variables aléatoires :

## Exemples

- ▶ Avec une expérience “lancer de deux dés” modélisée par un espace  $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}^2$ , on peut définir des variables aléatoires :
  - ▶ résultat du premier dé :  $X_1(x, y) = x$  ;

# Exemples

- ▶ Avec une expérience “lancer de deux dés” modélisée par un espace  $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}^2$ , on peut définir des variables aléatoires :
  - ▶ résultat du premier dé :  $X_1(x, y) = x$  ;
  - ▶ résultat du second dé :  $X_2(x, y) = y$  ;

# Exemples

- ▶ Avec une expérience “lancer de deux dés” modélisée par un espace  $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}^2$ , on peut définir des variables aléatoires :
  - ▶ résultat du premier dé :  $X_1(x, y) = x$  ;
  - ▶ résultat du second dé :  $X_2(x, y) = y$  ;
  - ▶ somme des deux dés :  $X_3(x, y) = x + y = X_1(x, y) + X_2(x, y)$

# Exemples

- ▶ Avec une expérience “lancer de deux dés” modélisée par un espace  $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}^2$ , on peut définir des variables aléatoires :
  - ▶ résultat du premier dé :  $X_1(x, y) = x$  ;
  - ▶ résultat du second dé :  $X_2(x, y) = y$  ;
  - ▶ somme des deux dés :  $X_3(x, y) = x + y = X_1(x, y) + X_2(x, y)$
  - ▶ nombre de dés donnant un résultat pair :  
 $X_4(x, y) = [[x \in \{2, 4, 6\}]] + [[y \in \{2, 4, 6\}]]$  (**Notation :**  
[[cond]] = 1 si *cond* est vraie, 0 sinon)

## Exemples

- ▶ Avec une expérience “lancer de deux dés” modélisée par un espace  $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}^2$ , on peut définir des variables aléatoires :
  - ▶ résultat du premier dé :  $X_1(x, y) = x$  ;
  - ▶ résultat du second dé :  $X_2(x, y) = y$  ;
  - ▶ somme des deux dés :  $X_3(x, y) = x + y = X_1(x, y) + X_2(x, y)$
  - ▶ nombre de dés donnant un résultat pair :  
 $X_4(x, y) = [[x \in \{2, 4, 6\}]] + [[y \in \{2, 4, 6\}]]$  (**Notation :**  
[[cond]] = 1 si *cond* est vraie, 0 sinon)
- ▶ Avec une expérience “tirage d'une main de belote”, modélisée par exemple par  $\Omega = \text{Parties}_8(\{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, V, D, R, A\} \times \{P, C, K, T\})$ , on pourrait définir des variables aléatoires “nombre de Piques”, “nombre d'As”, “liste des couleurs où on a au moins 4 cartes”, “liste des couleurs où on détient le Valet”...

# Loi d'une variable aléatoire

La notion de variable aléatoire est trop générale et floue pour être immédiatement intéressante ; elle prend son sens quand on s'intéresse à la *loi* d'une variable aléatoire.

## Définition/Théorème (loi d'une variable aléatoire)

Soit  $(\Omega, \mathbb{P})$  un espace de probabilités, et  $X$  une variable aléatoire sur  $\Omega$ , à valeur dans un ensemble  $E$ . La **loi** de  $X$  est par définition la loi de probabilités sur  $E$ , notée  $\mathbb{P}_X$ , définie par : pour toute partie  $F \subset E$ ,

$$\mathbb{P}_X(F) = \mathbb{P}(\{t \in \Omega : X(t) \in F\}).$$

(**c'est** une loi de probabilités sur  $E$ )

## Digérons cette définition. . .

- ▶ L'ensemble  $\{t \in \Omega : X(t) \in F\}$  est une partie de  $\Omega$  : c'est bien un événement sur  $\Omega$

## Digérons cette définition. . .

- ▶ L'ensemble  $\{t \in \Omega : X(t) \in F\}$  est une partie de  $\Omega$  : c'est bien un événement sur  $\Omega$
- ▶ On le note souvent  $X^{-1}(F)$  **Attention** : c'est une notation, il n'existe pas de fonction  $X^{-1}$ .

## Digérons cette définition. . .

- ▶ L'ensemble  $\{t \in \Omega : X(t) \in F\}$  est une partie de  $\Omega$  : c'est bien un événement sur  $\Omega$
- ▶ On le note souvent  $X^{-1}(F)$  **Attention** : c'est une notation, il n'existe pas de fonction  $X^{-1}$ .
- ▶ On le note également  $(X \in F)$  (on fait disparaître la variable de l'écriture ; **l'espace de probabilités n'est pas important, on est plus intéressé par les lois des variables aléatoires qu'on y définit**). Notamment, c'est ce qui se cache derrière la notation  $\mathbb{P}(X \in F)$ .

## Digérons cette définition. . .

- ▶ L'ensemble  $\{t \in \Omega : X(t) \in F\}$  est une partie de  $\Omega$  : c'est bien un événement sur  $\Omega$
- ▶ On le note souvent  $X^{-1}(F)$  **Attention** : c'est une notation, il n'existe pas de fonction  $X^{-1}$ .
- ▶ On le note également  $(X \in F)$  (on fait disparaître la variable de l'écriture ; **l'espace de probabilités n'est pas important, on est plus intéressé par les lois des variables aléatoires qu'on y définit**). Notamment, c'est ce qui se cache derrière la notation  $\mathbb{P}(X \in F)$ .
- ▶ Quand  $F = \{f\}$  ( $F$  est un singleton), on accepte pour le même événement, la notation  $(X = f)$  ; encore une fois, cette notation est juste une façon commode de noter un événement sur  $\Omega$ .

## Digérons cette définition. . .

- ▶ L'ensemble  $\{t \in \Omega : X(t) \in F\}$  est une partie de  $\Omega$  : c'est bien un événement sur  $\Omega$
- ▶ On le note souvent  $X^{-1}(F)$  **Attention** : c'est une notation, il n'existe pas de fonction  $X^{-1}$ .
- ▶ On le note également  $(X \in F)$  (on fait disparaître la variable de l'écriture ; **l'espace de probabilités n'est pas important, on est plus intéressé par les lois des variables aléatoires qu'on y définit**). Notamment, c'est ce qui se cache derrière la notation  $\mathbb{P}(X \in F)$ .
- ▶ Quand  $F = \{f\}$  ( $F$  est un singleton), on accepte pour le même événement, la notation  $(X = f)$  ; encore une fois, cette notation est juste une façon commode de noter un événement sur  $\Omega$ .
- ▶ **Remarque** : si la variable aléatoire  $X$  ne dépend pas de la loi de probabilités  $\mathbb{P}$  qu'on met sur  $\Omega$ , sa loi  $\mathbb{P}_X$ , elle, en dépend !

## Un exemple de calcul de loi

Prenons une expérience consistant à lancer deux dés équilibrés : on peut modéliser ça par l'espace  $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}^2$ , avec la probabilité uniforme. Calculons la loi de la variable aléatoire "maximum des deux dés".

- ▶ On définit, pour  $(x, y) \in \Omega$ ,  $M(x, y) = \max(x, y)$ , à valeur dans  $E = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ .

## Un exemple de calcul de loi

Prenons une expérience consistant à lancer deux dés équilibrés : on peut modéliser ça par l'espace  $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}^2$ , avec la probabilité uniforme. Calculons la loi de la variable aléatoire “maximum des deux dés”.

- ▶ On définit, pour  $(x, y) \in \Omega$ ,  $M(x, y) = \max(x, y)$ , à valeur dans  $E = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ .
- ▶ Pour décrire la loi de  $M$ , il suffit de décrire la probabilité  $\mathbb{P}_M$  pour les singletons de  $E$ , i.e.,  $\mathbb{P}(M = i)$  pour chaque  $i \in E$  :

## Un exemple de calcul de loi

Prenons une expérience consistant à lancer deux dés équilibrés : on peut modéliser ça par l'espace  $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}^2$ , avec la probabilité uniforme. Calculons la loi de la variable aléatoire "maximum des deux dés".

- ▶ On définit, pour  $(x, y) \in \Omega$ ,  $M(x, y) = \max(x, y)$ , à valeur dans  $E = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ .
- ▶ Pour décrire la loi de  $M$ , il suffit de décrire la probabilité  $\mathbb{P}_M$  pour les singletons de  $E$ , i.e.,  $\mathbb{P}(M = i)$  pour chaque  $i \in E$  :
- ▶ pour  $i = 1$ , c'est facile,  $(M = 1) = \{(1, 1)\}$  et  $\mathbb{P}(M = 1) = 1/36$  ;

## Un exemple de calcul de loi

Prenons une expérience consistant à lancer deux dés équilibrés : on peut modéliser ça par l'espace  $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}^2$ , avec la probabilité uniforme. Calculons la loi de la variable aléatoire "maximum des deux dés".

- ▶ On définit, pour  $(x, y) \in \Omega$ ,  $M(x, y) = \max(x, y)$ , à valeur dans  $E = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ .
- ▶ Pour décrire la loi de  $M$ , il suffit de décrire la probabilité  $\mathbb{P}_M$  pour les singletons de  $E$ , i.e.,  $\mathbb{P}(M = i)$  pour chaque  $i \in E$  :
- ▶ pour  $i = 1$ , c'est facile,  $(M = 1) = \{(1, 1)\}$  et  $\mathbb{P}(M = 1) = 1/36$  ;
- ▶ pour  $i = 2$  :  $(M = 2) = \{(1, 2), (2, 1), (2, 2)\}$  et  $\mathbb{P}(M = 2) = 3/36$  ;

## Un exemple de calcul de loi

Prenons une expérience consistant à lancer deux dés équilibrés : on peut modéliser ça par l'espace  $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}^2$ , avec la probabilité uniforme. Calculons la loi de la variable aléatoire "maximum des deux dés".

- ▶ On définit, pour  $(x, y) \in \Omega$ ,  $M(x, y) = \max(x, y)$ , à valeur dans  $E = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ .
- ▶ Pour décrire la loi de  $M$ , il suffit de décrire la probabilité  $\mathbb{P}_M$  pour les singletons de  $E$ , i.e.,  $\mathbb{P}(M = i)$  pour chaque  $i \in E$  :
- ▶ pour  $i = 1$ , c'est facile,  $(M = 1) = \{(1, 1)\}$  et  $\mathbb{P}(M = 1) = 1/36$  ;
- ▶ pour  $i = 2$  :  $(M = 2) = \{(1, 2), (2, 1), (2, 2)\}$  et  $\mathbb{P}(M = 2) = 3/36$  ;
- ▶ pour  $i = 3$  :  $(M = 3) = \{(1, 3), (2, 3), (3, 1), (3, 2), (3, 3)\}$  et  $\mathbb{P}(M = 3) = 5/36$  ;

## Un exemple de calcul de loi

Prenons une expérience consistant à lancer deux dés équilibrés : on peut modéliser ça par l'espace  $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}^2$ , avec la probabilité uniforme. Calculons la loi de la variable aléatoire "maximum des deux dés".

- ▶ On définit, pour  $(x, y) \in \Omega$ ,  $M(x, y) = \max(x, y)$ , à valeur dans  $E = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ .
- ▶ Pour décrire la loi de  $M$ , il suffit de décrire la probabilité  $\mathbb{P}_M$  pour les singletons de  $E$ , i.e.,  $\mathbb{P}(M = i)$  pour chaque  $i \in E$  :
- ▶ pour  $i = 1$ , c'est facile,  $(M = 1) = \{(1, 1)\}$  et  $\mathbb{P}(M = 1) = 1/36$  ;
- ▶ pour  $i = 2$  :  $(M = 2) = \{(1, 2), (2, 1), (2, 2)\}$  et  $\mathbb{P}(M = 2) = 3/36$  ;
- ▶ pour  $i = 3$  :  $(M = 3) = \{(1, 3), (2, 3), (3, 1), (3, 2), (3, 3)\}$  et  $\mathbb{P}(M = 3) = 5/36$  ;
- ▶  $\mathbb{P}(M = 4) = 7/36$ ,  $\mathbb{P}(M = 5) = 9/36$  et  $\mathbb{P}(M = 6) = 11/36$  ; on peut vérifier que la somme fait bien 1.