

Probabilités, Statistiques, Combinatoire

Philippe Duchon

Université de Bordeaux – Licence Informatique

2017-2018

Répartition des TM à partir de la semaine prochaine

- ▶ **TM1** : L. Eyraud-Dubois (A2 ; vendredi 9h30)
- ▶ **TM2** : F. Kardos (A1+A2 ; vendredi 9h30)
- ▶ **TM3** : A. Strock (A1 ; vendredi 9h30)
- ▶ **TM4** : Th. Karaboghossian (A3 ; mercredi 11h)
- ▶ **TM5** : Ph. Duchon (A3+A4 ; mercredi 11h)
- ▶ **TM6** : F. Kardos (A4 ; mercredi 11h)
- ▶ **A5** : L. Fredes-Carrasco (mercredi 11h)
- ▶ **MI A1** : F. Kardos (jeudi 11h)
- ▶ **MI A2** : Ph. Duchon (jeudi 11h)

Merci de respecter la répartition dans les groupes. . . Les noms des enseignants devraient être visibles sur l'emploi du temps CREMI.

Previously, on PSC...

- ▶ indépendance d'événements
- ▶ probabilités conditionnelles
- ▶ variables aléatoires discrètes : définitions, loi

Indépendance de variables aléatoires

- ▶ Deux variables aléatoires X (à valeurs dans E) et Y (à valeurs dans F), **définies sur le même espace de probabilités** Ω , sont dites **indépendantes** si, pour *toute* partie $A \subset E$ et *toute* partie $B \subset F$, les événements $(X \in A)$ et $(Y \in B)$ sont indépendants ; c'est-à-dire que l'on a

$$\mathbb{P}(X \in A \text{ et } Y \in B) = \mathbb{P}(X \in A) \cdot \mathbb{P}(Y \in B)$$

Indépendance de variables aléatoires

- ▶ Deux variables aléatoires X (à valeurs dans E) et Y (à valeurs dans F), **définies sur le même espace de probabilités** Ω , sont dites **indépendantes** si, pour *toute* partie $A \subset E$ et *toute* partie $B \subset F$, les événements $(X \in A)$ et $(Y \in B)$ sont indépendants ; c'est-à-dire que l'on a

$$\mathbb{P}(X \in A \text{ et } Y \in B) = \mathbb{P}(X \in A) \cdot \mathbb{P}(Y \in B)$$

- ▶ Quand E et F sont des espaces discrets, il suffit de vérifier que c'est vrai quand A et B sont des singletons : pour tout $a \in E$ et tout $b \in F$, on doit avoir

$$\mathbb{P}(X = a \text{ et } Y = b) = \mathbb{P}(X = a) \cdot \mathbb{P}(Y = b).$$

Description de la loi d'un couple (ou triplet)

- ▶ Si X et Y sont deux variables aléatoires définies sur le même espace de probabilités, à valeurs dans E et F , alors on peut considérer la variable $Z = (X, Y)$ à valeurs dans $E \times F$: pour tout $t \in \Omega$, $Z(t) = (X(t), Y(t))$.

Description de la loi d'un couple (ou triplet)

- ▶ Si X et Y sont deux variables aléatoires définies sur le même espace de probabilités, à valeurs dans E et F , alors on peut considérer la variable $Z = (X, Y)$ à valeurs dans $E \times F$: pour tout $t \in \Omega$, $Z(t) = (X(t), Y(t))$.
- ▶ **Attention** : en général, connaître la loi de X et la loi de Y , ne permet pas de connaître la loi de Z !

Description de la loi d'un couple (ou triplet)

- ▶ Si X et Y sont deux variables aléatoires définies sur le même espace de probabilités, à valeurs dans E et F , alors on peut considérer la variable $Z = (X, Y)$ à valeurs dans $E \times F$: pour tout $t \in \Omega$, $Z(t) = (X(t), Y(t))$.
- ▶ **Attention** : en général, connaître la loi de X et la loi de Y , ne permet pas de connaître la loi de Z !
- ▶ **Exemple** : sur $\Omega = \{1, 2, 3, 4\} \times \{1, 2, 3, 4\}$ avec la loi uniforme ($p(x, y) = 1/16$ pour tout (x, y)), on pose $X(x, y) = \lceil x/2 \rceil$, $Y(x, y) = \lceil y/2 \rceil$

Description de la loi d'un couple (ou triplet)

- ▶ Si X et Y sont deux variables aléatoires définies sur le même espace de probabilités, à valeurs dans E et F , alors on peut considérer la variable $Z = (X, Y)$ à valeurs dans $E \times F$: pour tout $t \in \Omega$, $Z(t) = (X(t), Y(t))$.
- ▶ **Attention** : en général, connaître la loi de X et la loi de Y , ne permet pas de connaître la loi de Z !
- ▶ **Exemple** : sur $\Omega = \{1, 2, 3, 4\} \times \{1, 2, 3, 4\}$ avec la loi uniforme ($p(x, y) = 1/16$ pour tout (x, y)), on pose $X(x, y) = \lceil x/2 \rceil$, $Y(x, y) = \lceil y/2 \rceil$
 - ▶ X et Y ont la même loi (uniforme sur $\{1, 2\}$), et sont indépendantes ; le couple $Z = (X, Y)$ suit la loi uniforme sur $\{1, 2\} \times \{1, 2\}$.

Description de la loi d'un couple (ou triplet)

- ▶ Si X et Y sont deux variables aléatoires définies sur le même espace de probabilités, à valeurs dans E et F , alors on peut considérer la variable $Z = (X, Y)$ à valeurs dans $E \times F$: pour tout $t \in \Omega$, $Z(t) = (X(t), Y(t))$.
- ▶ **Attention** : en général, connaître la loi de X et la loi de Y , ne permet pas de connaître la loi de Z !
- ▶ **Exemple** : sur $\Omega = \{1, 2, 3, 4\} \times \{1, 2, 3, 4\}$ avec la loi uniforme ($p(x, y) = 1/16$ pour tout (x, y)), on pose $X(x, y) = \lceil x/2 \rceil$, $Y(x, y) = \lceil y/2 \rceil$
 - ▶ X et Y ont la même loi (uniforme sur $\{1, 2\}$), et sont indépendantes ; le couple $Z = (X, Y)$ suit la loi uniforme sur $\{1, 2\} \times \{1, 2\}$.
 - ▶ le couple $Z' = (X, X)$ suit une loi différente (uniforme sur $\{(1, 1), (2, 2)\}$)

Description de la loi d'un couple (ou triplet)

- ▶ Si X et Y sont deux variables aléatoires définies sur le même espace de probabilités, à valeurs dans E et F , alors on peut considérer la variable $Z = (X, Y)$ à valeurs dans $E \times F$: pour tout $t \in \Omega$, $Z(t) = (X(t), Y(t))$.
- ▶ **Attention** : en général, connaître la loi de X et la loi de Y , ne permet pas de connaître la loi de Z !
- ▶ **Exemple** : sur $\Omega = \{1, 2, 3, 4\} \times \{1, 2, 3, 4\}$ avec la loi uniforme ($p(x, y) = 1/16$ pour tout (x, y)), on pose $X(x, y) = \lceil x/2 \rceil$, $Y(x, y) = \lceil y/2 \rceil$
 - ▶ X et Y ont la même loi (uniforme sur $\{1, 2\}$), et sont indépendantes ; le couple $Z = (X, Y)$ suit la loi uniforme sur $\{1, 2\} \times \{1, 2\}$.
 - ▶ le couple $Z' = (X, X)$ suit une loi différente (uniforme sur $\{(1, 1), (2, 2)\}$)
 - ▶ On peut aussi définir $X' = 3 - X$: X' a la même loi que X et que Y ; mais (X, X') a encore une loi différente.

Description de la loi d'un couple (ou triplet)

- ▶ Si X et Y sont deux variables aléatoires définies sur le même espace de probabilités, à valeurs dans E et F , alors on peut considérer la variable $Z = (X, Y)$ à valeurs dans $E \times F$: pour tout $t \in \Omega$, $Z(t) = (X(t), Y(t))$.
- ▶ **Attention** : en général, connaître la loi de X et la loi de Y , ne permet pas de connaître la loi de Z !
- ▶ **Exemple** : sur $\Omega = \{1, 2, 3, 4\} \times \{1, 2, 3, 4\}$ avec la loi uniforme ($p(x, y) = 1/16$ pour tout (x, y)), on pose $X(x, y) = \lceil x/2 \rceil$, $Y(x, y) = \lceil y/2 \rceil$
 - ▶ X et Y ont la même loi (uniforme sur $\{1, 2\}$), et sont indépendantes ; le couple $Z = (X, Y)$ suit la loi uniforme sur $\{1, 2\} \times \{1, 2\}$.
 - ▶ le couple $Z' = (X, X)$ suit une loi différente (uniforme sur $\{(1, 1), (2, 2)\}$)
 - ▶ On peut aussi définir $X' = 3 - X$: X' a la même loi que X et que Y ; mais (X, X') a encore une loi différente.
- ▶ **En revanche**, si on sait que X et Y sont indépendantes, alors la connaissance des lois de X et de Y détermine la loi de (X, Y)

Variables aléatoires réelles

Quand une variable aléatoire est à valeurs dans $\mathbb{R}$ (ou un sous-ensemble ; par exemple, $\mathbb{Z}$ ou $\mathbb{N}$, on parle de **variable aléatoire réelle** ; quand elle est à valeurs dans $\mathbb{Z}$, de **variable aléatoire entière** ; etc.

Quand on manipule des variables aléatoires réelles, on peut réaliser des opérations dessus (sommes, produits, etc - en tant que sommes de fonctions).

Par ailleurs, on peut décrire la loi d'une variable aléatoire par un moyen détourné : sa **fonction de répartition**.

Variables aléatoires réelles

Quand une variable aléatoire est à valeurs dans $\mathbb{R}$ (ou un sous-ensemble ; par exemple, $\mathbb{Z}$ ou $\mathbb{N}$, on parle de **variable aléatoire réelle** ; quand elle est à valeurs dans $\mathbb{Z}$, de **variable aléatoire entière** ; etc.

Quand on manipule des variables aléatoires réelles, on peut réaliser des opérations dessus (sommes, produits, etc - en tant que sommes de fonctions).

Par ailleurs, on peut décrire la loi d'une variable aléatoire par un moyen détourné : sa **fonction de répartition**.

Définition

Soit X une variable aléatoire réelle sur un espace de probabilités $(\Omega, \mathbb{P})$. La fonction de répartition de X , notée F_X , est la fonction d'une variable réelle définie par

$$F_X(t) = \mathbb{P}(X \leq t).$$

Propriétés de la fonction de répartition

- ▶ la fonction de répartition de X ne dépend pas vraiment de X , mais seulement de sa loi (deux variables aléatoires de même loi ont la même fonction de répartition ; deux variables aléatoires sur le même espace Ω peuvent avoir la même loi sans être égales) ;

Propriétés de la fonction de répartition

- ▶ la fonction de répartition de X ne dépend pas vraiment de X , mais seulement de sa loi (deux variables aléatoires de même loi ont la même fonction de répartition ; deux variables aléatoires sur le même espace Ω peuvent avoir la même loi sans être égales) ;
- ▶ en revanche, la fonction de répartition *caractérise* la loi : deux variables aléatoires qui ont la même fonction de répartition ont la même loi ;

Propriétés de la fonction de répartition

- ▶ la fonction de répartition de X ne dépend pas vraiment de X , mais seulement de sa loi (deux variables aléatoires de même loi ont la même fonction de répartition ; deux variables aléatoires sur le même espace Ω peuvent avoir la même loi sans être égales) ;
- ▶ en revanche, la fonction de répartition *caractérise* la loi : deux variables aléatoires qui ont la même fonction de répartition ont la même loi ;
- ▶ une fonction de répartition est toujours une fonction croissante au sens large, avec pour limites 0 en $-\infty$ et 1 en $+\infty$;

Propriétés de la fonction de répartition

- ▶ la fonction de répartition de X ne dépend pas vraiment de X , mais seulement de sa loi (deux variables aléatoires de même loi ont la même fonction de répartition ; deux variables aléatoires sur le même espace Ω peuvent avoir la même loi sans être égales) ;
- ▶ en revanche, la fonction de répartition *caractérise* la loi : deux variables aléatoires qui ont la même fonction de répartition ont la même loi ;
- ▶ une fonction de répartition est toujours une fonction croissante au sens large, avec pour limites 0 en $-\infty$ et 1 en $+\infty$;
- ▶ une variable aléatoire définie sur un espace fini ou dénombrable (variable discrète), ne peut prendre qu'un nombre fini ou dénombrable de valeurs ; la fonction de répartition a toujours une discontinuité en ces valeurs (et est constante sur tout intervalle qui ne contient aucune de ces valeurs) ;

Propriétés de la fonction de répartition

- ▶ la fonction de répartition de X ne dépend pas vraiment de X , mais seulement de sa loi (deux variables aléatoires de même loi ont la même fonction de répartition ; deux variables aléatoires sur le même espace Ω peuvent avoir la même loi sans être égales) ;
- ▶ en revanche, la fonction de répartition *caractérise* la loi : deux variables aléatoires qui ont la même fonction de répartition ont la même loi ;
- ▶ une fonction de répartition est toujours une fonction croissante au sens large, avec pour limites 0 en $-\infty$ et 1 en $+\infty$;
- ▶ une variable aléatoire définie sur un espace fini ou dénombrable (variable discrète), ne peut prendre qu'un nombre fini ou dénombrable de valeurs ; la fonction de répartition a toujours une discontinuité en ces valeurs (et est constante sur tout intervalle qui ne contient aucune de ces valeurs) ;
- ▶ à partir de sa fonction de répartition, on peut retrouver la loi de X .

Espérance d'une variable aléatoire réelle

- **Notion d'espérance** : cela correspond à la “moyenne” ; on s'attend (et on le vérifiera) à ce que si on tire un grand échantillon de la loi de X , la moyenne des échantillons soit proche de cette espérance de X .

Espérance d'une variable aléatoire réelle

- ▶ **Notion d'espérance** : cela correspond à la “moyenne” ; on s'attend (et on le vérifiera) à ce que si on tire un grand échantillon de la loi de X , la moyenne des échantillons soit proche de cette espérance de X .
- ▶ **Définition** : si X est une variable aléatoire réelle discrète, définie sur un espace Ω , et que l'ensemble des valeurs possibles de X est E , l'**espérance** de X , notée $\mathbb{E}(X)$, est définie (sous réserve de convergence “absolue” des sommes) par

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(X) &= \sum_{t \in \Omega} X(t)p(t) \\ &= \sum_{x \in E} x \cdot \mathbb{P}(X = x)\end{aligned}$$

Espérance d'une variable aléatoire réelle

- ▶ **Notion d'espérance** : cela correspond à la “moyenne” ; on s'attend (et on le vérifiera) à ce que si on tire un grand échantillon de la loi de X , la moyenne des échantillons soit proche de cette espérance de X .
- ▶ **Définition** : si X est une variable aléatoire réelle discrète, définie sur un espace Ω , et que l'ensemble des valeurs possibles de X est E , l'**espérance** de X , notée $\mathbb{E}(X)$, est définie (sous réserve de convergence “absolue” des sommes) par

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(X) &= \sum_{t \in \Omega} X(t)p(t) \\ &= \sum_{x \in E} x \cdot \mathbb{P}(X = x)\end{aligned}$$

- ▶ L'espérance est toujours définie si Ω est un ensemble fini ; si Ω est infini dénombrable, il est possible que l'espérance ne soit pas définie. Dans ce cas, si E ne contient que des nombres positifs, on dit parfois que l'espérance est infinie.

Propriétés de l'espérance

Trois propriétés importantes :

- ▶ **“positivité”** : si la variable aléatoire X est à valeurs positives ou nulles, alors $\mathbb{E}(X) \geq 0$; et si X est à valeurs positives ou nulles, et que l'on a $\mathbb{P}(X > 0) > 0$, alors $\mathbb{E}(X) > 0$.

Propriétés de l'espérance

Trois propriétés importantes :

- ▶ **“positivité”** : si la variable aléatoire X est à valeurs positives ou nulles, alors $\mathbb{E}(X) \geq 0$; et si X est à valeurs positives ou nulles, et que l'on a $\mathbb{P}(X > 0) > 0$, alors $\mathbb{E}(X) > 0$.
- ▶ **“linéarité”** : si X et Y sont des variables aléatoires ayant chacune une espérance, définies sur le même espace, et a et b deux réels quelconques, alors on a

$$\mathbb{E}(a.X + b.Y) = a\mathbb{E}(X) + b\mathbb{E}(Y)$$

Propriétés de l'espérance

Trois propriétés importantes :

- ▶ **“positivité”** : si la variable aléatoire X est à valeurs positives ou nulles, alors $\mathbb{E}(X) \geq 0$; et si X est à valeurs positives ou nulles, et que l'on a $\mathbb{P}(X > 0) > 0$, alors $\mathbb{E}(X) > 0$.
- ▶ **“linéarité”** : si X et Y sont des variables aléatoires ayant chacune une espérance, définies sur le même espace, et a et b deux réels quelconques, alors on a

$$\mathbb{E}(a.X + b.Y) = a\mathbb{E}(X) + b\mathbb{E}(Y)$$

- ▶ **En cas d'indépendance** : si X et Y sont indépendantes, alors $\mathbb{E}(X.Y) = \mathbb{E}(X).\mathbb{E}(Y)$; **attention**, la réciproque n'est pas vraie : on peut avoir $\mathbb{E}(X.Y) = \mathbb{E}(X).\mathbb{E}(Y)$ sans que X et Y ne soient indépendantes.