

Probabilités, Statistiques, Combinatoire

Philippe Duchon

Université de Bordeaux – Licence Informatique

2017-2018

Répartition des TM

- ▶ **TM1** : L. Eyraud-Dubois (A2 ; vendredi 9h30)
- ▶ **TM2** : F. Kardos (A1+A2 ; vendredi 9h30)
- ▶ **TM3** : A. Strock (A1 ; vendredi 9h30)
- ▶ **TM4** : Th. Karaboghossian (A3 ; mercredi 11h)
- ▶ **TM5** : Ph. Duchon (A3+A4 ; mercredi 11h)
- ▶ **TM6** : F. Kardos (A4 ; mercredi 11h)
- ▶ **A5** : L. Fredes-Carrasco (mercredi 11h)
- ▶ **MI A1** : F. Kardos (jeudi 11h)
- ▶ **MI A2** : Ph. Duchon (jeudi 11h)

Merci de respecter la répartition dans les groupes. . .Les noms des enseignants devraient être visibles sur l'emploi du temps CREMI.

Devoir surveillé : mercredi 7 mars

- ▶ de 11h à 12h20, amphi Darwin
- ▶ programme : tout jusqu'au cours d'aujourd'hui
- ▶ Définitions, propriétés, vocabulaire des probabilités ;
modélisation
- ▶ Loi de probabilités, indépendance, probabilité conditionnelle
- ▶ Variables aléatoires : loi, indépendance, espérance, variance
- ▶ Pas de questions prévues sur les exercices de simulation de TM

On a vu...

- ▶ **Loi d'une variable aléatoire** (ou d'un couple de variables aléatoires)
- ▶ **Espérance** : formules de calcul, propriétés

On a vu...

- ▶ **Loi d'une variable aléatoire** (ou d'un couple de variables aléatoires)
- ▶ **Espérance** : formules de calcul, propriétés
- ▶ **Aujourd'hui** :

On a vu...

- ▶ **Loi d'une variable aléatoire** (ou d'un couple de variables aléatoires)
- ▶ **Espérance** : formules de calcul, propriétés
- ▶ **Aujourd'hui** :
 - ▶ compléments sur l'espérance

On a vu...

- ▶ **Loi d'une variable aléatoire** (ou d'un couple de variables aléatoires)
- ▶ **Espérance** : formules de calcul, propriétés
- ▶ **Aujourd'hui** :
 - ▶ compléments sur l'espérance
 - ▶ notion de variance

On a vu...

- ▶ **Loi d'une variable aléatoire** (ou d'un couple de variables aléatoires)
- ▶ **Espérance** : formules de calcul, propriétés
- ▶ **Aujourd'hui** :
 - ▶ compléments sur l'espérance
 - ▶ notion de variance
 - ▶ description de lois de probabilités “usuelles”

Calcul de l'espérance

- Il est fréquent de définir une variable aléatoire en fonction d'autres : $Y = f(X)$ ou $Z = X + Y$, etc.

Calcul de l'espérance

- ▶ Il est fréquent de définir une variable aléatoire en fonction d'autres : $Y = f(X)$ ou $Z = X + Y$, etc.
- ▶ **En général**, on n'a pas $\mathbb{E}(f(X)) = f(\mathbb{E}(X))$ (sauf si f est une fonction affine, $f(x) = a.x + b$ pour a et b des constantes) ;

Calcul de l'espérance

- ▶ Il est fréquent de définir une variable aléatoire en fonction d'autres : $Y = f(X)$ ou $Z = X + Y$, etc.
- ▶ **En général**, on n'a pas $\mathbb{E}(f(X)) = f(\mathbb{E}(X))$ (sauf si f est une fonction affine, $f(x) = a.x + b$ pour a et b des constantes) ;
- ▶ Formule correcte, sous forme de sommes : si X prend ses valeurs dans E ,

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(f(X)) &= \sum_{v \in E} f(v) \mathbb{P}(X = v) \\ &= \sum_{t \in \Omega} f(X(t)) p(t)\end{aligned}$$

Calcul de l'espérance

- ▶ Il est fréquent de définir une variable aléatoire en fonction d'autres : $Y = f(X)$ ou $Z = X + Y$, etc.
- ▶ **En général**, on n'a pas $\mathbb{E}(f(X)) = f(\mathbb{E}(X))$ (sauf si f est une fonction affine, $f(x) = a.x + b$ pour a et b des constantes) ;
- ▶ Formule correcte, sous forme de sommes : si X prend ses valeurs dans E ,

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(f(X)) &= \sum_{v \in E} f(v) \mathbb{P}(X = v) \\ &= \sum_{t \in \Omega} f(X(t)) p(t)\end{aligned}$$

- ▶ Par exemple, $\mathbb{E}(X^2) \geq (\mathbb{E}(X))^2$, et l'égalité n'est possible que dans un cas très particulier : s'il existe une valeur a telle que l'on ait $\mathbb{P}(X = a) = 1$.

Variance d'une variable aléatoire

- ▶ La **variance** est une mesure de *à quel point une variable aléatoire a tendance à s'éloigner de son espérance*

Variance d'une variable aléatoire

- ▶ La **variance** est une mesure de *à quel point une variable aléatoire a tendance à s'éloigner de son espérance*
- ▶ **Définition** : si X est une variable aléatoire (réelle), et que m est son espérance ($m = \mathbb{E}(X)$), alors la **variance** de X est définie par

$$\mathbf{Var}(X) = \mathbb{E} \left((X - m)^2 \right)$$

Variance d'une variable aléatoire

- ▶ La **variance** est une mesure de *à quel point une variable aléatoire a tendance à s'éloigner de son espérance*
- ▶ **Définition** : si X est une variable aléatoire (réelle), et que m est son espérance ($m = \mathbb{E}(X)$), alors la **variance** de X est définie par

$$\mathbf{Var}(X) = \mathbb{E} \left((X - m)^2 \right)$$

- ▶ **Remarque** : comme $(X - m)^2$ est une variable aléatoire qui ne prend que des valeurs positives ou nulles, **Var**(X) est nécessairement positive.

Variance d'une variable aléatoire

- ▶ La **variance** est une mesure de *à quel point une variable aléatoire a tendance à s'éloigner de son espérance*
- ▶ **Définition** : si X est une variable aléatoire (réelle), et que m est son espérance ($m = \mathbb{E}(X)$), alors la **variance** de X est définie par

$$\mathbf{Var}(X) = \mathbb{E} \left((X - m)^2 \right)$$

- ▶ **Remarque** : comme $(X - m)^2$ est une variable aléatoire qui ne prend que des valeurs positives ou nulles, **Var**(X) est nécessairement positive.
- ▶ **Remarque bis** : sur un espace infini, si la variable aléatoire X n'est pas bornée, sa variance peut ne pas exister (X est bornée s'il existe un nombre M tel que $\mathbb{P}(|X| \leq M) = 1$)

Variance d'une variable aléatoire

- ▶ La **variance** est une mesure de *à quel point une variable aléatoire a tendance à s'éloigner de son espérance*
- ▶ **Définition** : si X est une variable aléatoire (réelle), et que m est son espérance ($m = \mathbb{E}(X)$), alors la **variance** de X est définie par

$$\mathbf{Var}(X) = \mathbb{E} \left((X - m)^2 \right)$$

- ▶ **Remarque** : comme $(X - m)^2$ est une variable aléatoire qui ne prend que des valeurs positives ou nulles, **Var**(X) est nécessairement positive.
- ▶ **Remarque bis** : sur un espace infini, si la variable aléatoire X n'est pas bornée, sa variance peut ne pas exister (X est bornée s'il existe un nombre M tel que $\mathbb{P}(|X| \leq M) = 1$)
- ▶ **Propriété** : on a aussi une autre formule également valable pour la variance :

$$\mathbf{Var}(X) = \mathbb{E}(X^2) - (\mathbb{E}(X))^2$$

(Preuve : au tableau)

Quelques propriétés de la variance

- ▶ La variance est toujours positive ou nulle ; et elle ne peut être nulle que si la variable aléatoire est “constante” (s’il existe une valeur m telle que $\mathbb{P}(X = m) = 1$).

Quelques propriétés de la variance

- ▶ La variance est toujours positive ou nulle ; et elle ne peut être nulle que si la variable aléatoire est “constante” (s’il existe une valeur m telle que $\mathbb{P}(X = m) = 1$).
- ▶ **$\text{Var}(aX + b) = a^2 \text{Var}(X)$** (a et b des constantes)

Quelques propriétés de la variance

- ▶ La variance est toujours positive ou nulle ; et elle ne peut être nulle que si la variable aléatoire est “constante” (s’il existe une valeur m telle que $\mathbb{P}(X = m) = 1$).
- ▶ **$\text{Var}(aX + b) = a^2 \text{Var}(X)$** (a et b des constantes)
- ▶ **Si X et Y sont des variables aléatoires indépendantes, alors on a $\text{Var}(X + Y) = \text{Var}(X) + \text{Var}(Y)$**

Quelques propriétés de la variance

- ▶ La variance est toujours positive ou nulle ; et elle ne peut être nulle que si la variable aléatoire est “constante” (s’il existe une valeur m telle que $\mathbb{P}(X = m) = 1$).
- ▶ $\mathbf{Var}(aX + b) = a^2 \mathbf{Var}(X)$ (a et b des constantes)
- ▶ Si X et Y sont des variables aléatoires **indépendantes**, alors on a $\mathbf{Var}(X + Y) = \mathbf{Var}(X) + \mathbf{Var}(Y)$
- ▶ La racine carrée de la variance s’appelle **écart-type**, parfois noté σ_X ($\mathbf{Var}(X) = \sigma_X^2$)

Un exemple de calcul de variance

- ▶ On prend X uniforme sur $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

Un exemple de calcul de variance

- ▶ On prend X uniforme sur $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$
- ▶ Espérance : $m = \mathbb{E}(X) = \frac{1+2+3+4+5+6}{6} = 7/2$

Un exemple de calcul de variance

- ▶ On prend X uniforme sur $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$
- ▶ Espérance : $m = \mathbb{E}(X) = \frac{1+2+3+4+5+6}{6} = 7/2$
- ▶ Calcul de la variance :

Un exemple de calcul de variance

- ▶ On prend X uniforme sur $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$
- ▶ Espérance : $m = \mathbb{E}(X) = \frac{1+2+3+4+5+6}{6} = 7/2$
- ▶ Calcul de la variance :
 - ▶ Première formule : $X - m$ est uniforme sur $\{-5/2, -3/2, -1/2, 1/2, 3/2, 5/2\}$; donc $(X - m)^2$ prend les valeurs $1/4, 9/4, 25/4$ avec probabilités respectives $1/3, 1/3, 1/3$ (uniforme sur $\{1/4, 9/4, 25/4\}$)

Un exemple de calcul de variance

- ▶ On prend X uniforme sur $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$
- ▶ Espérance : $m = \mathbb{E}(X) = \frac{1+2+3+4+5+6}{6} = 7/2$
- ▶ Calcul de la variance :
 - ▶ Première formule : $X - m$ est uniforme sur $\{-5/2, -3/2, -1/2, 1/2, 3/2, 5/2\}$; donc $(X - m)^2$ prend les valeurs $1/4, 9/4, 25/4$ avec probabilités respectives $1/3, 1/3, 1/3$ (uniforme sur $\{1/4, 9/4, 25/4\}$)
 - ▶ Donc $\mathbf{Var}(X) = \frac{1/4+9/4+25/4}{3} = 35/12$; $\sigma_X = \frac{\sqrt{35}}{2\sqrt{3}} \simeq 1.707$.

Un exemple de calcul de variance

- ▶ On prend X uniforme sur $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$
- ▶ Espérance : $m = \mathbb{E}(X) = \frac{1+2+3+4+5+6}{6} = 7/2$
- ▶ Calcul de la variance :
 - ▶ Première formule : $X - m$ est uniforme sur $\{-5/2, -3/2, -1/2, 1/2, 3/2, 5/2\}$; donc $(X - m)^2$ prend les valeurs $1/4, 9/4, 25/4$ avec probabilités respectives $1/3, 1/3, 1/3$ (uniforme sur $\{1/4, 9/4, 25/4\}$)
 - ▶ Donc $\mathbf{Var}(X) = \frac{1/4+9/4+25/4}{3} = 35/12$; $\sigma_X = \frac{\sqrt{35}}{2\sqrt{3}} \simeq 1.707$.
 - ▶ Deuxième formule : on calcule $\mathbb{E}(X^2)$: X^2 prend les valeurs 1, 4, 9, 16, 25, 36 avec probabilité $1/6$ chacune (uniforme sur $\{1, 4, 9, 16, 25, 36\}$) ; donc $\mathbb{E}(X^2) = \frac{1+4+9+16+25+36}{6} = 91/6$

Un exemple de calcul de variance

- ▶ On prend X uniforme sur $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$
- ▶ Espérance : $m = \mathbb{E}(X) = \frac{1+2+3+4+5+6}{6} = 7/2$
- ▶ Calcul de la variance :
 - ▶ Première formule : $X - m$ est uniforme sur $\{-5/2, -3/2, -1/2, 1/2, 3/2, 5/2\}$; donc $(X - m)^2$ prend les valeurs $1/4, 9/4, 25/4$ avec probabilités respectives $1/3, 1/3, 1/3$ (uniforme sur $\{1/4, 9/4, 25/4\}$)
 - ▶ Donc $\mathbf{Var}(X) = \frac{1/4+9/4+25/4}{3} = 35/12$; $\sigma_X = \frac{\sqrt{35}}{2\sqrt{3}} \simeq 1.707$.
 - ▶ Deuxième formule : on calcule $\mathbb{E}(X^2)$: X^2 prend les valeurs 1, 4, 9, 16, 25, 36 avec probabilité $1/6$ chacune (uniforme sur $\{1, 4, 9, 16, 25, 36\}$) ; donc $\mathbb{E}(X^2) = \frac{1+4+9+16+25+36}{6} = 91/6$
 - ▶ Donc $\mathbf{Var}(X) = \frac{91}{6} - (7/2)^2 = \frac{182-147}{12} = 35/12$.

Une propriété importante : somme de variables i.i.d.

- **i.i.d.** est une abréviation pour *indépendantes, identiquement distribuées* : on parle de variables aléatoires X_1, X_2, \dots, X_n toutes indépendantes, et toutes de même loi.

Une propriété importante : somme de variables i.i.d.

- ▶ **i.i.d.** est une abréviation pour *indépendantes, identiquement distribuées* : on parle de variables aléatoires X_1, X_2, \dots, X_n toutes indépendantes, et toutes de même loi.
- ▶ On pose $S_n = \sum_{i=1}^n X_i$: somme de n variables indépendantes.

Une propriété importante : somme de variables i.i.d.

- ▶ **i.i.d.** est une abréviation pour *indépendantes, identiquement distribuées* : on parle de variables aléatoires X_1, X_2, \dots, X_n toutes indépendantes, et toutes de même loi.
- ▶ On pose $S_n = \sum_{i=1}^n X_i$: somme de n variables indépendantes.
- ▶ Par linéarité : $\mathbb{E}(S_n) = \mathbb{E}(X_1) + \dots + \mathbb{E}(X_n) = n\mathbb{E}(X_1)$.

Une propriété importante : somme de variables i.i.d.

- ▶ **i.i.d.** est une abréviation pour *indépendantes, identiquement distribuées* : on parle de variables aléatoires X_1, X_2, \dots, X_n toutes indépendantes, et toutes de même loi.
- ▶ On pose $S_n = \sum_{i=1}^n X_i$: somme de n variables indépendantes.
- ▶ Par linéarité : $\mathbb{E}(S_n) = \mathbb{E}(X_1) + \dots + \mathbb{E}(X_n) = n\mathbb{E}(X_1)$.
- ▶ Par indépendance :
 $\mathbf{Var}(S_n) = \mathbf{Var}(X_1) + \dots + \mathbf{Var}(X_n) = n\mathbf{Var}(X_1)$.

Une propriété importante : somme de variables i.i.d.

- ▶ **i.i.d.** est une abréviation pour *indépendantes, identiquement distribuées* : on parle de variables aléatoires X_1, X_2, \dots, X_n toutes indépendantes, et toutes de même loi.
- ▶ On pose $S_n = \sum_{i=1}^n X_i$: somme de n variables indépendantes.
- ▶ Par linéarité : $\mathbb{E}(S_n) = \mathbb{E}(X_1) + \dots + \mathbb{E}(X_n) = n\mathbb{E}(X_1)$.
- ▶ Par indépendance :
 $\mathbf{Var}(S_n) = \mathbf{Var}(X_1) + \dots + \mathbf{Var}(X_n) = n\mathbf{Var}(X_1)$.
- ▶ Donc $\sigma_{S_n} = \sqrt{n}\sigma_{X_1}$.

Une propriété importante : somme de variables i.i.d.

- ▶ **i.i.d.** est une abréviation pour *indépendantes, identiquement distribuées* : on parle de variables aléatoires X_1, X_2, \dots, X_n toutes indépendantes, et toutes de même loi.
- ▶ On pose $S_n = \sum_{i=1}^n X_i$: somme de n variables indépendantes.
- ▶ Par linéarité : $\mathbb{E}(S_n) = \mathbb{E}(X_1) + \dots + \mathbb{E}(X_n) = n\mathbb{E}(X_1)$.
- ▶ Par indépendance :
$$\mathbf{Var}(S_n) = \mathbf{Var}(X_1) + \dots + \mathbf{Var}(X_n) = n\mathbf{Var}(X_1).$$
- ▶ Donc $\sigma_{S_n} = \sqrt{n}\sigma_{X_1}$.
- ▶ **L'espérance** de la somme évolue linéairement avec le nombre de variables sommées (sauf si $\mathbb{E}(X_1) = 0$), alors que **la variance** de la somme croît seulement comme la *racine carrée* du nombre de variables sommées.

Quelques lois usuelles (sur les entiers)

- ▶ On a vu la loi uniforme sur un ensemble fini ; un certain nombre d'autres lois sont “usuelles”, au sens où elles correspondent à des situations fréquentes dans les modélisation, et il est bon de les connaître (et de les reconnaître quand on les rencontre).

Quelques lois usuelles (sur les entiers)

- ▶ On a vu la loi uniforme sur un ensemble fini ; un certain nombre d'autres lois sont “usuelles”, au sens où elles correspondent à des situations fréquentes dans les modélisation, et il est bon de les connaître (et de les reconnaître quand on les rencontre).
- ▶ En reconnaissant les lois usuelles et leurs espérances et variances, et en utilisant les propriétés générales, il y a beaucoup de calculs qu'on peut éviter.

Quelques lois usuelles (sur les entiers)

- ▶ On a vu la loi uniforme sur un ensemble fini ; un certain nombre d'autres lois sont “usuelles”, au sens où elles correspondent à des situations fréquentes dans les modélisation, et il est bon de les connaître (et de les reconnaître quand on les rencontre).
- ▶ En reconnaissant les lois usuelles et leurs espérances et variances, et en utilisant les propriétés générales, il y a beaucoup de calculs qu'on peut éviter.
- ▶ La plupart ont un ou plusieurs paramètres, entiers ou non.

Quelques lois usuelles (sur les entiers)

- ▶ On a vu la loi uniforme sur un ensemble fini ; un certain nombre d'autres lois sont "usuelles", au sens où elles correspondent à des situations fréquentes dans les modélisation, et il est bon de les connaître (et de les reconnaître quand on les rencontre).
- ▶ En reconnaissant les lois usuelles et leurs espérances et variances, et en utilisant les propriétés générales, il y a beaucoup de calculs qu'on peut éviter.
- ▶ La plupart ont un ou plusieurs paramètres, entiers ou non.
- ▶ On attendra de vous que vous connaissiez ces lois (interprétation, et formules pour les probabilités, l'espérance, la variance)

Loi de Bernoulli

- ▶ Loi très simple : une telle variable aléatoire ne peut prendre que les valeurs 0 et 1
- ▶ **Définition** : X suit la loi de Bernoulli de paramètre p (pour un réel $0 < p < 1$) si on a $\mathbb{P}(X = 1) = p$ et $\mathbb{P}(X = 0) = 1 - p$

Loi de Bernoulli

- ▶ Loi très simple : une telle variable aléatoire ne peut prendre que les valeurs 0 et 1
- ▶ **Définition** : X suit la loi de Bernoulli de paramètre p (pour un réel $0 < p < 1$) si on a $\mathbb{P}(X = 1) = p$ et $\mathbb{P}(X = 0) = 1 - p$
- ▶ **Espérance** : $\mathbb{E}(X) = p$

Loi de Bernoulli

- ▶ Loi très simple : une telle variable aléatoire ne peut prendre que les valeurs 0 et 1
- ▶ **Définition** : X suit la loi de Bernoulli de paramètre p (pour un réel $0 < p < 1$) si on a $\mathbb{P}(X = 1) = p$ et $\mathbb{P}(X = 0) = 1 - p$
- ▶ **Espérance** : $\mathbb{E}(X) = p$
- ▶ **Variance** : $\text{Var}(X) = p(1 - p) = p - p^2$

Loi géométrique

- Valeurs possibles : tous les entiers positifs (non nuls)

Loi géométrique

- ▶ Valeurs possibles : tous les entiers positifs (non nuls)
- ▶ **Définition** : X suit la loi géométrique de paramètre p ($0 < p < 1$) si, pour tout entier $k > 0$, on a

$$\mathbb{P}(X = k) = (1 - p)^{k-1}p$$

Loi géométrique

- ▶ Valeurs possibles : tous les entiers positifs (non nuls)
- ▶ **Définition** : X suit la loi géométrique de paramètre p ($0 < p < 1$) si, pour tout entier $k > 0$, on a

$$\mathbb{P}(X = k) = (1 - p)^{k-1}p$$

- ▶ C'est la loi du “nombre d'essais jusqu'au premier succès” si on effectue des “essais” (aléatoires) indépendants, qui ont tous probabilité p de “réussir”

Loi géométrique

- ▶ Valeurs possibles : tous les entiers positifs (non nuls)
- ▶ **Définition** : X suit la loi géométrique de paramètre p ($0 < p < 1$) si, pour tout entier $k > 0$, on a

$$\mathbb{P}(X = k) = (1 - p)^{k-1}p$$

- ▶ C'est la loi du “nombre d'essais jusqu'au premier succès” si on effectue des “essais” (aléatoires) indépendants, qui ont tous probabilité p de “réussir”
- ▶ **Espérance** : $\mathbb{E}(X) = 1/p$

Loi géométrique

- ▶ Valeurs possibles : tous les entiers positifs (non nuls)
- ▶ **Définition** : X suit la loi géométrique de paramètre p ($0 < p < 1$) si, pour tout entier $k > 0$, on a

$$\mathbb{P}(X = k) = (1 - p)^{k-1}p$$

- ▶ C'est la loi du “nombre d'essais jusqu'au premier succès” si on effectue des “essais” (aléatoires) indépendants, qui ont tous probabilité p de “réussir”
- ▶ **Espérance** : $\mathbb{E}(X) = 1/p$
- ▶ **Variance** : $\text{Var}(X) = \frac{1-p}{p^2}$

Loi géométrique

- ▶ Valeurs possibles : tous les entiers positifs (non nuls)
- ▶ **Définition** : X suit la loi géométrique de paramètre p ($0 < p < 1$) si, pour tout entier $k > 0$, on a

$$\mathbb{P}(X = k) = (1 - p)^{k-1}p$$

- ▶ C'est la loi du “nombre d'essais jusqu'au premier succès” si on effectue des “essais” (aléatoires) indépendants, qui ont tous probabilité p de “réussir”
- ▶ **Espérance** : $\mathbb{E}(X) = 1/p$
- ▶ **Variance** : $\text{Var}(X) = \frac{1-p}{p^2}$
- ▶ (la formule pour la variance n'est pas évidente à prouver ; celle pour l'espérance peut au moins se “comprendre”)

Loi binomiale

- ▶ Deux paramètres : un entier n , un réel $0 < p < 1$.

Loi binomiale

- ▶ Deux paramètres : un entier n , un réel $0 < p < 1$.
- ▶ C'est la loi de ce qu'on obtient si on somme n variables de Bernoulli indépendantes de même paramètre p ; donc, la loi du nombre de succès si on fait n essais indépendants de probabilité p de succès.

Loi binomiale

- ▶ Deux paramètres : un entier n , un réel $0 < p < 1$.
- ▶ C'est la loi de ce qu'on obtient si on somme n variables de Bernoulli indépendantes de même paramètre p ; donc, la loi du nombre de succès si on fait n essais indépendants de probabilité p de succès.
- ▶ Valeurs possibles : tous les entiers de 0 à n .

Loi binomiale

- ▶ Deux paramètres : un entier n , un réel $0 < p < 1$.
- ▶ C'est la loi de ce qu'on obtient si on somme n variables de Bernoulli indépendantes de même paramètre p ; donc, la loi du nombre de succès si on fait n essais indépendants de probabilité p de succès.
- ▶ Valeurs possibles : tous les entiers de 0 à n .
- ▶ **Formule** : X suit la loi binomiale de paramètres p et n si on a, pour tout k ($0 \leq k \leq n$),

$$\mathbb{P}(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1 - p)^{n-k}$$

Loi binomiale

- ▶ Deux paramètres : un entier n , un réel $0 < p < 1$.
- ▶ C'est la loi de ce qu'on obtient si on somme n variables de Bernoulli indépendantes de même paramètre p ; donc, la loi du nombre de succès si on fait n essais indépendants de probabilité p de succès.
- ▶ Valeurs possibles : tous les entiers de 0 à n .
- ▶ **Formule** : X suit la loi binomiale de paramètres p et n si on a, pour tout k ($0 \leq k \leq n$),

$$\mathbb{P}(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1 - p)^{n-k}$$

- ▶ Ici $\binom{n}{k}$ désigne le *coefficient binomial*, parfois aussi noté C_n^k ; formule :

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

(en considérant que $0! = 1$)

Loi binomiale (suite)

- Les coefficients binomiaux sont les coefficients du *triangle de Pascal*; on a l'identité

$$(a + b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$$

(on les reverra quand on parlera de combinatoire)

Loi binomiale (suite)

- ▶ Les coefficients binomiaux sont les coefficients du *triangle de Pascal*; on a l'identité

$$(a + b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$$

(on les reverra quand on parlera de combinatoire)

- ▶ **Espérance** : $\mathbb{E}(X) = np$ (facile par linéarité);

Loi binomiale (suite)

- ▶ Les coefficients binomiaux sont les coefficients du *triangle de Pascal*; on a l'identité

$$(a + b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$$

(on les reverra quand on parlera de combinatoire)

- ▶ **Espérance** : $\mathbb{E}(X) = np$ (facile par linéarité);
- ▶ **Variance** : $\text{Var}(X) = np(1 - p)$ (facile aussi)

Loi de Poisson

- ▶ Loi dépendant d'un paramètre $x > 0$.

Loi de Poisson

- ▶ Loi dépendant d'un paramètre $x > 0$.
- ▶ C'est, de manière approchée, la loi d'une variable aléatoire qui peut s'exprimer comme une somme d'un grand nombre de Bernoulli indépendantes, quand la somme de leurs paramètres vaut x .

Loi de Poisson

- ▶ Loi dépendant d'un paramètre $x > 0$.
- ▶ C'est, de manière approchée, la loi d'une variable aléatoire qui peut s'exprimer comme une somme d'un grand nombre de Bernoulli indépendantes, quand la somme de leurs paramètres vaut x .
- ▶ **Par exemple :** le nombre de crash d'avions de ligne sur une année (il y a énormément de vols dans une année; la probabilité que chacun s'écrase est extrêmement faible; et ce sont des événements à peu près indépendants)

Loi de Poisson

- ▶ Loi dépendant d'un paramètre $x > 0$.
- ▶ C'est, de manière approchée, la loi d'une variable aléatoire qui peut s'exprimer comme une somme d'un grand nombre de Bernoulli indépendantes, quand la somme de leurs paramètres vaut x .
- ▶ **Par exemple** : le nombre de crash d'avions de ligne sur une année (il y a énormément de vols dans une année; la probabilité que chacun s'écrase est extrêmement faible; et ce sont des événements à peu près indépendants)
- ▶ Le nombre d'étudiants présents dont c'est l'anniversaire aujourd'hui, devrait suivre à peu près la loi de Poisson de paramètre $N/365$ (pas exactement, car les naissances sont plus fréquentes en février : les mois de conception les plus fréquents sont mai-juin-juillet en France, avec un peu plus de 10% chaque mois)

Loi de Poisson (suite)

- **Formule** : X suit la loi de Poisson de paramètre x si on a, pour tout entier $k \geq 0$,

$$\mathbb{P}(X = k) = e^{-x} \frac{x^k}{k!}$$

Loi de Poisson (suite)

- **Formule** : X suit la loi de Poisson de paramètre x si on a, pour tout entier $k \geq 0$,

$$\mathbb{P}(X = k) = e^{-x} \frac{x^k}{k!}$$

- **Espérance** : $\mathbb{E}(X) = x$

Loi de Poisson (suite)

- ▶ **Formule** : X suit la loi de Poisson de paramètre x si on a, pour tout entier $k \geq 0$,

$$\mathbb{P}(X = k) = e^{-x} \frac{x^k}{k!}$$

- ▶ **Espérance** : $\mathbb{E}(X) = x$
- ▶ **Variance** : $\text{Var}(X) = x$

Loi de Poisson (suite)

- ▶ **Formule** : X suit la loi de Poisson de paramètre x si on a, pour tout entier $k \geq 0$,

$$\mathbb{P}(X = k) = e^{-x} \frac{x^k}{k!}$$

- ▶ **Espérance** : $\mathbb{E}(X) = x$
- ▶ **Variance** : $\text{Var}(X) = x$
- ▶ **Note** : la “forme” de la suite des probabilités de la loi de Poisson, dépend pas mal de la valeur du paramètre ; pour x entier, le maximum est atteint en x et $x + 1$.