

Probabilités, Statistiques, Combinatoire

Philippe Duchon

Université de Bordeaux – Licence Informatique

2017-2018

Devoir surveillé : mercredi 7 mars

- ▶ de 11h à 12h20, amphi Darwin
- ▶ programme : tout jusqu'au cours d'aujourd'hui
- ▶ Définitions, propriétés, vocabulaire des probabilités ;
modélisation
- ▶ Loi de probabilités, indépendance, probabilité conditionnelle
- ▶ Variables aléatoires : loi, indépendance, espérance, variance
- ▶ Pas de questions prévues sur les exercices de simulation de TM

Combinatoire

- ▶ On va s'intéresser à des ensembles finis d'objets, et à leurs relations entre eux

Combinatoire

- ▶ On va s'intéresser à des ensembles finis d'objets, et à leurs relations entre eux
- ▶ **Question clé** : combien tel ensemble a-t-il d'éléments ?

Combinatoire

- ▶ On va s'intéresser à des ensembles finis d'objets, et à leurs relations entre eux
- ▶ **Question clé** : combien tel ensemble a-t-il d'éléments ?
- ▶ C'est important si on veut faire des calculs de probabilités quand la loi est uniforme.

Combinatoire

- ▶ On va s'intéresser à des ensembles finis d'objets, et à leurs relations entre eux
- ▶ **Question clé** : combien tel ensemble a-t-il d'éléments ?
- ▶ C'est important si on veut faire des calculs de probabilités quand la loi est uniforme.
- ▶ Dans les bons cas, on va trouver une “interprétation combinatoire” d'une égalité : essentiellement, montrer que deux ensembles A et B ont le même nombre d'éléments en construisant explicitement une correspondance directe (1-pour-1, “bijection”) entre les éléments de A et les éléments de B .

Quelques questions auxquelles on va répondre

- Combien y a-t-il de suites de 0 et de 1, de longueur n , dans lesquelles il n'y a jamais deux 1 consécutifs ? (1, 2, 3, 5, ...)

Quelques questions auxquelles on va répondre

- ▶ Combien y a-t-il de suites de 0 et de 1, de longueur n , dans lesquelles il n'y a jamais deux 1 consécutifs? (1, 2, 3, 5, ...)
- ▶ Combien y a-t-il (de squelettes) d'arbres binaires ayant exactement n noeuds? (1, 1, 2, 5, 14...)

Quelques questions auxquelles on va répondre

- ▶ Combien y a-t-il de suites de 0 et de 1, de longueur n , dans lesquelles il n'y a jamais deux 1 consécutifs ? (1, 2, 3, 5, ...)
- ▶ Combien y a-t-il (de squelettes) d'arbres binaires ayant exactement n noeuds ? (1, 1, 2, 5, 14 ...)
- ▶ Combien y a-t-il de façons d'écrire les entiers de 1 à n , une fois chacun ? (1, 2, 6, 24, 120, 720 ...)

Quelques questions auxquelles on va répondre

- ▶ Combien y a-t-il de suites de 0 et de 1, de longueur n , dans lesquelles il n'y a jamais deux 1 consécutifs ? (1, 2, 3, 5, ...)
- ▶ Combien y a-t-il (de squelettes) d'arbres binaires ayant exactement n noeuds ? (1, 1, 2, 5, 14 ...)
- ▶ Combien y a-t-il de façons d'écrire les entiers de 1 à n , une fois chacun ? (1, 2, 6, 24, 120, 720 ...)
- ▶ Combien y a-t-il de façons d'écrire les entiers de 1 à n , une fois chacun, *de façon qu'aucun i ne soit en i -ème position ?* (0, 1, 2, 9, 44, 265 ...)

Quelques questions auxquelles on va répondre

- ▶ Combien y a-t-il de suites de 0 et de 1, de longueur n , dans lesquelles il n'y a jamais deux 1 consécutifs ? (1, 2, 3, 5, ...)
- ▶ Combien y a-t-il (de squelettes) d'arbres binaires ayant exactement n noeuds ? (1, 1, 2, 5, 14 ...)
- ▶ Combien y a-t-il de façons d'écrire les entiers de 1 à n , une fois chacun ? (1, 2, 6, 24, 120, 720 ...)
- ▶ Combien y a-t-il de façons d'écrire les entiers de 1 à n , une fois chacun, *de façon qu'aucun i ne soit en i -ème position* ? (0, 1, 2, 9, 44, 265 ...)
- ▶ Combien y a-t-il d'anagrammes possibles du mot BORDEAUX ? (40320) du mot ABRACADABRA ? (83160)

Quelques questions auxquelles on va répondre

- ▶ Combien y a-t-il de suites de 0 et de 1, de longueur n , dans lesquelles il n'y a jamais deux 1 consécutifs ? (1, 2, 3, 5, ...)
- ▶ Combien y a-t-il (de squelettes) d'arbres binaires ayant exactement n noeuds ? (1, 1, 2, 5, 14 ...)
- ▶ Combien y a-t-il de façons d'écrire les entiers de 1 à n , une fois chacun ? (1, 2, 6, 24, 120, 720 ...)
- ▶ Combien y a-t-il de façons d'écrire les entiers de 1 à n , une fois chacun, *de façon qu'aucun i ne soit en i -ème position* ? (0, 1, 2, 9, 44, 265 ...)
- ▶ Combien y a-t-il d'anagrammes possibles du mot BORDEAUX ? (40320) du mot ABRACADABRA ? (83160)
- ▶ Si je fabrique un arbre binaire de recherche en insérant n nombres dans un arbre initial vide, dans un ordre aléatoire uniforme, quelle sera typiquement la hauteur de l'arbre ? ($O(\log(n))$)

Cardinal d'un ensemble fini ; bijection

- **Cardinal** d'un ensemble fini : $\#E$ désigne le nombre d'éléments de l'ensemble E (en supposant que E est fini).

Cardinal d'un ensemble fini ; bijection

- ▶ **Cardinal** d'un ensemble fini : $\#E$ désigne le nombre d'éléments de l'ensemble E (en supposant que E est fini).
- ▶ **Exemple** : $\#\{1, 2, 3, 4, 5, 6\} = 6$; $\#\{0, 1\} = 2$

Cardinal d'un ensemble fini ; bijection

- ▶ **Cardinal** d'un ensemble fini : $\#E$ désigne le nombre d'éléments de l'ensemble E (en supposant que E est fini).
- ▶ **Exemple** : $\#\{1, 2, 3, 4, 5, 6\} = 6$; $\#\{0, 1\} = 2$
- ▶ En règle générale, $\#\{i \in \mathbb{N} : 0 \leq i \leq n - 1\} = n$.

Cardinal d'un ensemble fini ; bijection

- ▶ **Cardinal** d'un ensemble fini : $\#E$ désigne le nombre d'éléments de l'ensemble E (en supposant que E est fini).
- ▶ **Exemple** : $\#\{1, 2, 3, 4, 5, 6\} = 6$; $\#\{0, 1\} = 2$
- ▶ En règle générale, $\#\{i \in \mathbb{N} : 0 \leq i \leq n - 1\} = n$.
- ▶ **Bijection** : une fonction $f : E \rightarrow F$ (définie sur E , à valeurs dans F) est une *bijection* si
pour **tout** $y \in F$, il existe **un et un seul** $x \in E$ tel que l'on ait $f(x) = y$

Cardinal d'un ensemble fini ; bijection

- ▶ **Cardinal** d'un ensemble fini : $\#E$ désigne le nombre d'éléments de l'ensemble E (en supposant que E est fini).
- ▶ **Exemple** : $\#\{1, 2, 3, 4, 5, 6\} = 6$; $\#\{0, 1\} = 2$
- ▶ En règle générale, $\#\{i \in \mathbb{N} : 0 \leq i \leq n - 1\} = n$.
- ▶ **Bijection** : une fonction $f : E \rightarrow F$ (définie sur E , à valeurs dans F) est une *bijection* si
pour **tout** $y \in F$, il existe **un et un seul** $x \in E$ tel que l'on ait $f(x) = y$
- ▶ Autre formulation :
 - ▶ pour tout $y \in F$, il existe au moins un $x \in E$ tel que $y = f(x)$; et
 - ▶ si $x \neq x'$ (avec $x \in E$ et $x' \in E$), alors $f(x) \neq f(x')$.

Cardinal d'un ensemble fini ; bijection

- ▶ **Cardinal** d'un ensemble fini : $\#E$ désigne le nombre d'éléments de l'ensemble E (en supposant que E est fini).
- ▶ **Exemple** : $\#\{1, 2, 3, 4, 5, 6\} = 6$; $\#\{0, 1\} = 2$
- ▶ En règle générale, $\#\{i \in \mathbb{N} : 0 \leq i \leq n - 1\} = n$.
- ▶ **Bijection** : une fonction $f : E \rightarrow F$ (définie sur E , à valeurs dans F) est une *bijection* si
pour **tout** $y \in F$, il existe **un et un seul** $x \in E$ tel que l'on ait $f(x) = y$
- ▶ Autre formulation :
 - ▶ pour tout $y \in F$, il existe au moins un $x \in E$ tel que $y = f(x)$; et
 - ▶ si $x \neq x'$ (avec $x \in E$ et $x' \in E$), alors $f(x) \neq f(x')$.
- ▶ **Proposition** : deux ensembles E et F ont le même cardinal ($\#E = \#F$) si et seulement si il existe une bijection f de E vers F .

Cardinal d'un ensemble fini ; bijection

- ▶ **Cardinal** d'un ensemble fini : $\#E$ désigne le nombre d'éléments de l'ensemble E (en supposant que E est fini).
- ▶ **Exemple** : $\#\{1, 2, 3, 4, 5, 6\} = 6$; $\#\{0, 1\} = 2$
- ▶ En règle générale, $\#\{i \in \mathbb{N} : 0 \leq i \leq n - 1\} = n$.
- ▶ **Bijection** : une fonction $f : E \rightarrow F$ (définie sur E , à valeurs dans F) est une *bijection* si
pour **tout** $y \in F$, il existe **un et un seul** $x \in E$ tel que l'on ait $f(x) = y$
- ▶ Autre formulation :
 - ▶ pour tout $y \in F$, il existe au moins un $x \in E$ tel que $y = f(x)$; et
 - ▶ si $x \neq x'$ (avec $x \in E$ et $x' \in E$), alors $f(x) \neq f(x')$.
- ▶ **Proposition** : deux ensembles E et F ont le même cardinal ($\#E = \#F$) si et seulement si il existe une bijection f de E vers F .
- ▶ Ultimement, montrer que $\#E = n$ revient à montrer qu'il existe une bijection entre E et $\{1, 2, \dots, n\}$ ou $\{0, 1, \dots, n - 1\}$

Les relations de base

La plupart de nos formules de comptage découlent de deux principes élémentaires. (Tous les ensembles considérés sont supposés finis)

- ▶ **Union disjointe** : si $E \cap F = \emptyset$, alors $\#(E \cup F) = \#E + \#F$.

Les relations de base

La plupart de nos formules de comptage découlent de deux principes élémentaires. (Tous les ensembles considérés sont supposés finis)

- ▶ **Union disjointe** : si $E \cap F = \emptyset$, alors $\#(E \cup F) = \#E + \#F$.
- ▶ cas particulier d'une formule qui correspond à celle pour la probabilité d'une union : $\#(E \cup F) = \#E + \#F - \#(E \cap F)$

Les relations de base

La plupart de nos formules de comptage découlent de deux principes élémentaires. (Tous les ensembles considérés sont supposés finis)

- ▶ **Union disjointe** : si $E \cap F = \emptyset$, alors $\#(E \cup F) = \#E + \#F$.
- ▶ cas particulier d'une formule qui correspond à celle pour la probabilité d'une union : $\#(E \cup F) = \#E + \#F - \#(E \cap F)$
- ▶ **Produit cartésien** : $\#(E \times F) = (\#E).(\#F)$.

Les relations de base

La plupart de nos formules de comptage découlent de deux principes élémentaires. (Tous les ensembles considérés sont supposés finis)

- ▶ **Union disjointe** : si $E \cap F = \emptyset$, alors $\#(E \cup F) = \#E + \#F$.
- ▶ cas particulier d'une formule qui correspond à celle pour la probabilité d'une union : $\#(E \cup F) = \#E + \#F - \#(E \cap F)$
- ▶ **Produit cartésien** : $\#(E \times F) = (\#E).(\#F)$.
- ▶ **Exemple** : Si on prend $E = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, $\#E = 6$; on a donc $\#(E \times E) = 36$, et $\#(E \times E \times E) = 6 \times 6 \times 6 = 216$.

Parties d'un ensemble

- ▶ Généralisation immédiate (récurrence sur n) de la formule sur le produit : $\#(E^n) = (\#E)^n$ pour $n \geq 1$.

Parties d'un ensemble

- ▶ Généralisation immédiate (récurrence sur n) de la formule sur le produit : $\#(E^n) = (\#E)^n$ pour $n \geq 1$.
- ▶ E^n , c'est l'ensemble des **suites de longueur** n composées d'éléments (pas forcément distincts) de E .

Parties d'un ensemble

- ▶ Généralisation immédiate (récurrence sur n) de la formule sur le produit : $\#(E^n) = (\#E)^n$ pour $n \geq 1$.
- ▶ E^n , c'est l'ensemble des **suites de longueur** n composées d'éléments (pas forcément distincts) de E .
- ▶ **Théorème** : si $\#E = n$, alors $\#\text{Parties}(E) = 2^n$.

Parties d'un ensemble

- ▶ Généralisation immédiate (récurrence sur n) de la formule sur le produit : $\#(E^n) = (\#E)^n$ pour $n \geq 1$.
- ▶ E^n , c'est l'ensemble des **suites de longueur** n composées d'éléments (pas forcément distincts) de E .
- ▶ **Théorème** : si $\#E = n$, alors $\#\text{Parties}(E) = 2^n$.
- ▶ **Preuve** : on exhibe une bijection entre $\text{Parties}(E)$ et $\{0, 1\}^n$ (dont on sait déjà qu'il a cardinal 2^n) (au tableau)

Factorielle : permutations

- ▶ On appelle *permutation de E* une bijection entre E et lui-même.

Factorielle : permutations

- ▶ On appelle *permutation de E* une bijection entre E et lui-même.
- ▶ Si les éléments de E sont $e_1, e_2, \dots, e_n$, décrire une telle bijection revient à écrire tous ces éléments, une fois et une seule, dans un ordre quelconque, $e_{i_1}, e_{i_2}, \dots, e_{i_n}$ (on pose alors $f(e_k) = e_{i_k}$).

Factorielle : permutations

- ▶ On appelle *permutation de E* une bijection entre E et lui-même.
- ▶ Si les éléments de E sont $e_1, e_2, \dots, e_n$, décrire une telle bijection revient à écrire tous ces éléments, une fois et une seule, dans un ordre quelconque, $e_{i_1}, e_{i_2}, \dots, e_{i_n}$ (on pose alors $f(e_k) = e_{i_k}$).
- ▶ **Proposition** : si $\#E = n$, le nombre de permutations de E est $n! = n(n-1)(n-2) \cdots 2 \cdot 1$

Factorielle : permutations

- ▶ On appelle *permutation de E* une bijection entre E et lui-même.
- ▶ Si les éléments de E sont $e_1, e_2, \dots, e_n$, décrire une telle bijection revient à écrire tous ces éléments, une fois et une seule, dans un ordre quelconque, $e_{i_1}, e_{i_2}, \dots, e_{i_n}$ (on pose alors $f(e_k) = e_{i_k}$).
- ▶ **Proposition** : si $\#E = n$, le nombre de permutations de E est $n! = n(n-1)(n-2) \cdots 2 \cdot 1$
- ▶ **Preuve** : si ce n'est pas évident : preuve par récurrence sur n de la propriété suivante : *si A et B sont deux ensembles de même cardinal n , alors le nombre de bijections de A vers B est $n!$.*

Factorielle : permutations

- ▶ On appelle *permutation de E* une bijection entre E et lui-même.
- ▶ Si les éléments de E sont $e_1, e_2, \dots, e_n$, décrire une telle bijection revient à écrire tous ces éléments, une fois et une seule, dans un ordre quelconque, $e_{i_1}, e_{i_2}, \dots, e_{i_n}$ (on pose alors $f(e_k) = e_{i_k}$).
- ▶ **Proposition** : si $\#E = n$, le nombre de permutations de E est $n! = n(n-1)(n-2) \cdots 2 \cdot 1$
- ▶ **Preuve** : si ce n'est pas évident : preuve par récurrence sur n de la propriété suivante : *si A et B sont deux ensembles de même cardinal n , alors le nombre de bijections de A vers B est $n!$.*
- ▶ Plus généralement, $n!$ c'est aussi le nombre de façons d'ordonner (classer) complètement les éléments d'un ensemble de cardinal n .

Coefficients binomiaux

On définit la notation $\binom{n}{k}$ (pour $0 \leq k \leq n$) comme : si E est un ensemble de cardinal n , alors $\binom{n}{k} = \#Parties_k(E)$.

- C'est vraiment une définition : si $\#E = \#F$, alors il existe bien une bijection entre $\#Parties_k(E)$ et $\#Parties_k(F)$

Coefficients binomiaux

On définit la notation $\binom{n}{k}$ (pour $0 \leq k \leq n$) comme : si E est un ensemble de cardinal n , alors $\binom{n}{k} = \#Parties_k(E)$.

- ▶ C'est vraiment une définition : si $\#E = \#F$, alors il existe bien une bijection entre $\#Parties_k(E)$ et $\#Parties_k(F)$
- ▶ Avec une telle définition, il n'est pas évident que l'on ait

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

(il faut le démontrer !)

Coefficients binomiaux

On définit la notation $\binom{n}{k}$ (pour $0 \leq k \leq n$) comme : si E est un ensemble de cardinal n , alors $\binom{n}{k} = \#Parties_k(E)$.

- ▶ C'est vraiment une définition : si $\#E = \#F$, alors il existe bien une bijection entre $\#Parties_k(E)$ et $\#Parties_k(F)$
- ▶ Avec une telle définition, il n'est pas évident que l'on ait

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

(il faut le démontrer !)

- ▶ On va prouver : $k!(n-k)!\binom{n}{k} = n!$

Un exemple partiel : $n = 5$, $k = 2$

On liste toutes les permutations dont les deux premières valeurs, dans n'importe quel ordre, sont 1 et 2 :

12 345

12 354

12 435

12 453

12 534

12 543

21 345

21 354

21 435

21 453

21 534

21 543

$$k!(n-k)!\binom{n}{k} = n!$$

On interprète les facteurs dans le terme de gauche :

- ▶ $\binom{n}{k}$: le choix de k éléments de $\{1, 2, \dots, n\}$

$$k!(n-k)!\binom{n}{k} = n!$$

On interprète les facteurs dans le terme de gauche :

- ▶ $\binom{n}{k}$: le choix de k éléments de $\{1, 2, \dots, n\}$
- ▶ $k!$: un ordre possible sur les k éléments choisis

$$k!(n-k)!\binom{n}{k} = n!$$

On interprète les facteurs dans le terme de gauche :

- ▶ $\binom{n}{k}$: le choix de k éléments de $\{1, 2, \dots, n\}$
- ▶ $k!$: un ordre possible sur les k éléments choisis
- ▶ $(n-k)!$: un ordre possible sur les $(n-k)$ éléments restants

$$k!(n - k)! \binom{n}{k} = n!$$

On interprète les facteurs dans le terme de gauche :

- ▶ $\binom{n}{k}$: le choix de k éléments de $\{1, 2, \dots, n\}$
- ▶ $k!$: un ordre possible sur les k éléments choisis
- ▶ $(n - k)!$: un ordre possible sur les $(n - k)$ éléments restants
- ▶ à partir de ces trois données, il nous faut construire un ordre possible sur les n éléments, **de manière à ce qu'on puisse revenir en arrière**

$$k!(n - k)! \binom{n}{k} = n!$$

On interprète les facteurs dans le terme de gauche :

- ▶ $\binom{n}{k}$: le choix de k éléments de $\{1, 2, \dots, n\}$
- ▶ $k!$: un ordre possible sur les k éléments choisis
- ▶ $(n - k)!$: un ordre possible sur les $(n - k)$ éléments restants
- ▶ à partir de ces trois données, il nous faut construire un ordre possible sur les n éléments, **de manière à ce qu'on puisse revenir en arrière**
- ▶ C'est facile : on met d'abord les k "choisis", dans l'ordre choisi ; puis les $n - k$ "non choisis", dans l'ordre choisi.

$$k!(n - k)!\binom{n}{k} = n!$$

On interprète les facteurs dans le terme de gauche :

- ▶ $\binom{n}{k}$: le choix de k éléments de $\{1, 2, \dots, n\}$
- ▶ $k!$: un ordre possible sur les k éléments choisis
- ▶ $(n - k)!$: un ordre possible sur les $(n - k)$ éléments restants
- ▶ à partir de ces trois données, il nous faut construire un ordre possible sur les n éléments, **de manière à ce qu'on puisse revenir en arrière**
- ▶ C'est facile : on met d'abord les k "choisis", dans l'ordre choisi ; puis les $n - k$ "non choisis", dans l'ordre choisi.
- ▶ *Inversement*, à partir de l'ordre sur les n éléments, les "choisis" sont les k premiers, et les deux ordres sont retrouvés en lisant dans l'ordre.

D'autres relations sur les binomiaux

On peut assez facilement prouver d'autres relations satisfaites par les coefficients binomiaux :

- ▶ $\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1}$: “parmi les parties de $\{1, \dots, n\}$ à k éléments, il y a celles qui contiennent l'entier n , et celles qui ne le contiennent pas”

D'autres relations sur les binomiaux

On peut assez facilement prouver d'autres relations satisfaites par les coefficients binomiaux :

- ▶ $\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1}$: “parmi les parties de $\{1, \dots, n\}$ à k éléments, il y a celles qui contiennent l'entier n , et celles qui ne le contiennent pas”
- ▶ $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$: “un ensemble à n éléments a autant de parties à k éléments que de parties à $(n - k)$ éléments”

D'autres relations sur les binomiaux

On peut assez facilement prouver d'autres relations satisfaites par les coefficients binomiaux :

- ▶ $\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1}$: “parmi les parties de $\{1, \dots, n\}$ à k éléments, il y a celles qui contiennent l'entier n , et celles qui ne le contiennent pas”
- ▶ $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$: “un ensemble à n éléments a autant de parties à k éléments que de parties à $(n - k)$ éléments”
- ▶ $\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-2}{k-1} + \dots + \binom{k}{k-1} + \binom{k-1}{k-1}$: “prenons une partie quelconque à k éléments de $\{1, \dots, n\}$; si on enlève le plus grand élément, qu'obtient-on ?”

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}$$

$$n = 5, k = 3$$

123 123

124 124

125 12

134 134

135 13

145 14

234 234

235 23

245 24

345 34

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}$$

$$n = 5, k = 3$$

123 123

124 124

134 134

234 234

125 12

135 13

145 14

235 23

245 24

345 34

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$$

$$n = 6, k = 2$$

12 1234

13 1235

14 1236

15 1245

16 1246

23 1256

24 1345

25 1346

26 1356

34 1456

35 2345

36 2346

45 2356

46 2456

56 3456

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$$

$$n = 6, k = 2$$

12 3456

13 2456

14 2356

15 2346

16 2345

23 1456

24 1356

25 1346

26 1345

34 1256

35 1246

36 1245

45 1236

46 1235

56 1234

Nombres de Catalan

La suite $(C_n)_{n \geq 0}$ des *nombres de Catalan* (Eugène Charles Catalan, 1814-1894, mathématicien belge - rien à voir avec Barcelone) est une suite d'entiers emblématique : on connaît un grand nombre de familles d'objets qui sont comptées par ces nombres.

- Une définition possible : C_n est le nombre de séquences de longueur $2n$, composées des symboles a et b , avec autant de a que de b , et telles que *pour tout k , parmi les k premiers symboles il y a au moins autant de a que de b (mots de Dyck)*.

Nombres de Catalan

La suite $(C_n)_{n \geq 0}$ des *nombres de Catalan* (Eugène Charles Catalan, 1814-1894, mathématicien belge - rien à voir avec Barcelone) est une suite d'entiers emblématique : on connaît un grand nombre de familles d'objets qui sont comptées par ces nombres.

- ▶ Une définition possible : C_n est le nombre de séquences de longueur $2n$, composées des symboles a et b , avec autant de a que de b , et telles que *pour tout k , parmi les k premiers symboles il y a au moins autant de a que de b (mots de Dyck)*.
- ▶ Interprétation élémentaire des mots de Dyck : ils codent exactement les “chemins” dans le plan formés de pas Nord-Est (a) et Sud-Est (b), partant de l'origine $(0,0)$, terminant sur l'axe horizontal, et ne passant jamais *sous* l'axe horizontal (“chemins de Dyck”).

Nombres de Catalan

La suite $(C_n)_{n \geq 0}$ des *nombres de Catalan* (Eugène Charles Catalan, 1814-1894, mathématicien belge - rien à voir avec Barcelone) est une suite d'entiers emblématique : on connaît un grand nombre de familles d'objets qui sont comptées par ces nombres.

- ▶ Une définition possible : C_n est le nombre de séquences de longueur $2n$, composées des symboles a et b , avec autant de a que de b , et telles que *pour tout k , parmi les k premiers symboles il y a au moins autant de a que de b (mots de Dyck)*.
- ▶ Interprétation élémentaire des mots de Dyck : ils codent exactement les “chemins” dans le plan formés de pas Nord-Est (a) et Sud-Est (b), partant de l'origine $(0,0)$, terminant sur l'axe horizontal, et ne passant jamais *sous* l'axe horizontal (“chemins de Dyck”).
- ▶ Autre interprétation : “mots bien parenthésés” de longueur $2n$ (toute parenthèse ouverte doit être fermée, et elle doit être fermée après avoir été ouverte).

Formule pour les nombres de Catalan

- **Formule** : on a, pour tout $n \geq 0$,

$$C_n = \frac{1}{n+1} \binom{2n}{n}.$$

Formule pour les nombres de Catalan

- **Formule** : on a, pour tout $n \geq 0$,

$$C_n = \frac{1}{n+1} \binom{2n}{n}.$$

- **Preuve** : on prouve plutôt $(n+1)C_n = \binom{2n}{n}$ (d'un côté : un entier k entre 1 et $n+1$, et un chemin de Dyck D de longueur $2n$; de l'autre : un chemin C à pas Nord-Est et Sud-Est de $(0,0$ à $(2n,0)$, non contraint à rester au-dessus de l'axe)

Formule pour les nombres de Catalan

- **Formule** : on a, pour tout $n \geq 0$,

$$C_n = \frac{1}{n+1} \binom{2n}{n}.$$

- **Preuve** : on prouve plutôt $(n+1)C_n = \binom{2n}{n}$ (d'un côté : un entier k entre 1 et $n+1$, et un chemin de Dyck D de longueur $2n$; de l'autre : un chemin C à pas Nord-Est et Sud-Est de $(0,0$ à $(2n,0)$, non contraint à rester au-dessus de l'axe)
- de (D, k) à C : ajouter un pas Sud-Est à la fin de D , puis échanger les parties de D' avant et après le k -ème pas Sud-Est; retirer le dernier pas Sud-Est.

Formule pour les nombres de Catalan

- **Formule** : on a, pour tout $n \geq 0$,

$$C_n = \frac{1}{n+1} \binom{2n}{n}.$$

- **Preuve** : on prouve plutôt $(n+1)C_n = \binom{2n}{n}$ (d'un côté : un entier k entre 1 et $n+1$, et un chemin de Dyck D de longueur $2n$; de l'autre : un chemin C à pas Nord-Est et Sud-Est de $(0,0$ à $(2n,0)$, non contraint à rester au-dessus de l'axe)
- de (D, k) à C : ajouter un pas Sud-Est à la fin de D , puis échanger les parties de D' avant et après le k -ème pas Sud-Est; retirer le dernier pas Sud-Est.
- de C à (D, k) : ajouter un pas Sud-Est à la fin de C ; noter $n+2-k$ le numéro du pas Sud-Est de C' qui amène pour la première fois à la hauteur minimale; échanger les parties avant et après ce pas; retirer le dernier pas Sud-Est.

Relation de récurrence

- **Théorème** : la suite (C_n) des nombres de Catalan satisfait la relation suivante : $C_0 = 1$, et pour tout $n \geq 1$,

$$C_n = \sum_{k=0}^{n-1} C_k C_{n-1-k}.$$

Relation de récurrence

- **Théorème** : la suite (C_n) des nombres de Catalan satisfait la relation suivante : $C_0 = 1$, et pour tout $n \geq 1$,

$$C_n = \sum_{k=0}^{n-1} C_k C_{n-1-k}.$$

- **Remarque** : si c'est vrai, c'est *la seule* suite à satisfaire cette récurrence : la relation définit C_1 en fonction de C_0 , C_2 en fonction de C_0 et C_1 , C_3 en fonction de C_0 , C_1 et $C_2, \dots$

Relation de récurrence

- **Théorème** : la suite (C_n) des nombres de Catalan satisfait la relation suivante : $C_0 = 1$, et pour tout $n \geq 1$,

$$C_n = \sum_{k=0}^{n-1} C_k C_{n-1-k}.$$

- **Remarque** : si c'est vrai, c'est *la seule* suite à satisfaire cette récurrence : la relation définit C_1 en fonction de C_0 , C_2 en fonction de C_0 et C_1 , C_3 en fonction de C_0 , C_1 et $C_2, \dots$
- **Preuve** : Décomposition unique d'un mot de Dyck en deux mots

Relation de récurrence

- ▶ **Théorème** : la suite (C_n) des nombres de Catalan satisfait la relation suivante : $C_0 = 1$, et pour tout $n \geq 1$,

$$C_n = \sum_{k=0}^{n-1} C_k C_{n-1-k}.$$

- ▶ **Remarque** : si c'est vrai, c'est *la seule* suite à satisfaire cette récurrence : la relation définit C_1 en fonction de C_0 , C_2 en fonction de C_0 et C_1 , C_3 en fonction de C_0 , C_1 et $C_2, \dots$
- ▶ **Preuve** : Décomposition unique d'un mot de Dyck en deux mots
- ▶ **Conséquence** : si on a une autre famille d'objets pour laquelle on peut prouver la même récurrence, ces objets sont aussi comptés par la suite de Catalan

Relation de récurrence

- ▶ **Théorème** : la suite (C_n) des nombres de Catalan satisfait la relation suivante : $C_0 = 1$, et pour tout $n \geq 1$,

$$C_n = \sum_{k=0}^{n-1} C_k C_{n-1-k}.$$

- ▶ **Remarque** : si c'est vrai, c'est *la seule* suite à satisfaire cette récurrence : la relation définit C_1 en fonction de C_0 , C_2 en fonction de C_0 et C_1 , C_3 en fonction de C_0 , C_1 et $C_2, \dots$
- ▶ **Preuve** : Décomposition unique d'un mot de Dyck en deux mots
- ▶ **Conséquence** : si on a une autre famille d'objets pour laquelle on peut prouver la même récurrence, ces objets sont aussi comptés par la suite de Catalan
- ▶ **Exemple** : il y a C_n arbres binaires (sans étiquettes) à n noeuds.