

Probabilités, Statistiques, Combinatoire

Philippe Duchon

Université de Bordeaux – Licence Informatique

2017-2018

Expérience : chemins de Dyck aléatoires

- ▶ Obtention d'un mot de Dyck aléatoire de longueur $2n$ donnée :
 - ▶ on part d'un mot avec autant de 0 que de 1 (n'importe lequel)
 - ▶ on le "mélange" (comme en TD)
 - ▶ on obtient un mot aléatoire uniforme parmi ceux qui ont autant de 0 que de 1 (\mathcal{B}_n)
 - ▶ on applique la bijection vue en cours entre $\mathcal{B}_n \times [[1, n + 1]]$ et \mathcal{D}_n (mais on "jette" l'entier à la fin)

Expérience : chemins de Dyck aléatoires

- ▶ Obtention d'un mot de Dyck aléatoire de longueur $2n$ donnée :
 - ▶ on part d'un mot avec autant de 0 que de 1 (n'importe lequel)
 - ▶ on le "mélange" (comme en TD)
 - ▶ on obtient un mot aléatoire uniforme parmi ceux qui ont autant de 0 que de 1 (\mathcal{B}_n)
 - ▶ on applique la bijection vue en cours entre $\mathcal{B}_n \times [[1, n + 1]]$ et \mathcal{D}_n (mais on "jette" l'entier à la fin)
- ▶ **Tracé** : on passe d'un chemin de longueur $2n$ à une courbe sur l'intervalle $[0, 2]$, en divisant les abscisses par n ; et on divise les ordonnées par \sqrt{n}

Expérience : chemins de Dyck aléatoires

- ▶ Obtention d'un mot de Dyck aléatoire de longueur $2n$ donnée :
 - ▶ on part d'un mot avec autant de 0 que de 1 (n'importe lequel)
 - ▶ on le "mélange" (comme en TD)
 - ▶ on obtient un mot aléatoire uniforme parmi ceux qui ont autant de 0 que de 1 (\mathcal{B}_n)
 - ▶ on applique la bijection vue en cours entre $\mathcal{B}_n \times [[1, n + 1]]$ et \mathcal{D}_n (mais on "jette" l'entier à la fin)
- ▶ **Tracé** : on passe d'un chemin de longueur $2n$ à une courbe sur l'intervalle $[0, 2]$, en divisant les abscisses par n ; et on divise les ordonnées par \sqrt{n}
- ▶ Le tracé d'un chemin de Dyck de longueur $2n$ correspond bien au "contour" d'un arbre planaire aléatoire à $n + 1$ noeuds.

Expérience : chemins de Dyck aléatoires

- ▶ Obtention d'un mot de Dyck aléatoire de longueur $2n$ donnée :
 - ▶ on part d'un mot avec autant de 0 que de 1 (n'importe lequel)
 - ▶ on le "mélange" (comme en TD)
 - ▶ on obtient un mot aléatoire uniforme parmi ceux qui ont autant de 0 que de 1 (\mathcal{B}_n)
 - ▶ on applique la bijection vue en cours entre $\mathcal{B}_n \times [[1, n + 1]]$ et \mathcal{D}_n (mais on "jette" l'entier à la fin)
- ▶ **Tracé** : on passe d'un chemin de longueur $2n$ à une courbe sur l'intervalle $[0, 2]$, en divisant les abscisses par n ; et on divise les ordonnées par \sqrt{n}
- ▶ Le tracé d'un chemin de Dyck de longueur $2n$ correspond bien au "contour" d'un arbre planaire aléatoire à $n + 1$ noeuds.
- ▶ Sur le même tracé : trois chemins, de longueurs 2000, 10000, 40000 ; pouvez-vous deviner lequel est lequel ?

Quelques expériences

- ▶ Chaque courbe : une réalisation de suite (S_n)
 - ▶ pour chaque courbe : on prend une suite (X_n) de variables aléatoires indépendantes, de même loi ;
 - ▶ on pose $S_n = (X_1 + X_2 + \cdots + X_n)/n$
 - ▶ on trace S_n en fonction de n
- ▶ Toutes les espérances sont les mêmes (3.5)

Observations

- ▶ Les courbes semblent avoir tendance à s'approcher d'une même limite, qui est (ou est proche de) l'espérance.

Observations

- ▶ Les courbes semblent avoir tendance à s'approcher d'une même limite, qui est (ou est proche de) l'espérance.
- ▶ L'écart à la limite, en fonction de la longueur de la suite, semble à peu près décroître (mais pas très vite)

Observations

- ▶ Les courbes semblent avoir tendance à s'approcher d'une même limite, qui est (ou est proche de) l'espérance.
- ▶ L'écart à la limite, en fonction de la longueur de la suite, semble à peu près décroître (mais pas très vite)
- ▶ On va **préciser** ces observations, et **prouver** certains énoncés.

Notions de limites en théorie des probabilités

- ▶ La notion mathématique de *limite* (de suite, de fonction) n'est pas simple : elle n'a été définie proprement, au sens moderne, qu'au cours du 19^e siècle (avant cela, c'était une source de "paradoxes").

Notions de limites en théorie des probabilités

- ▶ La notion mathématique de *limite* (de suite, de fonction) n'est pas simple : elle n'a été définie proprement, au sens moderne, qu'au cours du 19^e siècle (avant cela, c'était une source de "paradoxes").
- ▶ On voudrait parler de "la limite de telle ou telle suite de variables aléatoires", mais c'est encore compliqué par le fait que les "variables aléatoires" sont en fait des *fonctions* (il existe plusieurs notions légèrement différentes de ce que signifie "avoir une limite" pour une suite de fonctions).

Notions de limites en théorie des probabilités

- ▶ La notion mathématique de *limite* (de suite, de fonction) n'est pas simple : elle n'a été définie proprement, au sens moderne, qu'au cours du 19e siècle (avant cela, c'était une source de "paradoxes").
- ▶ On voudrait parler de "la limite de telle ou telle suite de variables aléatoires", mais c'est encore compliqué par le fait que les "variables aléatoires" sont en fait des *fonctions* (il existe plusieurs notions légèrement différentes de ce que signifie "avoir une limite" pour une suite de fonctions).
- ▶ Résultat, on peut donner des sens variés à ce que veut dire "regarder X_n quand n devient grand"

Notions de limites en théorie des probabilités

- ▶ La notion mathématique de *limite* (de suite, de fonction) n'est pas simple : elle n'a été définie proprement, au sens moderne, qu'au cours du 19e siècle (avant cela, c'était une source de "paradoxes").
- ▶ On voudrait parler de "la limite de telle ou telle suite de variables aléatoires", mais c'est encore compliqué par le fait que les "variables aléatoires" sont en fait des *fonctions* (il existe plusieurs notions légèrement différentes de ce que signifie "avoir une limite" pour une suite de fonctions).
- ▶ Résultat, on peut donner des sens variés à ce que veut dire "regarder X_n quand n devient grand"
- ▶ (C'est malheureusement une question fondamentale quand on veut faire des statistiques !)

Loi des grands nombres

- ▶ On prend une *suite* (infinie) de variables aléatoires $X_1, X_2, \dots, X_n, \dots$, à valeurs réelles.

Loi des grands nombres

- ▶ On prend une *suite* (infinie) de variables aléatoires $X_1, X_2, \dots, X_n, \dots$, à valeurs réelles.
- ▶ **Hypothèse** : les X_i sont toutes de même loi, et indépendantes (par exemple : toutes géométriques de même paramètre p ; toutes Bernoulli de même paramètre p ; etc)

Loi des grands nombres

- ▶ On prend une *suite* (infinie) de variables aléatoires $X_1, X_2, \dots, X_n, \dots$, à valeurs réelles.
- ▶ **Hypothèse** : les X_i sont toutes de même loi, et indépendantes (par exemple : toutes géométriques de même paramètre p ; toutes Bernoulli de même paramètre p ; etc)
- ▶ **On suppose de plus** que ces variables aléatoires ont une espérance, et une variance, finies.

Loi des grands nombres

- ▶ On prend une *suite* (infinie) de variables aléatoires $X_1, X_2, \dots, X_n, \dots$, à valeurs réelles.
- ▶ **Hypothèse** : les X_i sont toutes de même loi, et indépendantes (par exemple : toutes géométriques de même paramètre p ; toutes Bernoulli de même paramètre p ; etc)
- ▶ **On suppose de plus** que ces variables aléatoires ont une espérance, et une variance, finies.
- ▶ On pose alors $S_n = (X_1 + X_2 + \dots + X_n)/n$

Loi des grands nombres

- ▶ On prend une *suite* (infinie) de variables aléatoires $X_1, X_2, \dots, X_n, \dots$, à valeurs réelles.
- ▶ **Hypothèse** : les X_i sont toutes de même loi, et indépendantes (par exemple : toutes géométriques de même paramètre p ; toutes Bernoulli de même paramètre p ; etc)
- ▶ **On suppose de plus** que ces variables aléatoires ont une espérance, et une variance, finies.
- ▶ On pose alors $S_n = (X_1 + X_2 + \dots + X_n)/n$
- ▶ À quoi doit-on s'attendre pour la suite de variables aléatoires $(S_n)_{n \geq 1}$?

Inégalité de Markov

Théorème (inégalité de Markov)

Soit X une variable aléatoire à **valeurs réelles et positives ou nulles**, dont on suppose qu'elle admet une **espérance** $m > 0$.

Alors, pour tout réel $\lambda \geq m$, on a

$$\mathbb{P}(X > \lambda) \leq \frac{m}{\lambda}.$$

Preuve : admis (pas très difficile)

Inégalité de Tchebycheff

Théorème (inégalité de Tchebycheff)

Soit X une variable aléatoire à valeurs réelles, dont on suppose uniquement qu'elle admet une espérance m et une variance $v > 0$. On pose $\sigma = \sqrt{v}$ (écart-type).

Alors pour tout réel $x > 0$, on a

$$\mathbb{P}(X \in [m - x\sigma, m + x\sigma]) \geq 1 - \frac{1}{x^2}$$
$$\mathbb{P}(|X - m| > x\sigma) \leq \frac{1}{x^2}$$

Preuve : admis (il suffit d'appliquer l'inégalité de Markov à $Y = |X - m|^2$).

Revenons à nos sommes partielles. . .

- ▶ $M_n = (X_1 + \cdots + X_n)/n$, avec les X_i indépendantes, de même loi, d'espérance m et de variance $v = \sigma^2$

Revenons à nos sommes partielles. . .

- ▶ $M_n = (X_1 + \dots + X_n)/n$, avec les X_i indépendantes, de même loi, d'espérance m et de variance $v = \sigma^2$
- ▶ D'après ce qu'on sait de l'espérance et de la variance, on a

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(M_n) &= m \\ \mathbf{Var}(M_n) &= \frac{v}{n}\end{aligned}$$

Revenons à nos sommes partielles. . .

- ▶ $M_n = (X_1 + \cdots + X_n)/n$, avec les X_i indépendantes, de même loi, d'espérance m et de variance $v = \sigma^2$
- ▶ D'après ce qu'on sait de l'espérance et de la variance, on a

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(M_n) &= m \\ \mathbf{Var}(M_n) &= \frac{v}{n}\end{aligned}$$

- ▶ **Donc**, d'après l'inégalité de Tchebycheff, si on prend un réel $\epsilon > 0$ quelconque, on a

$$\mathbb{P}(M_n \in [m - \epsilon, m + \epsilon]) \geq 1 - \frac{v}{\epsilon^2 n}$$

Revenons à nos sommes partielles. . .

- ▶ $M_n = (X_1 + \dots + X_n)/n$, avec les X_i indépendantes, de même loi, d'espérance m et de variance $v = \sigma^2$
- ▶ D'après ce qu'on sait de l'espérance et de la variance, on a

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(M_n) &= m \\ \mathbf{Var}(M_n) &= \frac{v}{n}\end{aligned}$$

- ▶ **Donc**, d'après l'inégalité de Tchebycheff, si on prend un réel $\epsilon > 0$ quelconque, on a

$$\mathbb{P}(M_n \in [m - \epsilon, m + \epsilon]) \geq 1 - \frac{v}{\epsilon^2 n}$$

- ▶ **Donc**, pour tout $\epsilon > 0$,

$$\lim_n \mathbb{P}(M_n \in [m - \epsilon, m + \epsilon]) = 1$$

Revenons à nos sommes partielles. . .

- ▶ $M_n = (X_1 + \cdots + X_n)/n$, avec les X_i indépendantes, de même loi, d'espérance m et de variance $v = \sigma^2$
- ▶ D'après ce qu'on sait de l'espérance et de la variance, on a

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(M_n) &= m \\ \mathbf{Var}(M_n) &= \frac{v}{n}\end{aligned}$$

- ▶ **Donc**, d'après l'inégalité de Tchebycheff, si on prend un réel $\epsilon > 0$ quelconque, on a

$$\mathbb{P}(M_n \in [m - \epsilon, m + \epsilon]) \geq 1 - \frac{v}{\epsilon^2 n}$$

- ▶ **Donc**, pour tout $\epsilon > 0$,

$$\lim_n \mathbb{P}(M_n \in [m - \epsilon, m + \epsilon]) = 1$$

- ▶ Techniquement, on dit que M_n *converge en probabilités vers la constante m* ; cette propriété importante s'appelle **loi des grands nombres**.

Convergence en probabilités (en général)

- ▶ On se donne une variable aléatoire X , et une suite (X_n) de variables aléatoires, toutes définies sur le même espace de probabilités, et toutes à valeurs dans \mathbb{R} .

Convergence en probabilités (en général)

- ▶ On se donne une variable aléatoire X , et une suite (X_n) de variables aléatoires, toutes définies sur le même espace de probabilités, et toutes à valeurs dans \mathbb{R} .
- ▶ On dit que X_n *converge en probabilités vers* X , si, pour tout $\epsilon > 0$, on a

$$\lim_n \mathbb{P}(|X_n - X| \geq \epsilon) = 0$$

Convergence en probabilités (en général)

- ▶ On se donne une variable aléatoire X , et une suite (X_n) de variables aléatoires, toutes définies sur le même espace de probabilités, et toutes à valeurs dans \mathbb{R} .
- ▶ On dit que X_n *converge en probabilités vers* X , si, pour tout $\epsilon > 0$, on a

$$\lim_n \mathbb{P}(|X_n - X| \geq \epsilon) = 0$$

- ▶ Dans la loi des grands nombres, on constate que la suite (M_n) converge en probabilités vers la variable aléatoire “constante égale à m ” (fonction définie sur l’espace de probabilités, et qui ne prend que la valeur m)

Convergence en probabilités (en général)

- ▶ On se donne une variable aléatoire X , et une suite (X_n) de variables aléatoires, toutes définies sur le même espace de probabilités, et toutes à valeurs dans \mathbb{R} .
- ▶ On dit que X_n *converge en probabilités vers* X , si, pour tout $\epsilon > 0$, on a

$$\lim_n \mathbb{P}(|X_n - X| \geq \epsilon) = 0$$

- ▶ Dans la loi des grands nombres, on constate que la suite (M_n) converge en probabilités vers la variable aléatoire “constante égale à m ” (fonction définie sur l’espace de probabilités, et qui ne prend que la valeur m)
- ▶ On peut avoir convergence en probabilités vers des variables aléatoires qui ne sont pas des constantes.

Un exemple de convergence en probabilités

- ▶ On prend une suite de variables de Bernoulli, (B_n) (peuvent être indépendantes ou non ; peuvent avoir le même paramètre, ou non).

Un exemple de convergence en probabilités

- ▶ On prend une suite de variables de Bernoulli, (B_n) (peuvent être indépendantes ou non ; peuvent avoir le même paramètre, ou non).
- ▶ On pose alors, pour tout n ,

$$X_n = \sum_{k=1}^n \frac{B_k}{2^k} = \frac{B_1}{2} + \frac{B_2}{4} + \frac{B_3}{8} + \cdots + \frac{B_n}{2^n}.$$

Un exemple de convergence en probabilités

- ▶ On prend une suite de variables de Bernoulli, (B_n) (peuvent être indépendantes ou non ; peuvent avoir le même paramètre, ou non).
- ▶ On pose alors, pour tout n ,

$$X_n = \sum_{k=1}^n \frac{B_k}{2^k} = \frac{B_1}{2} + \frac{B_2}{4} + \frac{B_3}{8} + \cdots + \frac{B_n}{2^n}.$$

- ▶ On pose également $B = \sum_{k \geq 1} B_k/2^k$ (attention, somme infinie ! il y a un peu de travail pour prouver qu'on définit bien une variable aléatoire. . .)

Un exemple de convergence en probabilités

- ▶ On prend une suite de variables de Bernoulli, (B_n) (peuvent être indépendantes ou non ; peuvent avoir le même paramètre, ou non).
- ▶ On pose alors, pour tout n ,

$$X_n = \sum_{k=1}^n \frac{B_k}{2^k} = \frac{B_1}{2} + \frac{B_2}{4} + \frac{B_3}{8} + \cdots + \frac{B_n}{2^n}.$$

- ▶ On pose également $B = \sum_{k \geq 1} B_k/2^k$ (attention, somme infinie ! il y a un peu de travail pour prouver qu'on définit bien une variable aléatoire...)
- ▶ On a alors $B - X_n = \sum_{k > n} B_k/2^k$

Un exemple de convergence en probabilités

- ▶ On prend une suite de variables de Bernoulli, (B_n) (peuvent être indépendantes ou non ; peuvent avoir le même paramètre, ou non).
- ▶ On pose alors, pour tout n ,

$$X_n = \sum_{k=1}^n \frac{B_k}{2^k} = \frac{B_1}{2} + \frac{B_2}{4} + \frac{B_3}{8} + \cdots + \frac{B_n}{2^n}.$$

- ▶ On pose également $B = \sum_{k \geq 1} B_k/2^k$ (attention, somme infinie ! il y a un peu de travail pour prouver qu'on définit bien une variable aléatoire...)
- ▶ On a alors $B - B_n = \sum_{k > n} B_k/2^k$
- ▶ Comme pour tout k on a (toujours) $0 \leq B_k \leq 1$, on a (toujours) $0 \leq B - B_n \leq \sum_{k > n} 1/2^k = 1/2^n$.

Un exemple de convergence en probabilités

- ▶ On prend une suite de variables de Bernoulli, (B_n) (peuvent être indépendantes ou non ; peuvent avoir le même paramètre, ou non).
- ▶ On pose alors, pour tout n ,

$$X_n = \sum_{k=1}^n \frac{B_k}{2^k} = \frac{B_1}{2} + \frac{B_2}{4} + \frac{B_3}{8} + \cdots + \frac{B_n}{2^n}.$$

- ▶ On pose également $B = \sum_{k \geq 1} B_k/2^k$ (attention, somme infinie ! il y a un peu de travail pour prouver qu'on définit bien une variable aléatoire...)
- ▶ On a alors $B - B_n = \sum_{k > n} B_k/2^k$
- ▶ Comme pour tout k on a (toujours) $0 \leq B_k \leq 1$, on a (toujours) $0 \leq B - B_n \leq \sum_{k > n} 1/2^k = 1/2^n$.
- ▶ **Donc**, pour un $\epsilon > 0$ donné, on a, dès que $1/2^n < \epsilon$ (soit $n > \log_2(1/\epsilon)$),

$$\{|B_n - B| > \epsilon\} = \emptyset$$

et donc (B_n) converge vers B en probabilités.

Un exemple de convergence en probabilités

- ▶ On prend une suite de variables de Bernoulli, (B_n) (peuvent être indépendantes ou non ; peuvent avoir le même paramètre, ou non).
- ▶ On pose alors, pour tout n ,

$$X_n = \sum_{k=1}^n \frac{B_k}{2^k} = \frac{B_1}{2} + \frac{B_2}{4} + \frac{B_3}{8} + \dots + \frac{B_n}{2^n}.$$

- ▶ On pose également $B = \sum_{k \geq 1} B_k/2^k$ (attention, somme infinie ! il y a un peu de travail pour prouver qu'on définit bien une variable aléatoire...)
- ▶ On a alors $B - B_n = \sum_{k > n} B_k/2^k$
- ▶ Comme pour tout k on a (toujours) $0 \leq B_k \leq 1$, on a (toujours) $0 \leq B - B_n \leq \sum_{k > n} 1/2^k = 1/2^n$.
- ▶ **Donc**, pour un $\epsilon > 0$ donné, on a, dès que $1/2^n < \epsilon$ (soit $n > \log_2(1/\epsilon)$),

$$\{|B_n - B| > \epsilon\} = \emptyset$$

et donc (B_n) converge vers B en probabilités.

- ▶ (Si les X_i sont des Bernoulli de paramètre $1/2$ indépendantes.

Le “théorème central limite”

- ▶ (On a toujours : (X_n) indépendantes et de même loi,
 $S_n = X_1 + \cdots + X_n$)

Le “théorème central limite”

- ▶ (On a toujours : (X_n) indépendantes et de même loi,
 $S_n = X_1 + \dots + X_n$)
- ▶ On pose $S'_n = S_n - n.m$: variable aléatoire “centrée”
(espérance nulle)

Le “théorème central limite”

- ▶ (On a toujours : (X_n) indépendantes et de même loi,
 $S_n = X_1 + \cdots + X_n$)
- ▶ On pose $S'_n = S_n - n.m$: variable aléatoire “centrée”
(espérance nulle)
- ▶ La variance de S'_n est la même que celle de S_n , soit $n.\sigma^2$.

Le “théorème central limite”

- ▶ (On a toujours : (X_n) indépendantes et de même loi,
 $S_n = X_1 + \dots + X_n$)
- ▶ On pose $S'_n = S_n - n.m$: variable aléatoire “centrée”
(espérance nulle)
- ▶ La variance de S'_n est la même que celle de S_n , soit $n.\sigma^2$.
- ▶ On obtient donc une nouvelle variable aléatoire de variance 1,
en divisant par $\sigma\sqrt{n}$:

$$Z_n = \frac{S_n - n.m}{\sigma\sqrt{n}}.$$

Le “théorème central limite”

- ▶ (On a toujours : (X_n) indépendantes et de même loi,
 $S_n = X_1 + \dots + X_n$)
- ▶ On pose $S'_n = S_n - n.m$: variable aléatoire “centrée”
(espérance nulle)
- ▶ La variance de S'_n est la même que celle de S_n , soit $n.\sigma^2$.
- ▶ On obtient donc une nouvelle variable aléatoire de variance 1,
en divisant par $\sigma\sqrt{n}$:

$$Z_n = \frac{S_n - n.m}{\sigma\sqrt{n}}.$$

- ▶ **Surprise !** la loi de Z_n dépend de celle de X_1 , mais
“asymptotiquement” n’en dépend pas : *la loi de Z_n se rapproche (en un sens à préciser) d’une loi qui est toujours la même, quelle que soit la loi dont on est partie pour les X_i .*

Théorème central limite, l'énoncé

Théorème (“central limite”)

Soit $(X_n)_{n \geq 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes, de même loi, d'espérance et de variance finies (respectivement, m et σ^2).

Alors, pour la suite de variables aléatoires $(Z_n)_{n \geq 1}$ définies de la manière suivante :

$$Z_n = \frac{(\sum_{k=1}^n X_k) - n.m}{\sigma\sqrt{n}}$$

on a la propriété de convergence suivante : pour tout intervalle $[a, b]$,

$$\lim_n \mathbb{P}(Z_n \in [a, b]) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_a^b e^{-x^2/2} dx$$

Proof : admis !

Note : le théorème est souvent énoncé en ne prenant $a = -\infty$ (on regarde alors la fonction de répartition de Z_n); c'est équivalent.

TCL : commentaires

- ▶ La formule

$$\mathbb{P}(Z \in [a, b]) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_a^b e^{-x^2/2} dx$$

est en fait la définition d'une loi particulière (pour Z) : la loi dite *gaussienne (centrée réduite)* ou *normale*.

TCL : commentaires

- ▶ La formule

$$\mathbb{P}(Z \in [a, b]) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_a^b e^{-x^2/2} dx$$

est en fait la définition d'une loi particulière (pour Z) : la loi dite *gaussienne (centrée réduite)* ou *normale*.

- ▶ La fonction $f(x) = 1/\sqrt{2\pi}e^{-x^2/2}$ s'appelle la **densité** de la loi normale ; une telle variable aléatoire n'est pas discrète (on parle de “variable continue”).

TCL : commentaires

- ▶ La formule

$$\mathbb{P}(Z \in [a, b]) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_a^b e^{-x^2/2} dx$$

est en fait la définition d'une loi particulière (pour Z) : la loi dite *gaussienne (centrée réduite)* ou *normale*.

- ▶ La fonction $f(x) = 1/\sqrt{2\pi}e^{-x^2/2}$ s'appelle la **densité** de la loi normale ; une telle variable aléatoire n'est pas discrète (on parle de "variable continue").
- ▶ **Attention !** il s'agit d'un **autre type** de convergence ; on parle de *convergence en loi* (il n'est pas vrai que Z_n converge en probabilités vers une variable aléatoire normale)

TCL : commentaires

- ▶ La formule

$$\mathbb{P}(Z \in [a, b]) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_a^b e^{-x^2/2} dx$$

est en fait la définition d'une loi particulière (pour Z) : la loi dite *gaussienne (centrée réduite)* ou *normale*.

- ▶ La fonction $f(x) = 1/\sqrt{2\pi}e^{-x^2/2}$ s'appelle la **densité** de la loi normale ; une telle variable aléatoire n'est pas discrète (on parle de "variable continue").
- ▶ **Attention !** il s'agit d'un **autre type** de convergence ; on parle de *convergence en loi* (il n'est pas vrai que Z_n converge en probabilités vers une variable aléatoire normale)
- ▶ Oui, tout cela est un peu compliqué. . .

Convergence en loi

La convergence en loi est en fait une notion de convergence des lois de variables aléatoires vers une loi ; *les variables aléatoires n'ont même pas besoin d'être définies sur le même espace de probabilités !*

- ▶ Pour des variables aléatoires qui convergent en loi vers une variable continue, la définition est (équivalente à) celle donnée dans l'énoncé du théorème central limite : “ X_n converge en loi vers X ” si, pour tout x , on a $\lim_n \mathbb{P}(X_n \leq x) = \mathbb{P}(X \leq x)$.

Convergence en loi

La convergence en loi est en fait une notion de convergence des lois de variables aléatoires vers une loi ; *les variables aléatoires n'ont même pas besoin d'être définies sur le même espace de probabilités !*

- ▶ Pour des variables aléatoires qui convergent en loi vers une variable continue, la définition est (équivalente à) celle donnée dans l'énoncé du théorème central limite : “ X_n converge en loi vers X ” si, pour tout x , on a $\lim_n \mathbb{P}(X_n \leq x) = \mathbb{P}(X \leq x)$.
- ▶ Pour des variables aléatoires ne prenant que des valeurs entières, la définition est un peu plus simple, et plus facile à manipuler : “ X_n converge en loi vers X ” si, pour tout entier k , on a $\lim_n \mathbb{P}(X_n = k) = \mathbb{P}(X = k)$

Convergence en loi

La convergence en loi est en fait une notion de convergence des lois de variables aléatoires vers une loi ; *les variables aléatoires n'ont même pas besoin d'être définies sur le même espace de probabilités !*

- ▶ Pour des variables aléatoires qui convergent en loi vers une variable continue, la définition est (équivalente à) celle donnée dans l'énoncé du théorème central limite : “ X_n converge en loi vers X ” si, pour tout x , on a $\lim_n \mathbb{P}(X_n \leq x) = \mathbb{P}(X \leq x)$.
- ▶ Pour des variables aléatoires ne prenant que des valeurs entières, la définition est un peu plus simple, et plus facile à manipuler : “ X_n converge en loi vers X ” si, pour tout entier k , on a $\lim_n \mathbb{P}(X_n = k) = \mathbb{P}(X = k)$
- ▶ **Attention** : la convergence des probabilités individuelles ne suffit pas : il faut s'assurer que les limites des probabilités définissent bien une loi de probabilités (exemple : X_n uniforme sur $\{1, 2, \dots, n\}$: toutes les probabilités d'entiers convergent vers 0).