

# Corrigé de l'examen de Probabilités, Statistiques, Combinatoire (2018-2019, session 1)

(sans la plupart des valeurs numériques)

## Exercice 1

1. On pose les événements  $I$  : “un incendie se déclare” et  $D$  : “le détecteur se déclenche”. L'énoncé nous fournit  $\mathbb{P}(I)$  (donc  $\mathbb{P}(\bar{I}) = 1 - \mathbb{P}(I)$ ) et  $\mathbb{P}_I(D)$  et  $\mathbb{P}_{\bar{I}}(D)$  (donc leurs complémentaires  $\mathbb{P}_I(\bar{D})$  et  $\mathbb{P}_{\bar{I}}(\bar{D})$ ).

On nous demande  $\mathbb{P}(D)$ , qui se calcule par la formule des probabilités totales :

$$\mathbb{P}(D) = \mathbb{P}_I(D)\mathbb{P}(I) + \mathbb{P}_{\bar{I}}(D)\mathbb{P}(\bar{I}).$$

2. On nous demande ici  $\mathbb{P}_D(I)$ , qui se calcule par la formule de Bayes :

$$\mathbb{P}_D(I) = \frac{\mathbb{P}_I(D)\mathbb{P}(I)}{\mathbb{P}(D)}.$$

3. **Question difficile !** Il est ici nécessaire de définir de nouveaux événements :  $D_1$  “le premier détecteur se déclenche”,  $D_2$  “le second détecteur se déclenche”. On conserve l'événement  $I$ .

L'énoncé nous dit que les deux détecteurs se comportent comme celui des questions précédentes : on pourra donc réutiliser les résultats précédents, en remplaçant  $D$  par  $D_1$  ou par  $D_2$ .

L'énoncé nous dit également que **sachant** qu'il y a un incendie, les déclenchements des deux détecteurs sont indépendants. Cela signifie exactement  $\mathbb{P}_I(D_1 \cap D_2) = \mathbb{P}_I(D_1)\mathbb{P}_I(D_2)$  (il s'agit ici d'indépendance conditionnelle), et de même si on conditionne par le fait qu'il n'y ait pas d'incendie :  $\mathbb{P}_{\bar{I}}(D_1 \cap D_2) = \mathbb{P}_{\bar{I}}(D_1)\mathbb{P}_{\bar{I}}(D_2)$ .

On peut donc en déduire la probabilité de l'événement  $D_1 \cap D_2$ , par la formule des probabilités totales :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(D_1 \cap D_2) &= \mathbb{P}_I(D_1 \cap D_2)\mathbb{P}(I) + \mathbb{P}_{\bar{I}}(D_1 \cap D_2)\mathbb{P}(\bar{I}) \\ &= \mathbb{P}_I(D_1)\mathbb{P}_I(D_2)\mathbb{P}(I) + \mathbb{P}_{\bar{I}}(D_1)\mathbb{P}_{\bar{I}}(D_2)\mathbb{P}(\bar{I}).\end{aligned}$$

En faisant le calcul, on s'aperçoit que cette probabilité n'est pas le carré de celle calculée à la question 1 : les deux événements ne sont donc pas indépendants.

Un raisonnement moins formalisé serait le suivant : le fait que le premier détecteur se déclenche “augmente” la probabilité qu'il y ait un incendie (à comprendre comme :  $\mathbb{P}_{D_1}(I) > \mathbb{P}(I)$ ), et “donc” augmente aussi la probabilité que le second détecteur se déclenche (car  $\mathbb{P}_I(D_2) > \mathbb{P}(D_2)$ ); “donc” les événements  $D_1$  et  $D_2$  ne sont pas indépendants, car  $\mathbb{P}_{D_1}(D_2) > \mathbb{P}(D_2)$ . Ce raisonnement n'est pas tout à fait rigoureux, mais a été accepté quand il était présenté proprement dans une copie.

4. Ayant calculé  $\mathbb{P}(D_1 \cap D_2)$  à la question précédente, on peut en déduire  $\mathbb{P}(D_1 \cup D_2) = \mathbb{P}(D_1) + \mathbb{P}(D_2) - \mathbb{P}(D_1 \cap D_2)$ , qui est la probabilité qu’au moins un détecteur se déclenche.

On nous demande ici  $\mathbb{P}_{D_1 \cup D_2}(I)$ , qu’on peut calculer de nouveau par la formule de Bayes :

$$\mathbb{P}_{D_1 \cup D_2}(I) = \frac{\mathbb{P}_I(D_1 \cup D_2)\mathbb{P}(I)}{\mathbb{P}(D_1 \cup D_2)}.$$

Au numérateur, on peut calculer  $\mathbb{P}_I(D_1 \cup D_2) = \mathbb{P}_I(D_1) + \mathbb{P}_I(D_2) - \mathbb{P}_I(D_1 \cap D_2)$ , soit  $2p - p^2$  avec  $p = 999/1000$  tel que donné dans l’énoncé.

Numériquement, on obtient une probabilité conditionnelle *plus faible* de vraie alerte qu’avec un seul détecteur : en effet chaque détecteur se déclenche relativement souvent “tout seul” (sans incendie), et avec deux détecteurs, on augmente les chances de fausse alerte. En revanche, ce qui est amélioré c’est la probabilité (conditionnelle, toujours) de n’avoir aucune alerte lors d’un incendie : elle passe de  $1/1000$  à  $1/1000000$  ; c’est typiquement dans cet objectif qu’on ajoute de la redondance à un système d’alerte.

## Exercice 2

- $\mathbb{P}_B(A) = 1$  est possible, il suffit d’avoir  $B \subset A$  : on a alors  $A \cap B = B$ , et donc  $\mathbb{P}_B(A) = \mathbb{P}(B)/\mathbb{P}(B) = 1$ .
- $\mathbb{P}_B(A) > \mathbb{P}(A)$  est possible, par exemple avec le cas précédent pour peu que l’on ait  $pr(A) < 1$ . Autre exemple avec le lancer d’un dé équilibré : prendre  $A$  “le résultat est impair” et  $B$  “le résultat est inférieur ou égal à 3”. On calcule facilement  $\mathbb{P}(A) = 1/2$  et  $\mathbb{P}_B(A) = 2/3 > 1/2$ .
- $\mathbb{P}_B(A) = \mathbb{P}(A)$  est possible, c’est même la définition de l’indépendance de  $A$  et de  $B$ .
- $\mathbb{P}_B(A) < \mathbb{P}(A)$  est possible, si par exemple  $A$  et  $B$  sont incompatibles (voir question suivante), ou en reprenant l’exemple de la question 3 et en prenant  $A'$  “le résultat est pair” :  $\mathbb{P}(A') = 1/2$  et  $\mathbb{P}_B(A) = 1/3$ .
- $\mathbb{P}_B(A) = 0$  est possible : c’est équivalent à  $pr(A \cap B) = 0$ , ce qui est le cas chaque fois que  $A$  et  $B$  sont incompatibles.
- $\mathbb{P}_B(A) = 0.6$ , alors que l’on a (pour cette question seulement)  $\mathbb{P}(A) = 0.2$  et  $\mathbb{P}(B) = 0.5$  : en appliquant la définition de la probabilité conditionnelle,  $\mathbb{P}(B) = 0.5$  et  $\mathbb{P}_B(A) = 0.6$  entraînent  $\mathbb{P}(A \cap B) = 0.3 > 0.2$ . On ne peut pas avoir  $\mathbb{P}(A \cap B) > \mathbb{P}(A)$ , donc c’est impossible.

## Exercice 3

- On reconnaît dans la définition de  $N_3$  un schéma binomial : chaque personne a, indépendamment des autres, probabilité  $1/10$  de choisir le chiffre 3. Le nombre de personnes qui choisissent 3 suit donc la loi binomiale de paramètres  $n = 10$  et  $p = 0.1$ . On connaît une formule pour l’espérance d’une binomiale :  $n.p$ . Donc  $\mathbb{E}(N_3) = 1$ .

2. L'événement "personne ne choisit le chiffre 3" correspond exactement à l'événement  $\{N_3 = 0\}$ , il suffit donc d'appliquer la formule d'une loi binomiale pour en calculer la probabilité :

$$\mathbb{P}(N_3 = 0) = \binom{10}{0} (1/10)^0 (9/10)^{10} = \frac{9^{10}}{10^{10}} \simeq 0.35.$$

On peut aussi raisonner directement, en disant que chaque personne a probabilité  $9/10$  de ne pas choisir 3, et que les 10 événements  $A_1, \dots, A_{10}$  correspondants (chacun de probabilité  $9/10$ , donc) sont indépendants; l'événement dont on cherche la probabilité étant l'intersection de ces 10 événements, sa probabilité est  $(9/10)^{10}$ .

3. Le calcul précédent, pour le chiffre 3, peut bien entendu être répété pour chaque chiffre de 0 à 9 : chacun a probabilité  $p = (9/10)^{10} \simeq 0.35$  de ne pas être choisi. Autrement dit, les 10 variables indicatrices  $X_k$  sont toutes des Bernoulli de paramètre  $p$ , et donc d'espérance  $p$ .

Or, le nombre  $X$  de chiffres délaissés (choisis par personne) est la somme de ces 10 variables aléatoires  $X_0, X_1, \dots, X_9$ . En appliquant la linéarité de l'espérance, on obtient  $\mathbb{E}(X) = 10p \simeq 3.5$ .

4. Il est facile de voir que l'intersection  $E_0 \cap E_1 \cdots \cap E_9$  est de probabilité 0 : il n'est pas possible qu'aucun chiffre ne soit choisi. Par conséquent ces 10 événements ne sont pas indépendants (sinon la probabilité de leur intersection serait égale à  $p^{10}$ , qui est strictement positif).

On peut aussi montrer directement, par exemple, que  $E_3$  et  $E_4$  ne sont pas indépendants, en calculant la probabilité de leur intersection, qui vaut  $(8/10)^{10}$ , et n'est donc pas égale à  $p^2$ . Cela suffit à prouver que les 10 événements ne sont pas indépendants (mais cela nécessite un calcul, contrairement à la première argumentation).

5. Si l'on  $C_i$  l'entier choisi par la  $i$ -ème personne, l'événement "chaque chiffre est choisi au moins une fois" correspond au fait que la séquence  $(C_1, C_2, \dots, C_{10})$  contienne exactement une fois chaque entier de 0 à 9 (car le nombre de personnes est égal au nombre de chiffres). Cela doit donc être une *permutation* des entiers de 0 à 9. Il existe  $10!$  telles permutations.

Or, avec des choix uniformes et indépendants, la séquence  $(C_1, \dots, C_{10})$  est uniforme sur  $[[0, 9]]^{10}$ , donc la probabilité d'obtenir une séquence qui est une permutation est  $\frac{10!}{10^{10}}$ .

## Exercice 4

1. Comme le Professeur Tournesol devine toujours les mots, son score est forcément égal au nombre de mots qu'on lui propose :  $S_T = N_T$ . Son score est uniquement déterminé par les tirages de boules : après chaque mot, il a probabilité  $3/20$  de tirer une boule noire, ce qui met fin à son tour. On reconnaît ici un schéma géométrique : le score  $S_T$  suit donc la loi géométrique de paramètre  $3/20$ , avec pour espérance  $20/3$ .

**Attention :** ici le “succès” dans le schéma géométrique correspond à tirer une boule noire, et non une boule blanche.

2. Pour le Capitaine Haddock, on a également un schéma géométrique, mais il faut en déterminer le paramètre, qui est la probabilité, à un coup donné, de ne **pas** être autorisé à continuer.

On calcule simplement la probabilité de pouvoir continuer :  $0.6 \times \frac{17}{20} = 0.51$ . Donc la probabilité de pouvoir continuer est 0.49, et le nombre de coups joués par le Capitaine (y compris le dernier, qu’il le devine ou non ; soit  $N_H$ ) suit la loi géométrique de paramètre 100/49.

3.  $V = N_H - S_H$  est la différence entre le nombre de mots qu’on propose au Capitaine Haddock, et le nombre de mots qu’il devine : c’est donc soit 0 soit 1, puisque dès qu’il échoue à deviner un mot, on ne lui en proposera pas d’autre.  $V$  vaut 1 si son tour se termine après un échec à deviner le mot, et 0 sinon, c’est-à-dire si ce qui cause la fin du tour est de tirer une boule noire.

La loi de  $V$  est donc une loi de Bernoulli, dont il nous faut déterminer le paramètre. Faisons un calcul lors du dernier “coup” joué par le Capitaine Haddock. Cela revient à **conditionner** par l’événement “ne pas pouvoir continuer”.

Si on pose  $D$  “le capitaine devine le mot” et  $N$  “le capitaine tire une boule noire”, l’événement “le capitaine ne peut pas continuer” est  $\overline{D} \cup N$ , et on doit calculer  $\mathbb{P}_{\overline{D} \cup N}(D)$ .

On a  $\mathbb{P}(\overline{D}) = 0.4$  et  $\mathbb{P}(N) = 0.15$ , et donc, par indépendance,  $\mathbb{P}(\overline{D} \cup N) = 0.4 + 0.15 - 0.06 = 0.49$  (c’est une autre façon de refaire le calcul de la question 2).

Il reste à calculer  $\mathbb{P}(D \cap (\overline{D} \cup N)) = \mathbb{P}(D \cap N) = 0.6 \times 0.15 = 0.09$ .

Au final, le paramètre de  $V$  (sa probabilité de valoir 1, et aussi son espérance) vaut  $0.09/0.49 = 9/49$ .

4. Le score cherché est  $S_T = N_T - V$  ; on connaît les lois de  $N_T$  et de  $V$ , et on admet que ces deux variables sont indépendantes. On peut donc théoriquement déterminer la loi de leur différence. En tout cas, on a tout pour déterminer l’espérance et la variance de cette différence.

**Espérance :** par linéarité de l’espérance,  $\mathbb{E}(S_T) = \mathbb{E}(N_T) - \mathbb{E}(V) = 100/49 - 9/49 = 91/49$ .

**Variance :** grâce à l’indépendance, on a  $\mathbf{var}(S_T) = \mathbf{var}(N_T) + \mathbf{var}(V)$ .

En appliquant les formules pour la variance d’une géométrique de paramètre  $p$  ( $(1-p)/p^2$ ) et d’une Bernoulli de paramètre  $q$  ( $q(1-q)$ ), on a  $\mathbf{var}(S_T) = (51/100)/(49/100)^2 + (9/49) \times (40/49)$ .