

	<p>Année 2018/2019, Session 1 de printemps L2 Info/MI, UE 4TIN404U, Probabilités, Statistiques, Combinatoire Jeudi 2 mai 2019 Durée : 1h30</p> <p>Document autorisé : une feuille A4 manuscrite</p>	<p style="text-align: center;">Collège Sciences et Technologies</p>
---	---	--

Les exercices sont indépendants. Le barème est donné à titre indicatif. Les calculatrices sont autorisées, mais essentiellement inutiles ; tous les calculs peuvent être laissés sous forme de formules, éventuellement avec des fractions.

La qualité et la précision des justifications de vos réponses sont plus importantes que les valeurs numériques calculées.

Notations : les probabilités conditionnelles peuvent être notées, au choix, sous les formes $\mathbb{P}(A|B)$ ou $\mathbb{P}_B(A)$; les deux signifient exactement la même chose.

Exercice 1 (6 pts)

Un monument historique est équipé d'un détecteur de fumée, censé donner l'alerte si un incendie se produit. Ce détecteur a 99.9% de chances (999/1000) de se déclencher en cas d'incendie ; il a également, au cours d'une journée sans incendie, une probabilité de se déclencher de 0.1% (1/1000). On estime le risque d'incendie dans ce monument à 0.01% (1/10000) chaque jour.

1. Déterminer la probabilité, au cours d'une journée, que le détecteur de fumée se déclenche.
2. Déterminer la probabilité qu'un incendie se soit déclaré, sachant que le détecteur de fumée se déclenche.
3. On ajoute un second détecteur de fumée, aux mêmes caractéristiques que le premier, et dont on suppose que le fonctionnement est indépendant du premier (c'est-à-dire que, **sachant** qu'un incendie se déclare, les événements "le premier détecteur se déclenche" et "le deuxième détecteur se déclenche" sont indépendants ; et qu'il en est de même **sachant** qu'aucun incendie ne se déclare.
Sans conditionnement, les événements "le premier détecteur se déclenche" et "le second détecteur se déclenche" sont-ils indépendants ?
4. (Toujours dans le cas des deux détecteurs) Déterminer la probabilité, au cours d'une journée, qu'**au moins un** détecteur de fumée se déclenche (**Indication** : il est plus facile de déterminer la probabilité qu'**aucun** détecteur ne se déclenche) ; et la probabilité qu'un incendie se soit déclaré, sachant qu'au moins un détecteur s'est déclenché.

Exercice 2 (3 pts)

On considère, dans un espace de probabilités, deux événements A et B , tous les deux **de probabilité strictement positive**. Pour chacune des propositions suivantes, dire si elle est possible ; justifier vos réponses, soit avec une explication de l'impossibilité, soit en donnant un exemple de situation où la proposition se produit. **Une réponse “possible” ou “impossible” sans justification, même correcte, ne rapportera aucun point.**

1. $\mathbb{P}_B(A) = 1$
2. $\mathbb{P}_B(A) > \mathbb{P}(A)$
3. $\mathbb{P}_B(A) = \mathbb{P}(A)$
4. $\mathbb{P}_B(A) < \mathbb{P}(A)$
5. $\mathbb{P}_B(A) = 0$
6. $\mathbb{P}_B(A) = 0.6$, alors que l'on a (pour cette question seulement) $\mathbb{P}(A) = 0.2$ et $\mathbb{P}(B) = 0.5$.

Exercice 3 (5 pts)

10 personnes doivent choisir chacune un chiffre de 0 à 9. On suppose que chacune choisit son chiffre au hasard, uniformément, et indépendamment des autres.

Pour chaque entier k , $0 \leq k \leq 9$, on note E_k l'événement “personne ne choisit le chiffre k ”.

1. On définit la variable aléatoire N_3 qui compte le nombre de personnes qui choisissent le chiffre 3. Quelle est la loi de N_3 ? Quelle est son espérance ?
2. Quelle est la probabilité que le chiffre 3 ne soit choisi par personne ? (On demande une formule et sa justification ; une valeur numérique seule ne suffit pas)
3. Quelle est l'espérance du nombre de chiffres non choisis ? Justifier votre réponse, au besoin en utilisant la notation X_k pour la variable indicatrice de l'événement E_k .
4. Les événements E_0, E_1, \dots, E_9 sont-ils indépendants ?
5. Quelle est la probabilité que chaque chiffre soit choisi par exactement une personne ?
Indication : quelle propriété doit avoir la liste ordonnée des choix des 10 personnes pour que cet événement se produise ? combien y a-t-il de telles listes de choix qui satisfont cette propriété ?

Exercice 4 (6 pts)

Dans un célèbre jeu télévisé, chaque candidat, à son tour, doit deviner un mot puis tirer une boule dans une urne. L'urne contient 20 boules dont 3 noires et 17 blanches. Après chaque mot deviné, le candidat tire une boule dans l'urne. Si la boule tirée est noire, le tour du candidat prend fin. Autrement, la boule est remise dans l'urne et il continue à jouer avec un nouveau mot à deviner.

Le tour d'un joueur se termine également s'il ne devine pas le mot proposé. Il y a donc deux façons possibles de terminer son tour : soit en échouant à trouver le mot, soit en tirant une boule noire.

Le score d'un joueur est le nombre de mots qu'il arrive à deviner avant que son tour ne se termine.

Deux joueurs s'affrontent : le Professeur Tournesol et le Capitaine Haddock. Ils jouent chacun un tour. On note S_T le score du Professeur Tournesol, S_H celui du Capitaine Haddock, N_T le nombre de fois que le Professeur Tournesol se voit proposer un mot à deviner, N_H le nombre de fois que le Capitaine Haddock se voit proposer un mot.

1. Le Professeur Tournesol est très fort pour deviner les mots : il y réussit toujours. Quelle est la loi du score S_T du Pr. Tournesol? Donner l'espérance de S_T .
2. Le Capitaine Haddock n'a que 60% de chances de deviner un mot ; on suppose que ses tentatives sont indépendantes.
Quelle est la probabilité, lors de chaque tentative, qu'il soit autorisé à continuer? Quelle est la loi du nombre N_H de mots qui lui sont proposés? (On rappelle qu'il ne peut pas continuer si, soit il échoue à deviner un mot, soit il tire une boule noire après ce mot ; pour être autorisé à continuer, il doit deviner le mot **et** tirer une boule blanche)
3. Que représente la variable aléatoire $V = N_H - S_H$? Quelles sont ses valeurs possibles? Quelle est sa loi? On admettra que V est indépendante de N_H .
4. Déterminer l'espérance et la variance du score S_H obtenu par le Capitaine Haddock.