

Probabilités, Statistiques, Combinatoire : TD0

Combinatoire : feuille de révision

0.1 Élections

Exercice 0.1

Dans un groupe de 37 étudiants, deux délégués viennent d'être élus.

1. Combien y a-t-il de résultats d'élection possibles différents ?
2. Généraliser pour un groupe de n étudiants.

On sait maintenant qu'il y a 21 garçons et 16 filles.

1. Combien y a-t-il de possibilités d'élire deux garçons ? Deux filles ? Un garçon et une fille ?
2. Généraliser pour g garçons et f filles (avec $f + g = n$).
3. Si on suppose que l'ensemble des deux délégués élus est choisi uniformément parmi toutes les possibilités d'élection, quelle est la probabilité (dans le cas général, et numériquement, dans le cas $f = 21$, $g = 16$) d'élire deux garçons ? d'élire deux filles ? d'élire un garçon et une fille ?

Exercice 0.2

Dans une association il y a n adhérents. Parmi eux, k sont élus pour constituer le bureau. Lors de sa première réunion, le bureau désigne le président (la présidente) parmi ses membres.

1. Combien y a-t-il de résultats possibles de cette procédure (un(e) président(e) plus $k - 1$ autres membres du bureau) ?

L'association change de statuts et le président (la présidente) est désormais élu(e) par l'ensemble des adhérents, qui eux aussi, par la suite, élisent $k - 1$ autres membres du bureau. (Attention, le président (la présidente) n'est plus éligible.)

1. Combien y a-t-il de résultats possibles de cette procédure ?
2. En déduire la formule suivante mettant en relation des coefficients binomiaux :

$$\binom{n}{k} = \frac{n}{k} \cdot \binom{n-1}{k-1}$$

0.2 Métrique new-yorkaise

Exercice 0.3

Supposons que dans une grille régulière, on veuille aller du point A de coordonnées $(0, 0)$ au point B de coordonnées $(4, 3)$, en ne faisant que des pas vers la droite (se déplacer de $(1, 0)$) ou des pas vers le haut (se déplacer de $(0, 1)$). Un *chemin* de A à B est donc défini comme une suite de pas, dont chacun est soit vers la droite (désigné x) soit vers le haut (désigné y).

1. Quelle est la longueur d'un chemin de A à B en termes de nombre total de pas ?
2. Combien de pas de chaque type y a-t-il dans un chemin de A à B ?
3. Combien y a-t-il de chemins différents possibles au total ?
4. Généraliser : Combien y a-t-il de chemins pour aller de $A = (0, 0)$ à $B = (k, \ell)$?

Exercice 0.4

Si $k > 0$ et $\ell > 0$, alors au point de départ, on a deux choix : un chemin de $A = (0, 0)$ à $B = (k, \ell)$ peut commencer soit par un pas x soit par un pas y .

1. Si un chemin commence par un pas x , combien reste-t-il à faire de pas x et de pas de y pour arriver à B ?
2. Trouver une bijection entre l'ensemble des chemins de A à B commençant par un pas x et l'ensemble de tous les chemins entre une autre paire de points (bien choisis).
3. De manière similaire, trouver une bijection entre l'ensemble des chemins de A à B commençant par un pas y et l'ensemble de tous les chemins entre une autre paire de points (bien choisis).
4. En vous appuyant sur vos réponses aux questions précédentes, et à la dernière question de l'exercice précédent, en déduire l'égalité (normalement connue par ailleurs) suivante :

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1}.$$

Exercice 0.5

Supposons maintenant que entre $y = 0$ et $y = 1$ dans une direction horizontale, il passe un fleuve. Pour tout i , le pas entre $(i, 0)$ et $(i, 1)$ est en fait un pont qui permet de traverser le fleuve.

1. Existe-t-il un chemin de $A = (0, 0)$ à $B = (k, \ell)$ qui ne traverse aucun pont ? Qui en traverse plusieurs ?
2. Pour aller de $A = (0, 0)$ à $B = (k, \ell)$, par combien de ponts différents est-il possible de traverser le fleuve ? Lesquels ?
3. Notons C l'ensemble de tous les chemins de A à B ; notons C_i l'ensemble des chemins empruntant le i -ième pont. Trouver une relation entre les cardinaux de $C_i, i = 0, 1, \dots$, et celui de C .
4. En déduire l'égalité suivante entre coefficients binomiaux :

$$\binom{n}{k} = \sum_{t=0}^{n-1} \binom{t}{k-1}$$

en choisissant bien ℓ par rapport à n et en explicitant le lien entre i (de la question précédente) et t (ici).

0.3 (Ar)rangements

Exercice 0.6

Supposons qu'on veuille ranger 10 objets identiques dans 3 tiroirs distingués. Mettre les 10 dans le premier et mettre les 10 dans le deuxième sont du coup considérés comme deux rangements différents. Une fois prise la décision de combien d'objets on va mettre dans quel tiroir, on peut réaliser le rangement d'une manière automatisée en employant un automate. Par défaut, l'automate est positionné sur le premier tiroir. Il écoute deux types d'instructions :

P : poser un objet dans le tiroir actuel

T : transiter vers le tiroir suivant

L'automate est dans l'état final s'il est positionné sur le dernier tiroir.

Un rangement peut donc être encodé par un mot sur l'alphabet $\{P, T\}$ (qui amène l'automate dans l'état final).

1. Quel est le mot de code du rangement "tout mettre dans le dernier tiroir" ?
2. Quel est le mot de code du rangement "tout mettre dans le premier tiroir" ?
3. Quel est le mot de code du rangement "mettre 1 objet dans le premier tiroir, 2 dans le deuxième, et le reste dans le dernier" ?
4. Quel est le mot de code le plus court possible ?
5. Quel est le mot de code le plus long possible ?
6. Quel est le nombre d'occurrences de P dans un mot de code ?
7. Quel est le nombre d'occurrences de T dans un mot de code ?
8. Généraliser : Pour ranger n objets dans k tiroirs, quel est le nombre d'occurrences de P dans un mot code ? D'occurrences de T ?
9. Exprimer le nombre de rangements de n objets dans k tiroirs sous forme d'un coefficient binomial, en fonction de n et k . Justifier.

0.4 Partitions en 1 et 2

Dans cet exercice, on va appeler une *partition* de n une écriture de n sous forme de somme de uns et deux. Par exemple, $5 = 2 + 1 + 2$, $5 = 1 + 2 + 2$, $5 = 1 + 2 + 1 + 1$, $5 = 1 + 1 + 1 + 2$ et $5 = 1 + 1 + 1 + 1 + 1$ sont cinq partitions différentes de 5.

1. Compléter la liste des partitions de 5. Combien y en a-t-il au total ?
2. Parmi elles, combien commencent par un 1 ? Et combien par un 2 ?
3. Notons P_n l'ensemble des partitions de n ; notons $P_n^{(1)}$ et $P_n^{(2)}$ les ensembles des partitions de n commençant par un 1 et par un 2, respectivement. Trouver une relation entre ces trois ensembles et leurs cardinaux.
4. Trouver une bijection entre $P_n^{(1)}$ et P_{n-1} . Décrire aussi la bijection inverse.
5. Trouver une bijection entre $P_n^{(2)}$ et P_{n-2} . Décrire aussi la bijection inverse.
6. En déduire une identité récurrente pour calculer la suite $\{P_n\}_{n=0}^\infty$. Est-ce qu'elle porte un nom connu ?