

Probabilités, Statistiques, Combinatoire : TD1

Combinatoire

1.1 Définitions du cours et révisions

Les exercices de cette section ont pour but de faire pratiquer les définitions et leur application. Ils ne sont censés présenter aucune difficulté si les définitions sont connues.

Exercice 1.1

On pose $A = \{1, 2, 3, 4\}$, et $f : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$ la fonction définie par $f(n) = n^2$. Écrire chacun des ensembles suivants en donnant la liste de tous ses éléments.

1. $B = \{(a, b) \in A \times A : a < b\}$
2. $C = (A \times A) - B$
3. $D = f(A)$
4. $E = f^{-1}(A)$.

Exercice 1.2

Une opération ensembliste non vue en cours est la *différence symétrique* de deux ensembles, définie de la manière suivante : si A et B sont deux ensembles, leur différence symétrique est l'ensemble $A\Delta B$ défini ainsi :

$$A\Delta B = (A - B) \cup (B - A)$$

1. Décrire par une phrase, la plus simple possible, l'ensemble $A\Delta B$ (sur le modèle suivant, pour l'union : “ $A \cup B$ est l'ensemble des éléments présents dans A ou dans B ”).
2. Donner une expression alternative (mais équivalente) pour $A\Delta B$ en termes de $A \cup B$ et $A \cap B$.
3. Écrire une formule donnant le cardinal de $A\Delta B$ en fonction des cardinaux de A , de B , et de $A \cap B$ (en supposant que A et B sont finis).
4. À quoi se ramène $A\Delta B$ si A et B sont disjoints ? si $A \subset B$? si $A = B$?

Exercice 1.3

Dans cet exercice, E et F sont des ensembles quelconques, f est une fonction de E vers F , A et A' sont des sous-ensembles de E , et B et B' sont des sous-ensembles de F .

Pour chacune des paires d'ensembles suivantes, comparer les deux ensembles : dire s'ils sont toujours égaux, ou si l'un est toujours inclus dans l'autre, ou si il n'existe pas de relation de ce type entre eux.

1. $f(A \cap A')$ et $f(A) \cap f(A')$.
2. $f(A \cup A')$ et $f(A) \cup f(A')$.
3. $f^{-1}(B \cap B')$ et $f^{-1}(B) \cap f^{-1}(B')$.
4. $f^{-1}(B \cup B')$ et $f^{-1}(B) \cup f^{-1}(B')$.

1.2 Applications directes du cours

Les exercices de cette section sont l'occasion de refaire une partie des calculs vus en cours à l'identique, ou d'en faire d'autres selon le même principe.

Exercice 1.4

Formation d'équipes

1. À partir d'un groupe de 7 filles et 13 garçons, combien d'équipes paritaires (comportant autant de filles que de garçons) de beach volley (4 personnes) peut-on former ? De volley (6 personnes) ?
2. Généraliser : à partir d'un groupe de n filles et m garçons, combien d'équipes paritaires de $2k$ personnes peut-on former ? (Exprimer votre réponse au moyen de coefficients binomiaux $\binom{n}{k}$)
3. Un groupe de 4 filles et 10 garçons veut jouer au volley, en formant deux équipes de 2 filles et 4 garçons chacune (il restera deux arbitres). De combien de façons peut-on former les équipes ? On considère qu'on ne distingue pas une équipe A d'une équipe B, ni entre les deux arbitres. (Le calcul peut être fait de plusieurs manières différentes, qui devraient amener à des expressions différentes en termes de coefficients binomiaux ; il peut être intéressant de vérifier qu'elles donnent toutes le même résultat final)

Exercice 1.5

Coefficients multinomiaux

Soit $n > 0$ un entier, et a, b, c trois entiers positifs ou nuls, tels que l'on ait $a + b + c = n$.

Le coefficient multinomial noté $\binom{n}{a,b,c}$ désigne le nombre de façons possibles de partager l'ensemble $[1, n]$ en trois parties A, B et C , deux à deux disjointes, telles que l'on ait $\#A = a$, $\#B = b$ et $\#C = c$.

En raisonnant à partir de la définition des nombres $\binom{m}{k}$, donner au moins deux expressions distinctes pour $\binom{n}{a,b,c}$. Si vous connaissez l'expression à base de factorielles pour $\binom{m}{k}$, vous pouvez montrer que les différentes formules sont équivalentes.

Exercice 1.6

On considère dans cet exercice un alphabet $A = \{a, b, c\}$, et la classe combinatoire A^* des mots finis sur l'alphabet (avec comme taille, la longueur des mots).

1. Écrire *in extenso* la "tranche" A_2 des mots de taille 2.
2. D'après le cours, quelle est la suite de comptage de la classe A^* ?
3. Sans utiliser votre réponse à la question précédente, montrer directement que l'on a (pour $n \geq 1$) $a_n = 3a_{n-1}$, en suivant les étapes suivantes :
 - On définit $A_{n,a}$ (respectivement, $A_{n,b}$, $A_{n,c}$) comme l'ensemble des mots de A^* de longueur n , et qui commencent par la lettre a (respectivement, par la lettre b , par la lettre c).
 - Décrire des bijections (les plus simples possible !) entre A_{n-1} et $A_{n,a}$; entre A_{n-1} et $A_{n,b}$; entre A_{n-1} et $A_{n,c}$.
 - Quelles égalités entre cardinaux peut-on déduire de ces bijections ? Que manque-t-il pour pouvoir affirmer que l'on a $a_n = 3a_{n-1}$?
 - Terminer la preuve, ainsi que la preuve de la formule de comptage, en utilisant la question précédente (faire une preuve par récurrence sur n).

4. On garde le même ensemble A^* , mais on prend comme taille d'un mot w , $t(w) = |w|_a + 2|w|_b + 3|w|_c$. On note $(a'_n)_{n \geq 0}$ la nouvelle suite de comptage. Écrire *in extenso* les nouveaux ensembles A_1, A_2, A_3 . En vous inspirant de ce que vous avez fait précédemment, déterminez une formule de récurrence permettant de définir la nouvelle suite de comptage $(a'_n)_{n \geq 0}$. Calculer a'_{10} .

1.3 Exercices et problèmes

Les exercices de cette section sont prévus pour demander plus de réflexion et d'effort.

Exercice 1.7

Factorielle et mélange de cartes On sait que le nombre de façons d'ordonner n nombres distincts (ou, de manière équivalente, étant donné un ensemble de n valeurs, le nombre de séquences distinctes qu'on peut former et qui contiennent chaque valeur exactement une fois) est $n! = 1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot n$. Ce nombre est également le cardinal du produit cartésien $\{1\} \times [[1, 2]] \times \dots \times [[1, n]]$. L'objectif de cet exercice est de décrire deux telles bijections.

1. On note S_n l'ensemble des permutations de $[[1, n]]$, vues comme suites de longueur n d'entiers, dans lesquelles chaque entier de 1 à n apparaît une fois et une seule.

Rappeler la bijection ébauchée en cours, entre S_n et $[[1, n]] \times S_{n-1}$. On nommera cette bijection Φ_n .

2. Décrire la bijection réciproque, notée Φ_n^{-1} : si $(i, s) \in [[1, n]] \times S_{n-1}$, expliquer comment obtenir $s' \in S_n$ tel que l'on ait $\Phi_n(s) = (i, s)$.
3. À partir d'une permutation $s \in S_n$ quelconque, on obtient une séquence $c = f(s) \in \{1\} \times [[1, 2]] \times \dots \times [[1, n]]$, de la manière suivante : partant de $s = s_n$, on lui applique Φ_n et on obtient un couple (i_n, s_{n-1}) ; puis on applique Φ_n à s_{n-1} , pour obtenir (i_{n-1}, s_{n-2}) ; on itère de la sorte jusqu'à appliquer Φ_2 à s_2 , ce qui donne un couple (i_2, s_1) (remarque : comme S_1 ne contient que la séquence (1), on a forcément $s_1 = (1)$). Le codage c est alors la séquence $(1, i_2, \dots, i_n)$.

Appliquer l'ensemble de ces transformations en partant de la permutation $s \in S_7$ suivante : $s = (4, 2, 3, 7, 1, 6, 5)$.

4. Expliquer comment, à partir d'une séquence de codage c , on obtient la permutation de départ. Faire le calcul avec $c = (1, 1, 2, 1, 5, 5, 4)$, et avec $c = (1, 1, 3, 2, 5, 4, 6)$.

Si l'on suppose que les séquences sont représentées par des listes, par exemple dans le langage PYTHON, le passage d'une permutation à son codage ou vice versa n'est pas très efficace (il faut insérer ou supprimer des valeurs en positions arbitraires dans des listes, à chaque itération). Nous allons décrire une autre méthode de codage/décodage, pour laquelle l'opération de décodage se prête mieux à une implémentation par des tableaux ou des listes PYTHON.

Le nouveau décodage fonctionne de la manière suivante : pour décoder une séquence (i_1, i_2, \dots, i_n) , on forme initialement la séquence $s_1 = (1, 2, \dots, n)$, et, itérativement, dans la séquence courante s_k , on échange les entiers présents en positions k et i_k (en faisant varier k de 1 à n - ou de 2 à n , c'est suffisant).

5. Appliquer cette technique de décodage au code $(1, 1, 2, 1, 5, 5, 4)$, et au code $(1, 1, 3, 2, 5, 4, 6)$ (on ne s'attend pas à trouver les mêmes résultats qu'à la question précédente!)

6. Décrire l'opération inverse de codage : comment, en ne partant que d'une permutation s , on obtient son codage.
7. **Question subsidiaire** : expliquer pourquoi il s'agit bien d'un codage bijectif, *i.e.* pourquoi chaque permutation a bien un unique codage.