

Probabilités, Statistiques, Combinatoire : TD11

Espérances, variances. Inégalités de Markov et de Tchebycheff

11.1 Compléments au cours, applications

Exercice 11.1

On considère une variable aléatoire X dont la loi est donnée par le tableau ci-dessous.

k	0	1	2	3	4
$\mathbb{P}(X = k)$	0.3	0.1	0.2	0.1	0.3

1. Déterminer l'espérance et la variance de X .
2. On pose $Z = (X - 1)^2$. Sans calculer la loi de Z , déterminer son espérance.
3. Déterminer la loi de Z , ainsi que sa variance.

Exercice 11.2

Une variable aléatoire X prend des valeurs entières dans l'intervalle $[[2, 10]]$. Son espérance est de 3; on ne connaît pas sa variance.

Montrer que l'on a forcément $\mathbb{P}(X = 10) \leq 1/8$.

Exercice 11.3

On rappelle deux formules sur la somme d'entiers consécutifs et sur la somme de leurs carrés :

$$\sum_{k=1}^n k = \frac{n(n+1)}{2}$$
$$\sum_{k=1}^n k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

On modélise le résultat du lancer d'un dé à d faces par la loi uniforme sur $[[1, d]]$: chaque entier k , avec $1 \leq k \leq d$, a probabilité $1/d$ d'être tiré.

Calculer, en fonction de d , l'espérance et la variance du résultat d'un tel dé.

Exercice 11.4

(Examen 2018, à peine modifié)

1. On considère une variable aléatoire X , pour laquelle on a $\mathbf{E}((X - 1)^2) = \mathbf{E}((X + 2)^2)$. Déterminer $\mathbf{E}(X)$.
2. On suppose de plus que l'on a $\mathbf{E}((X + 2)^2) = 3$. En déduire la variance de X .

Exercice 11.5

1. La loi d'une variable aléatoire X est définie de la manière suivante : $\mathbb{P}(X = 3) = 1/3$ et $\mathbb{P}(X = 7) = 2/3$.
Quelle est la loi de $Y = \frac{X-3}{4}$? En déduire, avec le minimum de calculs, l'espérance et la variance de X .
2. On considère deux réels a et b (distincts), et un réel p avec $0 < p < 1$; déterminer, avec le minimum de calculs, l'espérance et la variance d'une variable aléatoire X telle que $\mathbb{P}(X = a) = 1 - p$ et $\mathbb{P}(X = b) = p$.

11.2 Exercices plus avancés

Exercice 11.6

On considère deux variables aléatoires G_1 et G_2 , indépendantes, chacune suivant la loi géométrique de paramètre p . On pose $B = G_1 + G_2$.

1. Quelles sont les valeurs possibles de B ?
2. Déterminer $\mathbf{E}(B)$ et $\mathbf{var}(B)$.
3. Déterminer $\mathbb{P}(B = 5)$ en fonction de p .
4. Plus généralement, pour une valeur n donnée appartenant à l'ensemble des valeurs possibles de B , quelles sont les valeurs possibles du couples (G_1, G_2) pour que l'on ait $B = n$? En déduire $\mathbb{P}(B = k)$.
5. En toute généralité, on définit la *loi binomiale négative* de paramètres k et p (k entier positif, $0 < p < 1$) comme la loi de la somme de k variables aléatoires indépendantes, chacune suivant la loi géométrique de paramètre p .
Déterminer, en fonction de k et p , l'espérance et la variance d'une variable binomiale négative de paramètres k et p .
6. En reprenant la description d'une géométrique par rapport à une séquence de variables indépendantes de Bernoulli, donner une description similaire pour une binomiale négative. En déduire une formule donnant $\mathbb{P}(X = m)$ en fonction de m , k et p , si X suit la loi binomiale négative de paramètres k et p .

Exercice 11.7

On dispose d'une pièce de monnaie équilibrée, que l'on lance n fois. On note N_n le nombre de fois qu'elle tombe côté Pile sur les n lancers. On s'intéresse à la probabilité que N_n/n soit "loin" de $1/2$, au sens suivant : N_n/n est considérée comme "loin de $1/2$ " si $N_n/n < 0.4$ ou $N_n/n > 0.6$.

1. Que peut-on affirmer, sans calculs, sur la probabilité que N_n/n soit loin de $1/2$, quand n tend vers $+\infty$?
2. Déterminer à partir de quelle valeur de n , la probabilité que N_n/n soit loin de $1/2$ est inférieure à 0.05 ; inférieure à 0.01 .