

Probabilités, Statistiques, Combinatoire : TD3

Combinatoire : mot et chemins de Dyck ; pavages

Tous les arbres mentionnés dans les exercices de cette feuille sont des arbres binaires complets, même si l'énoncé ne le précise pas. Tous les mots sont sur l'alphabet $\{a, b\}$, même si l'énoncé ne le précise pas.

3.1 Définitions du cours et révisions

Les exercices de cette section ont pour but de faire pratiquer les définitions et leur application. Ils ne sont censés présenter aucune difficulté si les définitions sont connues.

Exercice 3.1

Parmi les mots suivants, lesquels sont des mots de Dyck ?

- $w_1 = aabbab$
- $w_2 = ababbaabaababbab$
- $w_3 = aababaabbabb$
- $w_4 = a.w_2.b.w_1$

Exercice 3.2

Vous avez vu en cours une bijection, qu'on notera Φ , entre l'ensemble \mathcal{B}_n des mots *équilibrés* de longueur $2n$, et l'ensemble $[[1, n + 1]] \times \mathcal{D}_n$, où \mathcal{D}_n désigne l'ensemble des mots de Dyck de longueur $2n$. On notera Φ^{-1} la bijection réciproque (de $[[1, n + 1]] \times \mathcal{D}_n$ vers \mathcal{B}_n , *i.e.* si $(k, w') = \Phi(w)$, alors $w = \Phi^{-1}(k, w')$).

Pour les calculs, il est souvent judicieux de dessiner les chemins associés.

1. Calculer $\Phi(abba)$, $\Phi(ababbabbbaaa)$, $\Phi(bbababaa)$, $\Phi(aababbabaabb)$.
2. Calculer $\Phi^{-1}(k, aababbabaabb)$ pour chaque valeur possible de k .

3.2 Compléments du cours

Les exercices de cette section sont l'occasion de refaire une partie des calculs vus en cours à l'identique, ou d'en faire d'autres selon le même principe.

Exercice 3.3

Dans cet exercice, Φ désigne la même bijection (vue en cours) que dans l'exercice précédent.

En général, lorsque w est un mot de Dyck, comment s'exprime $\Phi(w)$? Justifier votre réponse.

Exercice 3.4

Pavages par dominos d'une bande (pas de mots de Dyck dans cet exercice)

On considère dans cet exercice des "formes", qui sont des parties (finies) d'une grille potentiellement infinie, et on se pose la question générale suivantes : pour une forme donnée, de combien de façons différentes peut-on la remplir entièrement par des "dominos", *i.e.* des

rectangles placés soit verticalement, soit horizontalement, sans que deux rectangles se chevauchent. Un tel remplissage est appelé un *pavage*.

En toute généralité (pour des “formes” quelconques), le problème est difficile ; on va se cantonner au cas où la “forme” est un rectangle de largeur n et de petite hauteur h , pour de petites valeurs de h .

On notera, pour une forme C , $p(C)$ son nombre de pavages. Le rectangle de hauteur h et de largeur n sera noté $h \times n$.

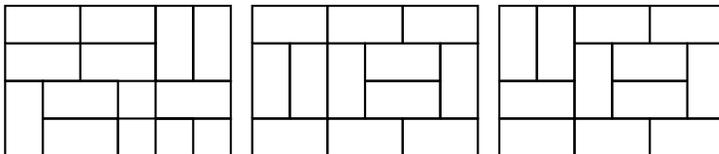


FIGURE 3.1 – Trois pavages de 4×6

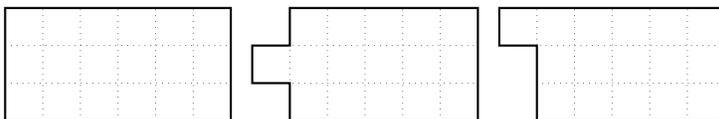


FIGURE 3.2 – $B_{6,\emptyset}$, $B_{6,\{1,3\}}$, et $B_{6,\{2,3\}}$

1. **Cas $h = 1$:** donner une formule pour le nombre de pavages par des dominos du rectangle $1 \times n$ de hauteur 1 et de largeur n (on peut distinguer deux cas, selon la parité de n)
2. **Cas $h = 2$:** dessiner tous les pavages par dominos d’un rectangle 2×3 (il y en a 3), et d’un rectangle 2×4 (il y en a 5).
3. On note p_n^2 , le nombre de pavages d’un rectangle $2 \times n$. En considérant la façon dont les deux carrés de la première colonne sont recouverts, donner une relation de récurrence pour la suite $(p_n^2)_{n \geq 0}$. Calculer p_n^2 pour n jusqu’à 11.
4. Utiliser un argument combinatoire pour répondre à la question suivante sans dessiner l’intégralité des cas : parmi les p_{11}^2 pavages du rectangle 2×11 , quelle est la proportion de ceux dont les deux carrés de la 6-ème colonne (colonne centrale) sont recouverts par un domino vertical ?
5. Généraliser : pour $1 \leq k \leq n$, quelle proportion des p_n^2 pavages du rectangle $2 \times n$ ont leur k -ème colonne couverte par un domino vertical ?
6. **Plus compliqué :** cas $h = 3$. On note p_n^3 , le nombre de pavages par dominos d’un rectangle $3 \times n$.
Expliquer pourquoi on a forcément $p_n^3 = 0$ si n est impair, et pourquoi $p_n^3 > 0$ si n est pair (et positif).
7. Vous savez déjà combien vaut p_2^3 ; déterminer p_4^3 et dessiner tous les pavages correspondants.
8. Montrer que l’on a $p_{2n}^3 \geq 2^n$.
9. Afin de trouver un moyen de calculer p_n^3 pour de grandes valeurs de n , sans dessiner un à un tous les pavages (on sait que leur nombre croît rapidement), on considère

des formes proches des rectangles $3 \times n$: pour $I \subset [[1, 3]]$, on note $B_{n,I}$ la forme obtenue en retirant du rectangle $3 \times n$, les cellules de la première colonne dont les lignes (numérotées de haut en bas, par exemple) sont les éléments de I .

Dessiner $B_{4,\emptyset}$, $B_{4,\{1\}}$, $B_{4,\{1,2\}}$, $B_{4,\{1,3\}}$. À quoi ressemble $B_{n,\{1,2,3\}}$?

10. Montrer que, si $n + \#I$ est impair, alors $p(B_{n,I}) = 0$.
11. Expliquer pourquoi on a, pour tout n , $p(B_{n,\{1,3\}}) = p(B_{n,\{2\}}) = 0$.
12. Montrer que, pour $n \geq 2$, on a $p_n^3 = p_{n-2}^3 + 2p(B_{n-1,\{1\}})$ **Indication** : raisonner sur le domino qui couvre la deuxième case de la première colonne : quelle autre case couvre-t-il ? une fois fixé ce premier domino, existe-t-il d'autres dominos obligatoires ?
13. De même, montrer qu'on a, pour $n \geq 2$, $p(B_{n,\{1\}}) = p_{n-1}^3 + p(B_{n-1,\{2,3\}})$.
14. Déterminer p_n^3 jusqu'à $n = 15$.

3.3 Exercices et problèmes

Les exercices de cette section sont prévus pour demander plus de réflexion et d'effort.

Exercice 3.5

Arbres ternaires (complets)

De même qu'on a défini les arbres binaires complets, on peut définir les arbres ternaires complets de la manière suivante : un arbre ternaire complet peut soit être réduit à sa racine (qui est alors une feuille), soit donné par un nœud racine r et trois arbres ternaires complets t_1, t_2, t_3 , dont les racines sont respectivement appelés fils gauche, fils central et fils droit de r . Comme pour les arbres binaires complets, on appelle feuilles les nœuds sans fils, et nœuds internes les nœuds qui ont trois fils (il ne peut pas y avoir de nœud d'arité autre que 0 ou 3). Comme pour les arbres binaires complets, on considère que la *taille* d'un tel arbre est son nombre de nœuds internes.

1. Dessiner les arbres ternaires complets de taille 1 et 2. Déterminer (en les dessinant ou pas) le nombre d'arbres ternaires complets de taille 3.
2. Montrer que tout arbre ternaire complet à n nœuds internes, possède $2n + 1$ feuilles.
3. On cherche à *coder* les arbres ternaires par des mots sur l'alphabet $\{a, b\}$, ou par des chemins, comme on l'a fait pour les arbres binaires. Par analogie avec les arbres binaires, on propose deux codages, C_1 et C_2 , définis de la manière suivante.

Le premier codage $C_1(t)$ est défini récursivement sur la structure d'arbre : si t est l'arbre de taille 0, son codage est le mot vide ϵ ; et, si $t = (r, t_1, t_2, t_3)$, son codage est $C_1(t) = a.C_1(t_1).b.C_1(t_2).b.C_1(t_3)$.

Le second codage $C_2(t)$ est défini par parcours préfixe de l'arbre : on considère les nœuds (internes comme feuilles) de l'arbre dans l'ordre du parcours préfixe ; le mot de codage $C_2(t)$ est alors obtenu en notant la lettre a pour les nœuds internes, et la lettre b pour les feuilles.

Calculer les deux mots de codage pour quelques arbres ternaires, et deviner une relation systématique (valable pour tout arbre ternaire t) entre les mots $C_1(t)$ et $C_2(t)$. Prouver cette relation.

4. À chaque mot w sur l'alphabet $\{a, b\}$, on associe un chemin (légèrement différent des chemins utilisés pour les arbres binaires) : chaque lettre a devient un pas “Nord-Nord-Est” $(1, 2)$, et chaque lettre b devient un pas Sud-Est $(1, -1)$.
Dessiner les chemins correspondant aux mots de codage $C_1(t)$ de divers arbres ternaires.
5. Proposer une caractérisation des mots de codage (ou des chemins associés) des arbres ternaires.
6. Prouver que le codage C_1 est bien une bijection entre les arbres ternaires complets et les mots proposés :
- le mot de codage d'un arbre est bien du type proposé
 - **injectivité** : deux arbres distincts sont codés par des mots distincts
 - **surjectivité** : tout mot du type proposé est bien le mot de codage d'un arbre (typiquement, en décrivant comment trouver un tel arbre à partir du mot)
7. En vous inspirant de la preuve vue en cours pour les arbres binaires, montrer la formule suivante pour le nombre d'arbres ternaires complets de taille n :

$$t_n = \frac{1}{2n+1} \binom{3n}{n}.$$

8. **Si vous êtes courageux** : refaire tout l'exercice (sauf la question précédente) pour les “arbres 2-3” : arbres dont les nœuds internes sont toujours d'arité 2 ou 3 (et où, pour chaque nœud, on distingue un ordre sur les fils). Vous aurez besoin de 3 lettres a, b, c pour coder les arbres, et de trois types de pas pour les chemins.