

Probabilités, Statistiques, Combinatoire : TD4

Manipulation d'ensembles ; vocabulaire des probabilités

4.1 Définitions du cours et révisions

Exercice 4.1

On suppose qu'un univers de probabilités Ω est choisi, ainsi qu'une fonction de probabilités \mathbb{P} sur Ω ; et que A et B sont deux parties, *a priori* quelconques, de Ω .

1. Donner et prouver une formule exprimant $\mathbb{P}(B \setminus A)$ en fonction de $\mathbb{P}(B)$ et $\mathbb{P}(A \cap B)$. Comment se simplifie cette formule si on suppose $A \subset B$?
2. Donner, et prouver, une formule exprimant $\mathbb{P}(A \cup B)$ en fonction de $\mathbb{P}(A)$, $\mathbb{P}(B)$, et $\mathbb{P}(A \cap B)$.
3. Comparer vos formules à celles permettant d'exprimer les *cardinaux* des mêmes ensembles (quand les ensembles sont supposés finis).

Les formules obtenues dans cet exercice, sont des formules essentielles, qu'il est important de connaître et de savoir appliquer.

Exercice 4.2

On suppose qu'on dispose d'un univers de probabilités Ω , sur lequel sont définis des événements A , B et C . Exprimer, au moyen d'unions, d'intersections, et d'exclusions (\setminus), les événements suivants ; puis, si possible, exprimer ces mêmes événements comme *unions disjointes* (unions d'ensembles qui sont garantis être deux à deux disjoints). On pourra aussi utiliser la notation \overline{A} pour le complémentaire de A , *i.e.* $\Omega \setminus A$.

1. D : A et B se produisent.
2. E : A se produit, mais pas B .
3. F : A et B se produisent, mais pas C .
4. G : Au moins deux événements parmi A , B et C se produisent.
5. H : Exactement un des trois événements A , B , C se produit.

Pour chacun de ces événements, exprimer sa probabilité en fonction des probabilités des trois événements A , B et C , et de leurs intersections (deux à deux ou trois à trois, si besoin).

4.2 Applications du cours

Exercice 4.3

Comme précédemment, on suppose donné un univers, et définie une famille infinie $(A_i)_{i \in \mathbb{N}}$ d'événements. Exprimer, au moyen d'unions, intersections (possiblement infinies), et exclusions, les événements suivants :

1. B : au moins un des événements A_i se produit.
2. C : tous les événements A_i se produisent.
3. D_n : au moins un des événements A_i , pour $i \geq n$, se produit.
4. E_n : tous les événements A_i , pour $i \geq n$, se produisent.
5. F : une infinité d'événements A_i se produisent (**Indication** : on pourra justifier, et utiliser, la remarque suivante : un ensemble I d'entiers est infini **si et seulement si**, pour tout n , I contient au moins un entier plus grand que n).

Exercice 4.4

Dans cet exercice, on demande de définir pour diverses expériences, des univers de probabilités appropriés. À chaque fois, cela veut dire décrire à la fois l'univers Ω , et la fonction de probabilités correspondante. La réponse n'est pas unique !

1. On tire une pièce non-biaisée une fois à pile ou face. Décrire un univers de probabilités (Ω_1, \mathbb{P}) approprié pour ce problème.
2. On tire la même pièce deux fois à pile ou face. Décrire un univers de probabilités Ω_2 approprié.
3. Que vaut l'ensemble $\mathcal{P}(\Omega_1)$? Combien $\mathcal{P}(\Omega_2)$ a-t-il d'éléments ?
4. Dans Ω_2 , comment décrire de façon ensembliste l'événement E_1 : "on a tiré pile la première fois" ? Quelle est la probabilité de cet événement ? (Rappelez-vous qu'un événement est défini comme un élément de $\text{Parties}(\Omega_2)$)
5. Toujours dans Ω_2 , comment décrire de façon ensembliste l'événement E_2 "on a tiré pile au moins une fois" ? Quelle est la probabilité de cet événement ?
6. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On tire la même pièce à pile ou face n fois. Décrire un univers Ω_n approprié (comme un produit d'ensembles) ; décrire également la fonction de probabilités.
7. Dans Ω_n , écrire de façon ensembliste l'événement F : "pile n'a pas été obtenu lors des 2 premiers lancers".
8. Soit $i \in \{1, \dots, n\}$. Toujours dans Ω_n , décrire les éléments de l'événement G_i : "le résultat du i -ième lancer est pile".
9. Écrire à l'aide des événements G_i , l'événement F .
10. Écrire à l'aide des événements G_i , l'événement H : "la pièce est tombée au moins une fois sur pile".
11. Écrire à l'aide des ensembles G_i , l'événement J : "la pièce est tombée au moins deux fois sur pile".

4.3 Exercices plus avancés

Exercice 4.5

Dans cet exercice, Ω est un ensemble *fini*. On notera n son cardinal.

1. Soit $f : \mathcal{P}(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$ la fonction définie par : pour toute partie A de Ω , $f(A) = \#A/n$.
Montrer que f est une fonction de probabilités (on pourra remplacer la condition de sigma-additivité, par la seule additivité). Cette probabilité porte le nom de **probabilité uniforme sur Ω** .

2. Soit \mathbb{P} une fonction de probabilité quelconque sur Ω . Pour tout élément x de Ω , on définit son “poids” $p(x)$ de la manière suivante : $p(x) = \mathbb{P}(\{x\})$.
Montrer qu’on peut retrouver, pour toute partie A de Ω , sa probabilité à partir de la donnée des poids $(p(x))_{x \in \Omega}$.
3. Inversement, soit q une fonction définie sur Ω , à valeurs positives ou nulles (pour tout $x \in \Omega$, $q(x) \geq 0$). Montrer qu’il existe une et une seule fonction de probabilités \mathbb{P} sur Ω telle que $\mathbb{P}(\{x\})$ soit proportionnel à $q(x)$, c’est-à-dire qu’il existe une constante C telle que, pour tout $x \in \Omega$, $\mathbb{P}(\{x\}) = C \cdot q(x)$. Comment s’exprime C ?
4. Quels poids simples donnent la probabilité uniforme ?

Il est fréquent de définir une fonction de probabilité de cette manière : en définissant seulement la probabilité des singletons, ou même en ne définissant que des poids pour les éléments, sans que la somme des poids soit égale à 1. La même construction peut même être utilisée pour définir une fonction de probabilité sur un ensemble dénombrable, à condition que la série des poids soit convergente.

Exercice 4.6

Cet exercice a pour but d’explorer la notion d’ensemble dénombrable, ainsi que l’argument historique permettant de montrer que certains ensembles ne sont **pas** dénombrables.

On rappelle qu’un ensemble infini E est **dénombrable** s’il existe une **bijection** de \mathbb{N} vers E , c’est-à-dire une fonction $f : \mathbb{N} \rightarrow E$ telle que, pour tout élément x de E , il existe un et un seul entier n tel que $x = f(n)$.

1. Montrer que \mathbb{Z} est dénombrable en exhibant une bijection entre \mathbb{N} et \mathbb{Z} .
2. Montrer que $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ est dénombrable, en exhibant une bijection.

Historiquement, le fait que l’ensemble \mathbb{R} des nombres réels n’est pas dénombrable a été prouvé par le mathématicien allemand Georg Cantor. L’argument clé de sa preuve porte le nom d’**argument diagonal** ; nous allons utiliser cet argument pour montrer le théorème suivant :

Pour tout ensemble E , il n’existe pas de surjection de E vers l’ensemble $\mathcal{P}(E)$ des parties de E .

3. Supposons que E est un ensemble **fini**. Quelle relation existe entre les cardinaux de E et de $\mathcal{P}(E)$? Quand il existe une surjection d’un ensemble fini A vers un ensemble fini B , quelle relation a-t-on entre leurs cardinaux ? En déduire le théorème dans le cas où E est fini.

On suppose maintenant que E est un ensemble fini, et qu’une fonction f de E vers $\mathcal{P}(E)$ a été choisie. Pour prouver le théorème, il nous suffit de prouver que f n’est pas une surjection.

4. Pour prouver que f n’est pas une surjection, il suffit de montrer l’existence d’une partie de E qui possède une certaine propriété (par rapport à f). Quelle propriété ?
5. On définit une partie A de E en décidant, pour chaque élément x de E , de l’inclure ou non dans A , selon la règle suivante :
 - si $x \in f(x)$, alors $x \notin A$;
 - si $x \notin f(x)$, alors $x \in A$.

Montrer (par l’absurde) qu’il n’existe pas de $y \in E$ tel que $A = f(y)$.

6. Adapter la méthode précédente pour montrer que les ensembles suivants ne sont pas dénombrables :
- l'ensemble des suites infinies d'entiers
 - l'ensemble des suites infinies dont les éléments sont pris dans $\{0, 1\}$ (variante : dans $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$)
 - l'intervalle réel $[0, 1]$.