

## Probabilités, Statistiques, Combinatoire : TD5

Probabilités, probabilités conditionnelles

### 5.1 Définitions du cours et révisions

#### Exercice 5.1

On lance quatre fois une pièce équilibrée. Calculer la probabilité des événements suivants :

- $A$  : on obtient pile aux trois premiers lancers.
- $B$  : le dernier lancer donne face.
- $C$  : on obtient pile au moins trois fois.

Calculer également  $\mathbb{P}_A(B)$  et  $\mathbb{P}_C(B)$ .

#### Exercice 5.2

On lance deux dés équilibrés, un blanc et un rouge. On modélise cette expérience par l'ensemble  $[[1, 6]] \times [[1, 6]]$ , muni de la loi de probabilités uniforme, qu'on notera  $\mathbb{P}$ ; l'événement élémentaire  $(a, b)$  représente le résultat où le dé blanc donne  $a$ , et le dé rouge,  $b$ .

On considère les événements suivants :

- $A$  : le dé blanc donne 1.
- $B$  : "double", les deux dés donnent le même résultat
- $C$  : le dé rouge donne un résultat pair.
- $D$  : la somme des résultats des deux dés est 6.

1. Écrire chaque événement en donnant tous ses éléments. Calculer sa probabilité.
2. Calculer les probabilités conditionnelles de  $A, B, C, D$  sachant  $A$ . Faire de même pour les probabilités conditionnelles de  $A, B, C, D$  sachant  $D$ .
3. Calculer la probabilité conditionnelle de  $A$  sachant  $B$ , et de  $A$  sachant  $C$ .
4. On dit qu'un événement  $E$  est **indépendant** d'un événement  $F$ , si  $\mathbb{P}_F(E) = \mathbb{P}(E)$ . Quels sont, parmi les événements étudiés, ceux qui sont indépendants de  $A$ ? Indépendants de  $D$ ?
5. (voir également l'exercice 5.7)

### 5.2 Applications du cours

#### Exercice 5.3

On a déterminé qu'au sein d'une population, chaque individu est gaucher ou droitier ; et brun, ou blond. 15% des individus sont gauchers, les autres étant droitiers ; de plus, 40% des gauchers sont bruns, et 60% des droitiers sont blonds.

1. Proposer un espace de probabilités pertinent pour l'expérience consistant à choisir un individu au hasard et à ne lui poser de questions que sur sa couleur de cheveux et sa ou ses mains de prédilection. Dans les données chiffrées précédentes, lesquelles sont à interpréter comme des probabilités, et lesquelles comme des probabilités conditionnelles ?
2. Déterminer la probabilité de chacun des événements suivants :  $G$ , "la personne interrogée est gauchère" ;  $B$ , "la personne interrogée est brune".
3. Que représente l'événement  $\overline{G}$  ? Quelle est sa probabilité ?
4. Déterminer  $\mathbb{P}_B(G)$  et  $\mathbb{P}_{\overline{B}}(G)$ . Que constatez-vous ?
5. (voir également l'exercice 5.7)

#### Exercice 5.4

Dans un certain jeu à deux joueurs, on commence le tour par tirer une carte (commune aux deux joueurs) d'un paquet (bien mélangé) contenant 5 cartes Or et 10 cartes Argent ; puis, chaque joueur lance un dé équilibré, et marque des points selon la règle suivante :

- si la carte tirée était une carte Or, le joueur marque 3 points si le résultat de son dé est pair, et 1 point si le résultat de son dé est impair ;
- si la carte tirée était une carte Argent, le joueur marque 2 points si le résultat de son dé est 6, et 1 point sinon.

Alice et Bob jouent un tour de ce jeu.

1. Quelle est la probabilité que Alice (respectivement, Bob) marque un point, sachant que la carte tirée est une carte Or ? sachant que c'est une carte Argent ? Quelle est la probabilité qu'Alice et Bob marquent chacun un point, sachant que la carte tirée est une carte Or ? sachant que c'est une carte Argent ?
2. Quelle est la probabilité qu'Alice marque un point ? Qu'Alice et Bob marquent tous les deux un point ?
3. Quelle est la probabilité que la carte tirée soit une carte Or, sachant que Alice a marqué un point ? Sachant qu'Alice et Bob ont tous les deux marqué un point ?
4. En général, si  $A$ ,  $B$  et  $C$  sont trois événements (avec  $A$  de probabilité strictement positive), on dit que  $B$  et  $C$  sont **indépendants, conditionnellement à  $A$** , si  $\mathbb{P}_A(B \cap C) = \mathbb{P}_A(B) \times \mathbb{P}_A(C)$ . Identifier, dans la situation décrite précédemment, des cas d'indépendance conditionnelle.
5. (voir également l'exercice 5.7)

#### Exercice 5.5

On considère un sac contenant quatre pièces : l'une d'entre elle a deux faces pile, tandis que les trois autres sont normales (et équilibrées). On choisit une pièce au hasard dans le sac et on la lance 4 fois. Calculer la probabilité des événements suivants :

- $A$  : on a obtenu pile aux trois premiers lancers.
- $B$  : le dernier lancer a donné face.

Calculer  $\mathbb{P}_A(B)$ . **Indication** : il peut être judicieux de calculer d'abord des probabilités conditionnelles par rapport à un événement supplémentaire, qui décrirait la pièce tirée du sac, ainsi que par rapport à son complémentaire.

### Exercice 5.6

On considère un tournoi à  $n + 2$  joueurs : vous et  $j_0, \dots, j_n$ , où chaque joueur affronte tous les autres deux fois. Votre probabilité de gagner contre le joueur  $j_i$  est de  $\frac{i}{n}$ .

1. Quelle est la probabilité que vous gagniez un match contre un joueur  $j$  tiré (uniformément) au hasard (on suppose que vous ne savez pas identifier quel est le  $i$  tel que  $j = j_i$ ) ?
2. En supposant que vous ayez perdu contre le joueur  $j$  (toujours tiré au hasard), quelle est la probabilité de gagner votre second match contre  $j$  ?

**Indication :** calculer d'abord des probabilités conditionnelles par rapport à chacun des événements  $J_i$  : “le joueur choisi au hasard est le joueur  $j_i$ ”. Vous aurez aussi besoin de connaître une formule pour  $S_n = \sum_{k=0}^n k$ .

## 5.3 Exercices plus avancés

### Exercice 5.7

Cet exercice fait suite aux exercices 5.2, 5.3, et 5.4.

1. On rappelle la définition donnée à l'exercice 5.2 :  $A$  est indépendant de  $B$ , si  $\mathbb{P}_B(A) = \mathbb{P}(A)$ , avec la condition que  $\mathbb{P}(A) > 0$  (sinon la probabilité conditionnelle n'est pas définie).  
Montrer que, si  $A$  est indépendant de  $B$ , alors  $B$  est indépendant de  $A$  (par la suite, on utilise généralement une expression symétrique : “ $A$  et  $B$  sont indépendants”).
2. Montrer que, si  $B$  est un événement de probabilité ni 0 ni 1, alors un événement  $A$  est indépendant de  $B$  si et seulement si il est indépendant de  $\overline{B}$ .
3. **Conditionnements successifs :** on considère trois événements  $A, B, C$ , et on suppose que  $\mathbb{P}(B \cap C) > 0$ .  
Quelle formule obtient-on si on applique la définition d'une probabilité conditionnelle pour calculer  $(\mathbb{P}_B)_C(A)$ ? (*i.e.*, on considère la fonction de probabilité conditionnelle  $\mathbb{P}_B$ , et pour cette fonction de probabilité, on prend la probabilité de  $A$  sachant  $C$ ). Montrer que cette probabilité “doublement conditionnelle” peut s'exprimer comme une probabilité “simplement conditionnelle” (*i.e.*, comme  $\mathbb{P}_E(A)$ , pour un événement  $E$  à choisir).
4. Redéfinir l'indépendance conditionnelle (cf. exercice 5.2) en termes de conditionnements simples.
5. En toute généralité, si deux événements  $B$  et  $C$  sont indépendants conditionnellement à  $A$ , mais aussi conditionnellement à  $\overline{A}$ , peut-on en déduire qu'ils sont indépendants ?