

Probabilités, Statistiques, Combinatoire : TD6

Probabilités conditionnelles, indépendance

6.1 Applications directes du cours et révisions

Pour les exercices de cette section, **il n'est pas indispensable de décrire explicitement un espace de probabilités**. Il est possible de s'en sortir simplement en définissant les événements appropriés, en interprétant correctement les données du problème (comme probabilités ou comme les bonnes probabilités conditionnelles), et en en tirant les conclusion.

En revanche, il est indispensable, à la lecture des énoncés, de bien identifier ce qui décrit une probabilité non modifiée ou une probabilité conditionnelle, et laquelle.

Exercice 6.1

On considère deux urnes, l'une contenant 10 boules blanches et 30 boules noires, l'autre 20 boules de chaque couleur. On tire au hasard une boule dans une des urnes, l'urne étant elle-même choisie au hasard.

1. Avant de regarder la couleur de la boule, quelle est la probabilité de l'avoir tirée dans la première urne ?
2. Quelle est la probabilité que la boule soit blanche sachant qu'on l'a tirée dans la première urne ? Dans la deuxième ?
3. On a tiré une boule blanche. Quelle est la probabilité qu'elle provienne de la première urne ?

Exercice 6.2

On effectue un test de dépistage d'une maladie sur un patient. Le résultat du test est soit "Positif", soit "Négatif". Si le test était parfait, il donnerait toujours le résultat "Positif" pour les patients porteurs de la maladie, et "Négatif" pour les patients non porteur ; mais le test n'est pas parfait.

Les statistiques montrent que, lorsque le patient est porteur de la maladie, le test est positif dans 90% des cas. Lorsque le patient n'est pas porteur, le test est négatif dans 99% des cas.

On suppose que la maladie affecte 1 personne sur 100000. Quelle est la probabilité d'être effectivement malade lorsque le test est positif ?

Exercice 6.3

Lors d'un procès, l'accusation présente un test ADN positif pour confondre l'accusé. Ce test est très précis quand il est accusateur : la probabilité que le test soit positif quand l'individu est innocent n'est que de 0.1% (et elle est de 100% quand l'individu est coupable). La probabilité pour une personne donnée d'être innocente de ce crime est de 99.99%.

1. Estimez-vous plausible que l'accusé soit coupable ?

2. Résumer les données de l'énoncé en termes de probabilités (éventuellement conditionnelles) des événements T : « le suspect a un test positif » et I : « le suspect est innocent ».
3. Calculer $\mathbb{P}_T(I)$. Quelles sont vos conclusions ?

6.2 Applications

Exercice 6.4

On dispose de trois jetons de couleur : un a deux côtés blancs, un a deux côtés noirs, et un a un côté blanc et un côté noir. On tire un des trois jetons “au hasard” (uniformément), et on le pose d'un côté “aléatoire” (uniforme).

Essayez de résoudre cet exercice d'abord sans définir explicitement d'espace de probabilités.

1. Quelle est la probabilité que le jeton choisi ait ses deux faces de la même couleur ?
2. Quelle est la probabilité que la face cachée soit blanche ?
3. La face visible est blanche ; quelle est la probabilité que la face cachée soit blanche ?
On modélise maintenant proprement la situation au moyen d'un univers $\{A, B, C\} \times \{1, 2\}$; le choix d'une lettre désigne le jeton, celui d'un entier la face (le jeton A a ses deux faces blanches ; le jeton B a sa face 1 blanche, et sa face 2 noire ; et le jeton C a ses deux faces noires).
4. Sur cet univers, quelle loi de probabilité est suggérée par l'énoncé ?
5. Répondre de nouveau aux trois premières questions, en décrivant explicitement les événements considérés et les probabilités (ou probabilités conditionnelles) calculées.

6.3 Exercices plus avancés

Exercice 6.5

On considère l'expérience consistant à lancer un dé classique (cubique, à 6 faces, équilibré), qu'on modélise par l'univers $\Omega_1 = [[1, 6]]$ muni de la loi de probabilités uniforme.

1. Décrire sur Ω_1 deux événements indépendants A et B , dont aucun ne soit de probabilité 0 ni 1.
2. Pouvez-vous faire de même si on demande en plus que A et B soient de probabilité $1/2$ (et indépendants) ? Si on demande juste qu'ils aient la même probabilité (et, toujours, indépendants) ?

On considère maintenant l'expérience consistant à lancer deux fois un “dé à 20 faces” bien équilibré ; on modélise cette expérience par l'espace $\Omega_2 = [[1, 20]] \times [[1, 20]]$, muni de la loi de probabilités uniforme.

3. Décrire sur Ω_2 deux événements A et B , chacun de probabilité $1/2$, indépendants.
4. Décrire sur Ω_2 **trois** événements A , B , C , chacun de probabilité $1/2$, indépendants. Prouver qu'ils sont bien indépendants.

5. Peut-on trouver sur Ω_2 **cinq** événements A, B, C, D, E , chacun de probabilité $1/2$, et indépendants ? Et si on accepte que l'un d'eux soit de probabilité autre que $1/2$ (mais ni 0, ni 1) ?

Exercice 6.6

Supposez que vous ayez à disposition un unique dé cubique, bien équilibré, et que vous souhaitiez l'utiliser pour choisir aléatoirement une personne parmi k , de manière uniforme.

1. Informellement, décrire la méthode que vous envisageriez.
2. Pour quelles valeurs de k , parmi les entiers de 2 à 10, est-ce possible avec une méthode qui ne nécessite qu'un lancer du dé ? Que deux lancers ? trois lancers ?