

## Probabilités, Statistiques, Combinatoire : TD7

### Variables aléatoires

Dans les exercices de cette feuille, il est fréquemment demandé de *déterminer la loi* d'une variable aléatoire  $X$  donnée. Rappelons ce que cela signifie :

- identifier l'ensemble des valeurs possibles de  $X$  ;
- pour chaque valeur possible  $a$ , déterminer la probabilité de l'événement  $(X = a)$  (que ce soit par une formule, valable à la fois pour toutes les valeurs de  $a$ , ou au cas par cas, ou même par une combinaison des deux)

### 7.1 Applications directes du cours

#### Exercice 7.1

On lance deux dés classiques, équilibrés. On suppose que les deux dés sont distinguables.

1. On définit la variable aléatoire  $X_1$  représentant le résultat du premier dé. Quelle est la loi de  $X_1$  ?
2. On définit la variable aléatoire  $X_2$  représentant le résultat du second dé. Quelle est la loi de  $X_2$  ?
3. On définit la variable aléatoire  $X_3 = X_1 + X_2$ . Quelle est l'interprétation, en langage naturel, de  $X_3$  ? Déterminer la loi de  $X_3$ .
4. On remplace le premier dé par un dé à 4 faces (tétraèdre régulier), et le second par un dé à 8 faces (octaèdre régulier). On définit de nouveau  $X_1, X_2, X_3$  de la même manière. Déterminer les nouvelles lois de  $X_1, X_2, X_3$ .

#### Exercice 7.2

On joue à pile ou face avec trois pièces équilibrées, et on note  $F_i$ , pour  $i = 1, 2, 3$ , l'événement "la  $i$ -ème pièce tombe sur Face" ; on définit alors les trois variables aléatoires  $X_1, X_2, X_3$ , par  $X_i = \mathbf{1}_{F_i}$ .

1. Déterminer la loi de chaque  $X_i$ .
2. On définit  $S_1 = X_1 + X_3$ , et  $S_2 = X_2 + X_3$ . Déterminer la loi de  $S_1$  et de  $S_2$ .
3. On définit  $S = S_1 + X_1$ , et  $S' = S_2 + X_1$ . Déterminer la loi de  $S$  et celle de  $S'$ .
4. En général, la connaissance de la loi de deux variables aléatoires  $X$  et  $Y$  permet-elle de déterminer la loi de  $X + Y$  ?

## 7.2 Applications et compléments au cours

### Exercice 7.3

On suppose qu'on dispose d'une pièce de monnaie déséquilibrée : chaque fois qu'on la lance, elle a probabilité  $p$  de tomber côté Pile, et  $1 - p$  de tomber côté Face.

On lance de manière répétée une telle pièce, jusqu'à obtenir le résultat Pile pour la première fois ; et on définit la variable aléatoire  $X$  comme le nombre total de lancers effectués (par exemple, si le premier lancer donne Face et le second donne Pile,  $X$  vaudra 2).

1. On suppose<sup>1</sup> qu'on dispose d'une infinité d'événements  $F_i$  (pour  $i$  entier strictement positif), chacun de probabilité  $p$  ;  $F_i$  étant interprétable comme "le  $i$ -ème lancer donne Face". Comment interpréter l'événement  $\overline{F_1} \cap \overline{F_2} \cap F_3$  ?
2. Pour un entier  $n > 0$  quelconque, écrire l'événement  $(X = n)$  au moyen des événements  $F_i$ . En déduire sa probabilité.
3. Faire de même pour l'événement  $(X > n)$ .
4. Même si cela semble *a priori* très peu probable, on doit considérer la possibilité que la suite de tirages ne donne jamais de Face. Dans ce cas, on convient que la variable aléatoire  $X$  prend comme valeur  $+\infty$ .  
Écrire l'événement  $(X = +\infty)$  au moyen des événements  $F_i$ .
5. L'hypothèse d'indépendance de la famille (infinie) d'événements  $(F_i)_{i \geq 1}$  ne donne pas immédiatement de formule pour  $\mathbb{P}(X = +\infty)$  ; pourquoi ?
6. Montrer qu'on a, pour tout  $n$ ,  $(X = +\infty) \subset \cap_{i=1}^n \overline{F_i}$ . Que peut-on en déduire sur  $\mathbb{P}(X = +\infty)$  ?

### Exercice 7.4

On considère un espace de probabilités  $(\Omega, \mathbb{P})$  (qu'il n'est pas question ici d'expliciter), sur lequel on suppose qu'on a défini deux variables aléatoires  $X$  et  $Y$  à valeurs dans  $\mathbb{N}$ . On définit alors  $Z = X + Y$  comme variable aléatoire à valeurs également dans  $\mathbb{N}$ .

1. On suppose connues les lois de  $X$  et de  $Y$  : notons, pour chaque entier  $k$ ,  $p_k = \mathbb{P}(X = k)$  et  $q_k = \mathbb{P}(Y = k)$ . On suppose également que  $X$  et  $Y$  sont **indépendantes** (notion non encore définie en cours : cela signifie que, pour tous entiers  $k$  et  $\ell$ , les événements  $(X = k)$  et  $(Y = \ell)$  sont indépendants).  
Montrer que ces informations permettent de déterminer la loi de  $Z$  ; donner une formule générale pour  $\mathbb{P}(Z = k)$ .
2. Si l'on ne suppose pas que  $X$  et  $Y$  sont indépendantes, mais qu'on suppose connue, pour tout  $k$  et tout  $\ell$ , la quantité  $p_{k,\ell} = \mathbb{P}(X = k \text{ et } Y = \ell)$ , donner une formule pour  $\mathbb{P}(Z = k)$ .

### Exercice 7.5

Dans un réseau informatique, on doit transmettre un message long de  $N$  bits par un canal qui peut provoquer des erreurs. On fait l'hypothèse, très simplificatrice, que chaque octet a la même probabilité  $p$  d'être transmis de manière incorrecte, **indépendamment** de chacun des autres.

---

1. Cela correspond à une expérience "plus riche" que celle décrite dans l'exercice, celle où on ne s'arrête jamais de lancer la pièce. Un tel espace de probabilité ne peut pas être dénombrable, mais nous allons négliger cette difficulté technique.

1. Quelle est, en fonction de  $p$  et de  $N$ , la probabilité que l'ensemble du message soit transmis sans erreur ?
2. Quelle est la probabilité que le message soit transmis avec exactement une erreur ?
3. On modélise cette expérience par l'univers  $\Omega = \{0, 1\}^N$  des suites de longueur  $N$  de 0 et de 1. Un 0 en position  $k$  indique que le  $k$ -ème bit est transmis sans erreur ; un 1 en position  $k$  indique que le  $k$ -ème bit est transmis avec erreur.  
Quelle est la loi de probabilité correspondant à la situation, pour cet univers ?
4. Pour un entier  $n > 0$  et un entier  $0 \leq k \leq n$  donnés, combien existe-t-il de suites de longueur  $n$  sur l'alphabet  $\{0, 1\}$ , qui comptent exactement  $k$  occurrences de 1 ?
5. On note  $X$  la variable aléatoire donnant le nombre d'erreurs de transmission. Déterminer la loi de  $X$ . **Il est possible que vous connaissiez un nom, voire une formule, pour cette loi ; on souhaite ici prouver cette formule**
6. On utilise, pour la transmission, un "code correcteur d'erreurs", qui permet de reconstituer le message d'origine du moment que le nombre d'erreurs de transmission n'est pas strictement plus grand que 2. Déterminer la probabilité de pouvoir reconstituer le message, pour les valeurs suivantes :  $p = 0.001$ ,  $N = 1024$ .

### 7.3 Exercices plus avancés

#### Exercice 7.6

Une variable aléatoire à valeurs dans  $\mathbb{N}$  suit la *loi de Poisson de paramètre  $x$*  (où  $x > 0$  est un nombre réel quelconque, mais fixé) si on a, pour tout  $k \geq 0$ ,

$$\mathbb{P}(X = k) = e^{-x} \frac{x^k}{k!}.$$

(Le facteur  $e^{-x}$  est ce qui assure que la somme des probabilités vaut 1 ; il est vrai en général, et on l'admettra ici, que pour tout nombre réel – même négatif – on a  $\sum_{k=0}^{\infty} x^k/k! = e^x$ .)

1. Déterminer, en fonction de  $x$ , quelle est la valeur la plus probable pour une variable de Poisson de paramètre  $x$ . **Indication** : calculer  $\mathbb{P}(X = k + 1)/\mathbb{P}(X = k)$ , et comparer à 1.
2. On suppose que  $X$  et  $Y$  sont deux variables aléatoires de Poisson – de paramètre  $x$  pour  $X$ , et de paramètre  $y$  pour  $Y$ . On suppose également que  $X$  et  $Y$  sont indépendantes (voir exercices précédents pour la définition).

Déterminer la loi de  $Z$ , définie par  $Z = X + Y$ .

**Indication** : On pourra utiliser la *formule du binôme* : pour tout entier  $n > 0$  et tous réels  $a$  et  $b$ ,

$$(a + b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k b^{n-k}.$$

(Que se passe-t-il si on divise de part et d'autre par  $n!$  ?)