

## Probabilités, Statistiques, Combinatoire : TD8

Variables aléatoires et lois usuelles

Les exercices de cette feuille ont pour objectif de faire manipuler un certain nombre de lois de probabilités usuelles pour des variables aléatoires.

On rappelle la définition (donnée sur la feuille précédente) de deux variables aléatoires *indépendantes* : deux variables aléatoires  $X$  et  $Y$  sont indépendantes si, quelques soient les valeurs  $x$  et  $y$ , les événements  $(X = x)$  et  $(Y = y)$  sont indépendants. Cette définition s'étend au cas de plus de deux variables aléatoires :  $k$  variables aléatoires  $X_1, \dots, X_k$  sont indépendantes si, quelles que soient les valeurs possibles  $x_1, x_2, \dots, x_k$ , les événements  $(X_1 = x_1), (X_2 = x_2), \dots, (X_k = x_k)$  sont indépendants.

### 8.1 Compléments au cours

#### Exercice 8.1

##### Bernoulli

Une *variable de Bernoulli* est une variable aléatoire qui prend comme seules valeurs 0 et 1. Le *paramètre* de la loi est simplement la probabilité que la variable aléatoire prenne la valeur 1.

1. Montrer que la variable indicatrice d'un événement  $A$ ,  $X = \mathbf{1}_A$ , est une variable de Bernoulli. Comment s'exprime son paramètre? Inversement, montrer que toute variable de Bernoulli est l'indicatrice d'un certain événement à déterminer.

Supposons que  $X$  et  $Y$  sont deux variables de Bernoulli, de paramètres  $p$  et  $q$ . On définit  $Z$  et  $T$  de la manière suivante :  $Z = \min(X, Y)$  et  $T = \max(X, Y)$ .

2. Quelles sont les valeurs possibles de  $Z$ , celles de  $T$ ? Pour chaque valeur possible  $a$ , écrire les événements  $(Z = a)$  et  $(T = a)$  en fonction d'événements portant sur  $X$  et sur  $Y$ . Peut-on en déduire la loi de  $Z$ , celle de  $T$ ?
3. Les variables aléatoires  $Z$  et  $T$  sont-elles indépendantes?
4. On suppose maintenant, en plus, que  $X$  et  $Y$  sont indépendantes. Que peut-on dire de plus sur les lois de  $Z$  et de  $T$ ?

#### Exercice 8.2

##### Binomiale

Une définition possible de la *loi binomiale de paramètres*  $(n, p)$  (où  $n$  est un entier naturel, et  $0 < p < 1$ ), est la suivante : cette loi est la loi de la variable aléatoire  $S$  qu'on obtient en *sommant*  $n$  variables aléatoires  $X_1, \dots, X_n$ , *indépendantes*, chacune étant une variable de Bernoulli de même paramètre  $p$  :

$$S = \sum_{k=0}^n X_k.$$

1. Soient  $X_1, \dots, X_n$ ,  $n$  variables de Bernoulli indépendantes, de paramètre  $p$ , et  $S$  leur somme. Déterminer  $\mathbb{P}(S = 0)$  et  $\mathbb{P}(S = n)$ .
2. Soit  $I$  une partie de  $[[1, n]]$ ; on note  $J = [[1, n]] - I$  son complémentaire dans  $[[1, n]]$ . On note  $i = \#I$ .
  - (a) Comment s'exprime le cardinal de  $J$ ?
  - (b) On définit l'événement  $E_I$  : "pour chaque  $k \in I$ ,  $X_k = 1$ ; et pour chaque  $k \in J$ ,  $X_k = 0$ ". Écrire explicitement  $E_I$  comme une intersection de  $n$  événements indépendants, et déterminer sa probabilité.
3. Soit  $i$  un entier compris entre 0 et  $n$ . En vous inspirant de la question précédente, écrire l'événement  $(S = i)$  comme l'union de plusieurs événements deux à deux disjoints, et de même probabilité. En déduire une formule pour  $\mathbb{P}(X = i)$ .
4. Montrer que la somme de deux variables aléatoires indépendantes, l'une suivant la loi binomiale de paramètres  $(n, p)$ , l'autre suivant la loi binomiale de paramètres  $(m, p)$ , est encore une variable binomiale dont on déterminera les paramètres. **Note** : cette question peut être résolue sans calculs compliqués. . .

### Exercice 8.3 Géométrique

La loi *géométrique de paramètre  $p$*  (où  $0 < p < 1$ ) est la loi d'une variable aléatoire obtenue de la manière suivante : on part d'une séquence infinie  $(X_k)_{k>0}$  de variables de Bernoulli *indépendantes*, toutes de même paramètre  $p$ , et on définit  $G$  comme *l'indice de la première des  $X_i$  qui prend la valeur 1* :

$$G = \min(\{k \geq 1 : X_k = 1\}).$$

**Note** : Pour affirmer que  $G$  est bien définie, ou au moins avec probabilité 1, il faut justifier que l'événement "pour tout  $k > 0$ ,  $X_k = 0$ " est de probabilité nulle. Cette preuve était proposée dans un des exercices de la feuille de TD précédente.

1. Écrire les événements  $(G = 1)$ ,  $(G = 2)$ , et  $(G = 3)$  en termes des variables aléatoires  $X_1, X_2, X_3$  (et d'événements définis par ces variables aléatoires). En déduire leurs probabilités.
2. Pour un entier  $n > 1$  quelconque, écrire l'événement  $(G > n)$  en fonction des variables aléatoires  $X_1, \dots, X_n$ . En déduire sa probabilité.
3. Quelle relation y a-t-il entre les événements  $(G > n - 1)$ ,  $(G > n)$ , et  $(G = n)$ ? En déduire une formule, valable pour tout  $n > 0$ , pour  $\mathbb{P}(G = n)$ .
4. **(plus difficile)** On considère deux variables aléatoires indépendantes  $G_1$  et  $G_2$ ;  $G_1$  est géométrique de paramètre  $p$ , et  $G_2$  est géométrique de paramètre  $q$ . On définit  $G = \min(G_1, G_2)$ . Montrer que  $G$  est géométrique, pour un paramètre à déterminer. **Note** : il y a au moins deux façons de résoudre cette question; l'une implique des calculs avec des formules, l'autre consiste à partir de deux familles indépendantes  $(X_k)_{k>0}$  et  $(Y_k)_{k>0}$  de variables aléatoires indépendantes de Bernoulli, et à mener des raisonnements relativement élémentaires – mais essentiellement pas de formules.

## 8.2 Applications

### Exercice 8.4

#### L'étudiant improbable

Un étudiant indélicat suit deux UE, dans lesquelles il a chaque semaine à passer un test. Chaque semaine, il triche à chacun des deux tests. Dans la première UE, il a chaque fois 20% de chances d'être surpris ; dans la seconde, il a chaque fois 25% de chances d'être surpris (l'enseignant est plus vigilant). On suppose que les différents tests se déroulent de manière indépendante.

1. On suppose que le semestre se déroule sans limite de temps, et on note  $T_i$  ( $i = 1, 2$ ) le numéro de la semaine où l'étudiant se fait prendre pour la première fois dans l'UE  $i$ . Déterminer la loi de  $T_i$ .
2. Déterminer la loi de la variable  $T$  représentant le numéro de la première semaine où l'étudiant se fait prendre pour la première fois, toutes UE confondues.
3. En réalité, le semestre ne dure que 10 semaines. Quelle est la probabilité que l'étudiant ne se fasse jamais prendre ?

### Exercice 8.5

#### Insecte et Poisson

Pour cet exercice, on admet la formule suivante, valable pour tout nombre réel  $t$  :

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} = e^t.$$

Un insecte pond des oeufs. Le nombre d'oeufs pondus est une variable aléatoire  $X$  suivant une loi de Poisson de paramètre  $x > 0$  (voir, si besoin, la feuille précédente pour la définition). Chaque oeuf a une probabilité  $p$  d'éclore, indépendamment des autres oeufs. Soit  $Z$  le nombre d'oeufs qui éclosent.

1. Pour  $(k, n) \in \mathbb{N}^2$ , déterminer  $\mathbb{P}(Z = k | X = n)$ .
2. Utiliser la formule des probabilités totales pour en déduire une formule, sous forme de somme infinie, pour la probabilité de l'événement  $\{Z = k\}$ .
3. En utilisant la formule donnée en préambule, déterminer la loi de  $Z$ .
4. On note  $Z'$  le nombre d'oeufs non éclos. Quelle est la loi de  $Z'$  ? Déterminer  $\mathbb{P}(Z = k \text{ et } Z' = k')$ , en fonction de  $k$  et  $k'$ . Qu'en déduit-on sur  $Z$  et  $Z'$  ?