

## Probabilités, Statistiques, Combinatoire : TD9

Variables aléatoires, calculs d'espérances

### 9.1 Compléments au cours, applications

#### Exercice 9.1

##### Espérances des lois usuelles

1. **Bernoulli** : calculer, en fonction du paramètre  $p$ , l'espérance d'une variable de Bernoulli de paramètre  $p$ .
2. **Binomiale** : déduire de la question précédente, une expression simple pour l'espérance d'une variable binomiale de paramètres  $(n, p)$ .
3. **Géométrique** : On considère une variable aléatoire géométrique  $G$ , de paramètre  $p$  ( $0 < p < 1$ ).  
En écrivant la formule de la définition de l'espérance dans le cas d'une variable géométrique, et en manipulant formellement la somme, montrer que l'on a  $\mathbf{E}(G) = 1/p$ .
4. **Poisson** : On considère une variable aléatoire  $P$  de Poisson de paramètre  $x$  ( $x > 0$ ).  
En partant de la définition de l'espérance, et en manipulant formellement la somme, montrer que l'on a  $\mathbf{E}(P) = x$ .

#### Exercice 9.2

**Le magasin** (Cet exercice prend son sens seulement si vous avez traité les exercices 7.6 (feuille 7) et 8.5 (feuille 8) ; si ce n'est pas le cas, il convient d'y retourner)

Un magasin ouvre de 10h à 13h, puis de nouveau de 14h à 18h. On modélise le nombre de clients qui entrent au cours d'une heure le matin (entre 10h et 11h ; entre 11h et 12h ; entre 12h et 13h) par une variable de Poisson de paramètre 10, et, pour une heure de l'après-midi, par une variable de Poisson de paramètre 20 ; on considère que ces différentes variables aléatoires sont indépendantes.

On définit les variables aléatoires suivante :  $C_M$  désigne le nombre de clients qui entrent dans la boutique le matin ;  $C_A$ , celui des clients qui entrent l'après-midi ;  $C_T$ , le nombre total de clients de la journée ; et  $V_M, V_A, V_T$  désignent respectivement le nombre de clients qui achètent réellement quelque chose le matin, l'après-midi, ou au cours de la journée.

1. Quelle est la probabilité qu'aucun client n'entre entre 10h et 11h ? Quelle est la probabilité qu'il entre plus de 12 personnes pendant cette même heure ? (la valeur numérique n'est pas essentielle, la question est de trouver une formule permettant de calculer la valeur numérique)
2. Quelle est l'espérance du nombre de clients qui entrent dans la boutique le matin ? l'après-midi ? au cours d'une journée ?
3. En utilisant les résultats du dernier exercice de la feuille de TD 7 (exercice 7.6), déterminer la loi du nombre de clients  $C_M$  qui entrent dans la boutique le matin, celle du nombre  $C_A$  de clients de l'après-midi, ainsi que la loi du nombre total  $C_T$  de clients de la journée.

4. On estime que chaque client du matin a probabilité 0.3 d'acheter quelque chose ; pour les clients de l'après-midi, la probabilité est de 0.5. On considère que l'acte d'achat, pour chaque client, est indépendant de ceux des autres clients. Quelle est l'espérance du nombre de clients qui achètent quelque chose au cours de la journée ? quelle est la loi du nombre de clients qui achètent quelque chose ? (pour cette dernière question, l'exercice 8.5 est indispensable)
5. On note  $N$  le nombre total de clients qui entrent dans la boutique au cours de la journée, mais qui n'achètent rien. Quelle est la loi de  $N$  ? Son espérance ? Quelle relation y a-t-il entre  $N$  et  $V_T$  ?

## 9.2 Exercices plus avancés

### Exercice 9.3

#### Variables géométriques : le cas du "petit" paramètre

1. Rappeler (ou trouver et prouver, si vous ne l'avez jamais apprise) la formule permettant de calculer, en fonction des paramètres  $n$ ,  $r$  et  $a$ , la somme de  $n$  termes consécutifs d'une suite géométrique de raison  $r \neq 1$ , si le premier terme sommé est  $a$ .
2. On considère une variable aléatoire  $G_p$ , géométrique de paramètre  $p$ . On va s'intéresser au cas où  $p$  est proche de 0.  
Soit  $n$  un entier que l'on considère comme fixé. Comment s'exprime (en fonction de  $n$  et  $p$ ) la probabilité que  $G_p$  prenne une valeur inférieure ou égale à  $n$  ? Quelle est sa limite si  $p$  tend vers 0 ?
3. Soient  $a$  et  $b$  deux réels positifs, avec  $a < b$ .  
Donner une formule, en fonction de  $a$ ,  $b$  et  $p$ , pour la probabilité de l'événement  $(a/p \leq G_p \leq b/p)$  (on pourra supposer que  $a/p$  et  $b/p$  sont des entiers). Quelle est la limite de cette probabilité si,  $a$  et  $b$  étant fixés,  $p$  tend vers 0 ?
4. Refaire la question précédente sans supposer que  $a/p$  et  $b/p$  sont des entiers ; vous utiliserez les notations  $\lfloor x \rfloor$  pour la partie entière (par défaut) de  $x$ , et  $\lceil x \rceil$  pour la partie entière par excès de  $x$ .

### Exercice 9.4

**Variables binomiales indépendantes** On considère deux variables aléatoires  $A$  et  $B$ , indépendantes, et on suppose que  $A$  est binomiale de paramètre  $(n, p)$ , et  $B$  est binomiale de paramètres  $(m, p)$  (avec  $n > 0$ ,  $m > 0$ ,  $0 < p < 1$ ). On pose  $C = A + B$ .

1. Quelles sont les valeurs possibles de  $C$  ? Montrer que chaque valeur est effectivement une valeur prise par  $C$  avec probabilité strictement positive.
2. Déterminer la loi de  $C$ , si possible sans calculs (mais en justifiant votre raisonnement).