Probabilités, Statistiques, Combinatoire : TD12

Révisions : exercices divers

Exercice 12.1

(DS 2018)

Sur la route que suit Alice de chez elle à l'université, elle traverse quatre carrefours munis de feux de circulation. Pour chaque feu, 25% du temps le feu est vert, 75% du temps il est rouge (on néglige l'orange). On suppose que les feux sont indépendants.

Notons X la variable aléatoire qui compte le nombre de feux verts passés avant d'arriver au premier feu rouge ou à l'université (le feu rouge n'est pas compté). Quelles sont les valeurs possibles de X ? Donner la loi de X , et calculer $\mathbf{E}(X)$.

Exercice 12.2

(Session 2 2018)

On considère, dans un espace de probabilités, deux événements A et B , tous les deux de probabilité strictement positive. Pour chacune des propositions suivantes, dire si elle est possible; justifier vos réponses, soit avec une explication de l'impossibilité, soit en donnant un exemple de situation où la proposition se produit.

1. $\mathbb{P}(A|B) = 1$
2. $\mathbb{P}(A|B) > \mathbb{P}(A)$
3. $\mathbb{P}(A|B) = \mathbb{P}(A)$
4. $\mathbb{P}(A|B) < \mathbb{P}(A)$
5. $\mathbb{P}(A|B) = 0$
6. $\mathbb{P}(A|B) = 0.8$, alors que l'on a (pour cette question seulement) $\mathbb{P}(A) = 0.2$ et $\mathbb{P}(B) = 0.5$.

Exercice 12.3

(DS 2018)

Un serveur est 95% du temps dans un état d'attente; 4% du temps il y a un administrateur connecté pour faire des mises à jour; et 1% du temps il est soumis à une attaque. Pour simplifier, on suppose que le même état dure une heure complète.

Au cours d'une heure, la probabilité que le serveur tombe en panne s'il est en état d'attente est de 0.001; pendant une mise à jour, elle est de 0.1; pendant une attaque, elle est de 0.7. On constate que le serveur est tombé en panne entre 11h et midi. On cherche à savoir "à quoi est due la panne". Plus précisément, quelle est la probabilité que la panne se soit produite pendant une attaque? Pendant une mise à jour?

Exercice 12.4

(DS 2018) À une foire, Alice, Bob, et 98 autres personnes (100 personnes au total) participent à un jeu de hasard. Chacun doit tirer une boule d'une urne qui contient 4 boules noires et une boule blanche. Un joueur qui tire une boule noire ne gagne rien; un joueur qui tire la

boule blanche gagne un lot, lequel est déterminé en faisant tourner une roue : la roue a 70% de chances de s'arrêter sur le lot "boîte de chocolats", 20% de chances de s'arrêter sur le lot "barbapapa", et 10% de chances de s'arrêter sur le lot "peluche géante" (à chaque fois qu'on fait tourner la roue, elle désigne un et un seul lot). On suppose que les tours de roue sont indépendants, ainsi que les tirages de boules (et que les tours de roue sont indépendants des tirages de boules).

1. Pour Bob, quelle est la probabilité de gagner un lot quel qu'il soit ? La probabilité de gagner une peluche géante ?
2. On note N_C la variable aléatoire qui compte les joueurs qui gagnent une boîte de chocolats ; N_B celle qui compte les joueurs gagnant une barbapapa ; et N_P celle qui compte les joueurs qui gagnent une peluche géante.
Déterminer la loi de N_C , celle de N_B , et celle de N_P , et leurs espérances respectives.
3. On pose $N = N_C + N_B + N_P$. Que représente la variable aléatoire N ? Quelle est sa loi ?
4. Les variables aléatoires N_B et N_P sont-elles indépendantes ?

Exercice 12.5 (Session 2 2018)

Un mot de Fibonacci est une suite finie de lettres prises parmi les deux lettres a et b , et qui a la propriété qu'on ne trouve jamais deux a consécutifs (les b peuvent être consécutifs). On peut noter, au choix, les mots comme des tuples (a, b, a, b, b) ou sous forme de "mots", $ababb$.

Ainsi, $ababb$ est un mot de Fibonacci, mais $abaab$ n'en est pas un puisqu'on a a en troisième et en quatrième position.

On note, pour chaque entier $n \geq 0$, $\mathcal{F}_n$ l'ensemble de tous les mots de Fibonacci de longueur exactement n .

Enfin, pour tout entier $n \geq 0$, on note f_n le cardinal de $\mathcal{F}_n$, c'est-à-dire le nombre de mots de Fibonacci de longueur n .

1. Donner tous les éléments de $\mathcal{F}_2$, $\mathcal{F}_3$, $\mathcal{F}_4$.
2. Soit $n \geq 2$. Montrer qu'il y a exactement f_{n-1} mots de Fibonacci de longueur n qui commencent par la lettre b , et f_{n-2} mots de Fibonacci de longueur n qui commencent par la lettre a .
3. En déduire que, pour tout $n \geq 2$, on a $f_n = f_{n-1} + f_{n-2}$.
4. Calculer f_6 , f_7 et f_8 .
5. Combien y a-t-il de mots de Fibonacci de longueur 8 qui commencent et finissent par la lettre b ? (s'inspirer du raisonnement de la question 2)
6. On considère la loi de probabilités uniforme sur les mots de Fibonacci de longueur 8. Pour cette loi, quelle est la probabilité de l'événement "la première lettre est un b " ? De l'événement "la dernière lettre est un b " ? Ces deux événements sont-ils indépendants ?

Exercice 12.6

(Session 1 2018) On suppose que dans une certaine population, le nombre d'enfants par famille suit la loi uniforme sur $\{0, 1, 2, 3, 4\}$.

1. On choisit *une famille* au hasard, de manière uniforme; quelle est l'espérance du nombre d'enfants de la famille?
2. Si l'on suppose que la population totale est composée de 100 familles, combien y a-t-il d'enfants au total? Parmi ceux-ci, combien sont issus de familles ayant chaque nombre possible d'enfants?
3. On sélectionne *un enfant* au hasard, de manière uniforme, et on note X le nombre total d'enfants de sa famille (l'enfant interrogé y compris; soit, 1 de plus que son nombre de frères et soeurs). Quelle est l'espérance de X ?

Exercice 12.7 (Session 1 2018)

Un test de dépistage est conçu pour dépister une maladie, mais il est imparfait : il peut donner un résultat “positif” (détection de la maladie) pour un sujet sain, mais également un résultat “négatif” (absence de la maladie) pour un sujet porteur de la maladie. On a déterminé les valeurs suivantes : appliqué à un porteur sain, le test a 5% de chances de donner un résultat positif (“faux positif”); appliqué à un porteur infecté, il a 1% de chances de donner un résultat négatif (“faux négatif”). La proportion de personnes infectées dans la population est estimée à 2%.

1. On applique le test à une personne, qu'on suppose prise uniformément au hasard. En donnant un nom aux événements “la personne testée est porteuse de la maladie”, “la personne testée est saine”, “le résultat du test est positif”, et “le résultat du test est négatif”, interpréter précisément chacune des données chiffrées comme une probabilité ou une probabilité conditionnelle (en précisant de quelle probabilité ou probabilité conditionnelle il s'agit).
2. Le résultat du test est négatif. Quelle est la probabilité que la personne testée soit porteuse de la maladie?
3. On dispose d'un second test de dépistage, qui a les caractéristiques suivantes : il a un taux de 10% de faux positifs, et de 0.5% de faux négatifs; on suppose que si les deux tests sont administrés à une personne donnée, les résultats des deux tests sont indépendants. On n'applique le second test qu'aux personnes pour lesquelles le premier test a donné un résultat négatif.

Quelle est la probabilité que la personne testée soit porteuse de la maladie, si les deux tests ont donné un résultat positif? Quelle est la probabilité que, pour une personne donnée, on administre les deux tests et qu'ils donnent des résultats contraires?

Exercice 12.8 (Session 1 2018)

Au jeu de bridge, on distribue aléatoirement l'ensemble des cartes d'un jeu de 52 entre les quatre joueurs, de sorte que chacun en détienne 13, qui constituent sa “main”. Les cartes ont chacune une valeur (13 valeurs possibles) et une “couleur” parmi Pique, Coeur, Carreau et Trèfle (et chaque combinaison d'une valeur et d'une couleur correspond à une unique carte). Le paquet de cartes est censé être “bien mélangé”, de sorte que toutes les répartitions de 13 cartes à chaque joueur soient équiprobables. Le jeu se joue à 4, en deux équipes (fixes) de deux joueurs.

Dans cet exercice, les valeurs à calculer peuvent être laissées sous la forme de formules faisant apparaître des coefficients binomiaux $\binom{a}{b}$; il n'est pas demandé de valeurs numériques.

1. Combien y a-t-il de mains possibles pour un joueur de bridge? De couples de mains possibles pour un joueur et son partenaire?
2. Combien y a-t-il de façons de sélectionner exactement 4 cartes parmi les 13 cartes de Pique? Exactement 3 cartes parmi les 13 cartes de Coeur?
3. Donner une formule pour la probabilité qu'un joueur ait une main formée d'exactly 4 Pique, 3 Coeur, 3 Carreau, 3 Trèfle (on parle alors de "répartition 4 – 3 – 3 – 3").
4. Donner une formule pour la probabilité que votre partenaire ait une répartition "4 – 3 – 3 – 3" (avec 4 cartes à Pique), **sachant que** vous en avez vous-même une (avec 4 cartes à Carreau).

Exercice 12.9
(Session 2 2018)

Une machine a trois composants critiques, A , B et C , qui sont tous les trois susceptibles de tomber en panne. A et B sont redondants : la machine peut continuer à fonctionner tant que l'un des deux (ou les deux) fonctionne; elle tombe en panne si A et B sont tous les deux en panne. En revanche, C est essentiel au fonctionnement de la machine – elle cesse de fonctionner dès que C tombe en panne.

On note F_A l'événement "le composant A est en panne", et F_B et F_C les événements correspondants pour B et C respectivement. On suppose que F_A , F_B et F_C sont indépendants.

1. On note M l'événement "la machine cesse de fonctionner". Exprimer M au moyen des événements F_A , F_B et F_C , et des opérations d'union et d'intersection.
2. On note p_A , p_B et p_C respectivement, les probabilités des événements F_A , F_B et F_C . Exprimer $\mathbb{P}(M)$ en fonction de p_A , p_B et p_C .
3. On constate que la machine a cessé de fonctionner. Exprimer, en fonction de p_A , p_B et p_C , la probabilité (conditionnelle) que C soit en panne.

Exercice 12.10
(Session 2 2018)

On considère deux variables aléatoires **indépendantes** X et Y , et dont on connaît les lois : X suit la loi uniforme sur $\{1, 2, 3, 4, 5\}$, et Y suit la loi uniforme sur $\{1, 2, 3, 4\}$. On définit $Z = \max(X, Y)$.

1. Quelles sont les valeurs possibles pour Z ?
2. Pour chaque valeur k possible pour Z , déterminer la probabilité des événements $A_k = \{X < k\}$, $B_k = \{X = k\}$, $C_k = \{Y < k\}$ et $D_k = \{Y = k\}$.
3. Pour chaque valeur k possible pour Z , écrire l'événement $\{Z = k\}$ au moyen des événements A_k , B_k , C_k et D_k (au moyen d'intersections et d'unions).
4. En déduire, sous la forme de votre choix, la loi de Z .
5. Dans cette question on suppose toujours que X et Y sont indépendantes, mais pas forcément qu'elle suivent les lois données. On suppose qu'on dispose de fonctions `simX()` et `simY()` permettant respectivement de simuler le tirage de X et de Y . Écrire une fonction `simZ()` qui permet de simuler le tirage de Z (il n'est pas demandé d'écrire une fonction qui retourne la fonction de simulation).

Exercice 12.11
(DS 2018)

Considérons une pièce de monnaie biaisée, avec probabilité p de tomber côté Face. On fait l'expérience suivante : on lance la pièce jusqu'à obtenir Face pour la première fois, et on note X le nombre total de lancers. Puis, on utilise une seconde pièce de monnaie, non biaisée, pour ajouter un signe (± 1) à X , et on note Y le résultat ; c'est-à-dire qu'on a, pour tout entier $k > 0$, $\mathbb{P}(Y = k|X = k) = \mathbb{P}(Y = -k|X = k) = 1/2$.

1. Donner la loi de X .
2. Donner, pour tout couple d'entiers positifs ou nuls (x, y) , $\mathbb{P}((X, Y) = (x, y))$ (ne pas oublier de préciser pour quels couples cette probabilité est nulle).
3. Donner la loi de Y .
4. Calculer l'espérance de X et celle de Y .
5. Montrer que l'on a $\mathbf{E}(XY) = \mathbf{E}(X)\mathbf{E}(Y)$. *Que vous ayez ou non réussi à faire cette question et la précédente, il est possible de résoudre les deux dernières.*
6. Montrer que $\mathbb{P}((X, Y) = (1, 2)) \neq \mathbb{P}(X = 1)\mathbb{P}(Y = 2)$.
7. Est-ce qu'on peut déduire des questions précédentes que X et Y sont des variables aléatoires indépendantes ?

Exercice 12.12
(Session 1 2018)

On considère deux variables aléatoires **indépendantes** X et Y , à valeurs dans $\mathbb{N}$, et dont on suppose connues les lois : pour tous entiers $k \geq 0$ et $\ell \geq 0$, on a $p_k = \mathbb{P}(X = k)$ et $q_\ell = \mathbb{P}(Y = \ell)$. On définit la variable aléatoire Z par $Z = X + Y$.

1. Dans un premier temps, on suppose $p_k > 0$ pour tout $k \geq 0$, et $q_k > 0$ pour tout $k \geq 0$. Déterminer l'ensemble des valeurs possibles pour Z .
2. Toujours avec les mêmes hypothèses, et pour une valeur quelconque m parmi les valeurs possibles de Z , écrire l'événement $\{Z = m\}$ comme une union d'événements disjoints, et dont on peut calculer la probabilité (définis à partir des variables X et Y donc).
3. En déduire la loi de Z ; c'est-à-dire, pour toute valeur m possible pour Z , donner une formule, faisant intervenir les nombres p_k pour $k \geq 0$ et les q_ℓ pour $\ell \geq 0$, pour la probabilité de l'événement $\{Z = m\}$.
4. On suppose maintenant que X et Y ne peuvent prendre chacune qu'un nombre fini de valeurs (il n'existe qu'un ensemble fini de k tels que $p_k > 0$, et de même un ensemble fini de ℓ tels que $q_\ell > 0$). Écrire une fonction Python `dicoSomme(dicX, dicY)` qui, prenant en entrée un dictionnaire décrivant la loi de X et un dictionnaire décrivant la loi de Y , retourne un nouveau dictionnaire décrivant la loi de Z (au sens de ce qui a été fait en TM : les clés d'un dictionnaire sont les valeurs possibles de la variable aléatoire, et la valeur associée à une clé est la probabilité de cette clé). **Il n'est pas demandé d'optimiser la complexité de votre fonction.**