

Probabilités, Statistiques, Combinatoire : TD3'

Combinatoire : pavages

Quelques compléments sur les pavages par dominos

Dans l'exercice sur les pavages d'une bande $3 \times n$, on arrive à des formules de récurrence pour la séquence de comptage.

On sait que la bande $B_{n,\emptyset}$ n'admet des pavages que si n est pair, et $B_{n,\{1\}}$, que si n est impair. On pose donc des notations pour les suites de comptage correspondantes : pour $n \geq 1$,

$$p_n = p(B_{2n,\emptyset}) \quad q_n = p(B_{2n+1,\{1\}})$$

(en posant $p_0 = 1$: c'est plus une convention qu'un comptage du nombre de pavages d'une zone vide)

Les questions de l'exercice amènent normalement à prouver des relations de récurrence qui définissent (avec les premiers termes) les suites $(p_n)_{n \geq 0}$ et $(q_n)_{n \geq 0}$: pour tout $n \geq 1$,

$$p_n = p_{n-1} + 2q_n \tag{3.1}$$

$$q_n = p_{n-1} + q_{n-1} \tag{3.2}$$

Avec les conditions $p_0 = 1$ et $q_0 = 1$, ces relations permettent de calculer q_1 , puis p_1 , puis q_2 , puis p_2 , etc.

Exercice 3.1

Prouver par récurrence qu'il existe un unique couple de suites $((p_n)_{n \geq 0}, (q_n)_{n \geq 0})$ satisfaisant (3.1), (3.2), et $p_0 = q_0 = 1$.

3.1 Première étape : obtention d'une récurrence pour la suite $(p_n)_{n \geq 0}$

Il est plutôt plus simple, quand c'est possible, de travailler sur une récurrence ne portant que sur une seule suite.

L'idée est d'utiliser (3.1) et (3.2) pour "éliminer" la séquence $(q_n)_{n \geq 0}$. En l'occurrence, en multipliant (3.2) par 2, et en soustrayant l'équation obtenue de (3.1) (pour $n - 1$), on obtient l'identité (valable pour $n \geq 2$) :

$$p_{n-1} - 2q_n = p_{n-2} - 2p_{n-1},$$

qui permet donc de réécrire $2q_n = 3p_{n-1} + p_{n-2}$; en reportant cette formule dans (3.1), on obtient une récurrence (d'ordre 2; et valable pour $n \geq 2$) ne faisant plus intervenir que la suite $(p_n)_{n \geq 0}$:

$$p_n = 4p_{n-1} - p_{n-2} \tag{3.3}$$

Il est facile de voir qu'une suite satisfaisant (3.3) est entièrement définie par ses deux premiers termes, p_0 et p_1 . Mieux : l'ensemble de toutes les suites satisfaisant (3.3) (pour tout

$n \geq 2$), forme un espace vectoriel de dimension finie, et la dimension de cet espace vectoriel est d'au plus 2. Cette propriété est essentielle : on va exhiber une *base* de cet espace vectoriel, sous la forme de deux suites, ce qui va nous permettre, en résolvant quelques équations, d'obtenir une formule valable pour la suite de comptage $(p_n)_{n \geq 0}$ qui nous intéresse.

Exercice 3.2

Montrer que l'ensemble E des suites satisfaisant (3.3) pour tout $n \geq 2$, est bien un espace vectoriel de suites :

1. la suite nulle appartient à E ;
2. si $\mathbf{u}$ et $\mathbf{v}$ sont deux suites appartenant à E , alors la suite $\mathbf{u} + \mathbf{v}$ appartient à E ;
3. si $\mathbf{u}$ est une suite appartenant à E , et c un nombre réel, alors $c \cdot \mathbf{u}$ appartient à E .

Exercice 3.3

Montrer que l'espace vectoriel E est de dimension 2 (par exemple en montrant que deux suites particulières appartenant à E , et qui sont linéairement indépendantes, forment un ensemble générateur de E ; deux suites candidates seraient l'unique suite $\mathbf{u}$ de E qui satisfait $u_0 = 1$ et $u_1 = 0$, et l'unique suite $\mathbf{v}$ de E qui satisfait $v_0 = 0$ et $v_1 = 1$).

L'astuce, classique, consiste à chercher des suites sous la forme de suites géométriques, $u_n = q^n$ pour un nombre (réel ou complexe) q . En reportant la définition d'une suite géométrique dans l'équation de récurrence, on obtient $q^n = 4q^{n-1} - q^{n-2}$, soit $q^{n-2}(q^2 - 4q + 1) = 0$. Une suite géométrique fait donc partie de notre espace de solutions si (et seulement si) $q^2 - 4q + 1$, équation qui possède deux solutions, $q_{\pm} = 2 \pm \sqrt{3}$.

Il est facile de vérifier que les deux suites obtenues sont linéairement indépendantes (dans l'espace des suites de réels) : elles forment donc une **base** de l'espace vectoriel des solutions de (3.3).

Exercice 3.4

Prouver l'affirmation suivante : une suite $\mathbf{u} = (u_n)_{n \geq 0}$, géométrique de raison q , appartient à E si et seulement si $q^2 - 4q + 1 = 0$. En déduire l'existence d'une base de E formée de deux suites géométriques, que l'on décrira explicitement.

Par conséquent, la suite $(p_n)_{n \geq 0}$ qui nous intéresse est une combinaison linéaire de ces deux suites : **il existe deux constantes c et d telles que, pour tout $n \geq 0$, $p_n = c(2 + \sqrt{3})^n + d(2 - \sqrt{3})^n$.**

Les deux constantes c et d peuvent être identifiées en introduisant les conditions $p_0 = 1$ et $p_1 = 3$: on obtient deux équations sur c et d , qui se résolvent en

$$c = \frac{1}{2} + \frac{1}{2\sqrt{3}} \quad d = \frac{1}{2} - \frac{1}{2\sqrt{3}}. \quad (3.4)$$

Exercice 3.5

Faire le calcul : déterminer les deux constantes c et d .

On obtient donc une formule pour p_n , valide pour tout $n \geq 0$:

$$p_n = \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2\sqrt{3}} \right) (2 + \sqrt{3})^n + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2\sqrt{3}} \right) (2 - \sqrt{3})^n$$

Cette formule peut surprendre : on sait, parce que p_n compte des pavages, que chaque terme est un nombre entier (positif ou nul), et pourtant l'expression fait apparaître des puissances de nombres non entiers. On peut, ici, remarquer que le second terme est toujours positif (car la raison $2 - \sqrt{3}$ est positive, et inférieure à 1), mais inférieur à 1 ; par conséquent, on obtient une expression tout aussi exacte en arrondissant le premier terme (qui, lui, tend manifestement vers $+\infty$) à l'entier supérieur :

$$p_n = \left\lceil \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2\sqrt{3}} \right) (2 + \sqrt{3})^n \right\rceil$$

Cette expression permet au moins de faire une estimation asymptotique : $p_n \simeq c(2 + \sqrt{3})^n$.

3.2 Est-ce que c'est généralisable ?

On peut naturellement se demander si on a été particulièrement chanceux avec notre suite de comptage des pavages d'une bande de hauteur 3. La réponse est mitigée : oui, et non.

Chaque fois qu'on a une récurrence linéaire, d'ordre k (ici, $k = 2$), l'espace des suites solutions est de dimension k (les suites sont définies par k termes consécutifs). En toute généralité, si on trouve k suites solutions qui sont linéairement indépendantes, on a une base de l'espace des solutions, et on peut espérer faire la même chose.

On peut toujours chercher des solutions sous la forme de suites géométriques, et on obtient une équation (de degré k) pour la raison de telles suites. Si l'équation de départ est $u_n = a_1 u_{n-1} + a_2 u_{n-2} + \dots + a_k u_{n-k}$, l'équation sur la raison q sera simplement $q^k = a_1 q^{k-1} + \dots + a_{k-1} q + a_k$. Si on a un tout petit peu de chance, cette équation polynomiale de degré k a k racines distinctes, et on a bien k suites géométriques qui forment une base de solutions (l'indépendance linéaire de ces k solutions n'est pas totalement immédiate ; il y a un déterminant à calculer, qui s'avère être un déterminant de Vandermonde, non nul).

(Si on n'a pas de chance, l'équation sur q n'a pas k solutions distinctes, et c'est un tout petit peu plus compliqué ; mais on sait toujours trouver une base quand même, avec un peu plus de théorie)

Notons ici que, dans le cas général, les k racines de l'équation ne sont pas forcément accessibles par une formule, mais le fait que la suite de comptage soit une combinaison linéaire de suites géométriques a tout de même des conséquences sur le comportement asymptotiques de telles suites.

3.3 Et du point de vue combinatoire ?

Du point de vue combinatoire, le travail se termine lorsqu'on obtient les équations de récurrence ; la suite, c'est un peu de calcul et d'application de l'algèbre linéaire élémentaire.

On peut naturellement se poser la question de savoir si ce qu'on a fait pour les pavages d'un rectangle de hauteur 2 ou 3, peut être étendu à des hauteurs plus grandes. La réponse est oui, mais c'est vite complexe. Pour n'importe quelle hauteur h (fixée), on peut suivre la méthode qu'on a suivie pour $h = 3$ (en faisant attention au fait que, lorsque h est impair, les pavages de $h \times n$ n'existent que quand n est pair ; alors que, lorsque h est pair, les pavages de $h \times n$ existent pour chaque n). L'idée est de définir une suite de comptage pour les pavages de $h \times n$, privé d'un ensemble de cellules de la première colonne, et ce, pour chaque ensemble possible de cellules manquantes (il y en a donc 2^h ; en tenant compte des symétries et des

conditions de parité, ce nombre peut être réduit, mais cela signifiera qu'on n'aura pas envie de faire les calculs à la main pour de grandes valeurs de h).

Assez naturellement, on va obtenir des relations de récurrence croisées pour les (potentiellement) 2^h suites de comptage ; ces relations de récurrence vont toujours exprimer le n -ème terme d'une des suites, en fonction du terme précédent de certaines des autres suites, sous la forme d'une équation *linéaire*.

La même machinerie peut alors, au moins théoriquement, être mise en branle : on peut chercher à éliminer les suites non voulues, pour ne garder que celle qui compte les pavages de rectangles ; puis, chercher des solutions particulières sous forme de suites géométriques, et enfin, obtenir une expression (faisant intervenir les solutions d'une équation polynomiale, dont le degré risque d'être élevé, comme raisons des suites géométriques intervenant dans la formule) pour la suite de comptage.

Pour $h = 4$, on calcule sans trop de peine les premiers termes de la suite de comptage $q_0 = 1, q_1 = 1, q_2 = 5, q_3 = 11, q_4 = 36$ (le premier est un peu une convention ; pour q_4 , il faut ruser un peu pour ne pas dessiner les 36 pavages). L'écriture des récurrences (correspondant à "regarder" ce qui se passe dans la première colonne) amène à considérer (en tenant compte des symétries haut-bas) 3 suites supplémentaires. Éliminer les suites non voulues des récurrences conduit à une récurrence unique, d'ordre 4 :

$$q_n = q_{n-1} + 5q_{n-2} + q_{n-3} - q_{n-4}, \quad (3.5)$$

valable pour $n \geq 4$.

La suite de comptage pour les pavages de $3 \times n$ apparaît dans **OEIS** (suite **A001835**) ; celle pour les pavages de $4 \times n$ également (suite **A005178**).