

Probabilités, Statistiques, Combinatoire - cours 4

Philippe Duchon

Université de Bordeaux – Licence Informatique

2018-2019

Partie II : Probabilités

La notion de hasard...

- ▶ Qu'est-ce que le hasard ? Est-ce que ça existe, d'ailleurs, ou est-ce que ça ne serait pas un mot qu'on utilise pour camoufler notre ignorance, ou notre incapacité à “calculer assez précisément” ce qui va se passer ?

La notion de hasard...

- ▶ Qu'est-ce que le hasard ? Est-ce que ça existe, d'ailleurs, ou est-ce que ça ne serait pas un mot qu'on utilise pour camoufler notre ignorance, ou notre incapacité à “calculer assez précisément” ce qui va se passer ?
- ▶ Ce sont des questions qui peuvent être intéressantes, mais qui *ne sont pas de nature mathématique* ; dans la pratique, *on fait comme si* la théorie des probabilités rendait bien compte de phénomènes imprévisibles (et ça ne marche pas si mal)...

La notion de hasard. . .

- ▶ Qu'est-ce que le hasard ? Est-ce que ça existe, d'ailleurs, ou est-ce que ça ne serait pas un mot qu'on utilise pour camoufler notre ignorance, ou notre incapacité à "calculer assez précisément" ce qui va se passer ?
- ▶ Ce sont des questions qui peuvent être intéressantes, mais qui *ne sont pas de nature mathématique* ; dans la pratique, *on fait comme si* la théorie des probabilités rendait bien compte de phénomènes imprévisibles (et ça ne marche pas si mal). . .
- ▶ En gros, les tentatives de définitions de la notion de hasard ont tendance à se mordre la queue.

La notion de hasard...

- ▶ Qu'est-ce que le hasard ? Est-ce que ça existe, d'ailleurs, ou est-ce que ça ne serait pas un mot qu'on utilise pour camoufler notre ignorance, ou notre incapacité à "calculer assez précisément" ce qui va se passer ?
- ▶ Ce sont des questions qui peuvent être intéressantes, mais qui *ne sont pas de nature mathématique* ; dans la pratique, *on fait comme si* la théorie des probabilités rendait bien compte de phénomènes imprévisibles (et ça ne marche pas si mal)...
- ▶ En gros, les tentatives de définitions de la notion de hasard ont tendance à se mordre la queue.
- ▶ ("La probabilité de l'événement A dans une expérience, je la définis comme la limite de la proportion des réalisations de l'expérience dans lesquelles A se produit, si on répète suffisamment longtemps l'expérience")

La notion de hasard. . .

- ▶ Qu'est-ce que le hasard ? Est-ce que ça existe, d'ailleurs, ou est-ce que ça ne serait pas un mot qu'on utilise pour camoufler notre ignorance, ou notre incapacité à "calculer assez précisément" ce qui va se passer ?
- ▶ Ce sont des questions qui peuvent être intéressantes, mais qui *ne sont pas de nature mathématique* ; dans la pratique, *on fait comme si* la théorie des probabilités rendait bien compte de phénomènes imprévisibles (et ça ne marche pas si mal). . .
- ▶ En gros, les tentatives de définitions de la notion de hasard ont tendance à se mordre la queue.
- ▶ ("La probabilité de l'événement A dans une expérience, je la définis comme la limite de la proportion des réalisations de l'expérience dans lesquelles A se produit, si on répète suffisamment longtemps l'expérience")
- ▶ Les mathématiques évitent le problème en définissant un cadre axiomatique ; "on y croit" en se persuadant que les axiomes correspondent à la notion intuitive, ce qui permet de faire confiance aux résultats que donne le calcul.

Le vocabulaire des probabilités

- ▶ **Modèle, univers** : la description d'une "expérience" dont le résultat est *a priori* incertain ("une expérience" peut en fait décrire une *suite* d'expériences)

Le vocabulaire des probabilités

- ▶ **Modèle, univers** : la description d'une "expérience" dont le résultat est *a priori* incertain ("une expérience" peut en fait décrire une *suite* d'expériences)
- ▶ **Événement** : la description, dans une expérience, de "quelque chose" qui peut se produire, ou ne pas se produire ; souvent, un événement sera défini par une *condition* sur le résultat de l'expérience

Le vocabulaire des probabilités

- ▶ **Modèle, univers** : la description d'une "expérience" dont le résultat est *a priori* incertain ("une expérience" peut en fait décrire une *suite* d'expériences)
- ▶ **Événement** : la description, dans une expérience, de "quelque chose" qui peut se produire, ou ne pas se produire ; souvent, un événement sera défini par une *condition* sur le résultat de l'expérience
- ▶ **Probabilité d'un événement** : un nombre, toujours compris entre 0 (0%, impossible) et 1 (100%, certain), et qui est censé décrire le degré de plausibilité de l'événement. Par exemple, si un événement a une probabilité de $1/2$, cela correspond à la situation où il est équivalent de parier sur le fait que l'événement se produira, ou sur le fait qu'il ne se produira pas.

Le vocabulaire des probabilités

- ▶ **Modèle, univers** : la description d'une "expérience" dont le résultat est *a priori* incertain ("une expérience" peut en fait décrire une *suite* d'expériences)
- ▶ **Événement** : la description, dans une expérience, de "quelque chose" qui peut se produire, ou ne pas se produire ; souvent, un événement sera défini par une *condition* sur le résultat de l'expérience
- ▶ **Probabilité d'un événement** : un nombre, toujours compris entre 0 (0%, impossible) et 1 (100%, certain), et qui est censé décrire le degré de plausibilité de l'événement. Par exemple, si un événement a une probabilité de $1/2$, cela correspond à la situation où il est équivalent de parier sur le fait que l'événement se produira, ou sur le fait qu'il ne se produira pas.
- ▶ On peut **combiner des événements** pour en décrire de nouveaux : "A et B" ; "A ou B, mais pas C" ; "au moins un des A_i , pour i entier positif" . . .

Les règles (plus ou moins) intuitives

On est amené à énoncer des règles de cohérence que devraient satisfaire, collectivement, les probabilités de tous les événements résultant d'une même expérience :

- ▶ **certitude** : si un événement est considéré comme certain, sa probabilité devrait valoir 1 ;

Les règles (plus ou moins) intuitives

On est amené à énoncer des règles de cohérence que devraient satisfaire, collectivement, les probabilités de tous les événements résultant d'une même expérience :

- ▶ **certitude** : si un événement est considéré comme certain, sa probabilité devrait valoir 1 ;
- ▶ **impossibilité** : si un événement ne peut pas se produire, sa probabilité devrait valoir 0 ;

Les règles (plus ou moins) intuitives

On est amené à énoncer des règles de cohérence que devraient satisfaire, collectivement, les probabilités de tous les événements résultant d'une même expérience :

- ▶ **certitude** : si un événement est considéré comme certain, sa probabilité devrait valoir 1 ;
- ▶ **impossibilité** : si un événement ne peut pas se produire, sa probabilité devrait valoir 0 ;
- ▶ **monotonie** : si deux événements A et B sont tels que A ne peut pas se produire sans que B se produise (A entraîne automatiquement B), alors la probabilité de B devrait être au moins égale à celle de A ;

Les règles (plus ou moins) intuitives

On est amené à énoncer des règles de cohérence que devraient satisfaire, collectivement, les probabilités de tous les événements résultant d'une même expérience :

- ▶ **certitude** : si un événement est considéré comme certain, sa probabilité devrait valoir 1 ;
- ▶ **impossibilité** : si un événement ne peut pas se produire, sa probabilité devrait valoir 0 ;
- ▶ **monotonie** : si deux événements A et B sont tels que A ne peut pas se produire sans que B se produise (A entraîne automatiquement B), alors la probabilité de B devrait être au moins égale à celle de A ;
- ▶ **additivité** : si deux (ou plus) événements sont *incompatibles entre eux* (il est impossible que plus d'un d'entre eux se produise ensemble), la probabilité qu'*au moins un d'entre eux se produise* devrait être la *somme* de leurs probabilités respectives.

Notion d'indépendance

- ▶ **indépendance** : (à ce stade : notion floue) si on peut identifier des *causes* qui influencent l'occurrence d'événements, et qu'on est certain que des événements n'ont *aucune cause en commun*, alors la probabilité que *chacun de ces événements se produise* devrait être le *produit* de leurs probabilités.

Notion d'indépendance

- ▶ **indépendance** : (à ce stade : notion floue) si on peut identifier des *causes* qui influencent l'occurrence d'événements, et qu'on est certain que des événements n'ont *aucune cause en commun*, alors la probabilité que *chacun de ces événements se produise* devrait être le *produit* de leurs probabilités.
- ▶ Plus prosaïquement : dans les situations simples qu'on appellera **indépendance**, la probabilité que **plusieurs événements se réalisent tous** sera le **produit** de leurs probabilités.

Notion d'indépendance

- ▶ **indépendance** : (à ce stade : notion floue) si on peut identifier des *causes* qui influencent l'occurrence d'événements, et qu'on est certain que des événements n'ont *aucune cause en commun*, alors la probabilité que *chacun de ces événements se produise* devrait être le *produit* de leurs probabilités.
- ▶ Plus prosaïquement : dans les situations simples qu'on appellera **indépendance**, la probabilité que **plusieurs événements se réalisent tous** sera le **produit** de leurs probabilités.
- ▶ (Mais ce n'est pas systématiquement le cas)

Dénombrabilité

- ▶ Un ensemble peut être **fini** (s'il est vide, ou qu'on peut numéroter ses éléments de 1 à n , pour un certain entier n , sans en laisser de côté), ou **infini**.

Dénombrabilité

- ▶ Un ensemble peut être **fini** (s'il est vide, ou qu'on peut numéroter ses éléments de 1 à n , pour un certain entier n , sans en laisser de côté), ou **infini**.
- ▶ Exemples d'ensembles infinis : \mathbb{N} (entiers naturels), \mathbb{Z} (entiers relatifs), \mathbb{R} (nombres réels), $[0, 1]$ (intervalle); l'ensemble des squalettes d'arbres binaires complets est également infini.

Dénombrabilité

- ▶ Un ensemble peut être **fini** (s'il est vide, ou qu'on peut numéroter ses éléments de 1 à n , pour un certain entier n , sans en laisser de côté), ou **infini**.
- ▶ Exemples d'ensembles infinis : \mathbb{N} (entiers naturels), \mathbb{Z} (entiers relatifs), \mathbb{R} (nombres réels), $[0, 1]$ (intervalle); l'ensemble des squalettes d'arbres binaires complets est également infini.
- ▶ Une notion importante, notamment en théorie des probabilités, est celle d'ensemble **dénombrable** :

Définition

Un ensemble infini E est **dénombrable** s'il est possible de numéroter ses éléments au moyen des entiers naturels, sans en laisser de côté; *i.e.* s'il existe une **bijection** entre \mathbb{N} et E .

Dénombrabilité

- ▶ Un ensemble peut être **fini** (s'il est vide, ou qu'on peut numéroter ses éléments de 1 à n , pour un certain entier n , sans en laisser de côté), ou **infini**.
- ▶ Exemples d'ensembles infinis : \mathbb{N} (entiers naturels), \mathbb{Z} (entiers relatifs), \mathbb{R} (nombres réels), $[0, 1]$ (intervalle); l'ensemble des squalettes d'arbres binaires complets est également infini.
- ▶ Une notion importante, notamment en théorie des probabilités, est celle d'ensemble **dénombrable** :

Définition

Un ensemble infini E est **dénombrable** s'il est possible de numéroter ses éléments au moyen des entiers naturels, sans en laisser de côté; *i.e.* s'il existe une **bijection** entre \mathbb{N} et E .

- ▶ Exemples d'ensembles dénombrables : \mathbb{N} , \mathbb{Z} , \mathbb{Q} ; l'ensemble des *suites finies* d'entiers.

Dénombrabilité

- ▶ Un ensemble peut être **fini** (s'il est vide, ou qu'on peut numéroter ses éléments de 1 à n , pour un certain entier n , sans en laisser de côté), ou **infini**.
- ▶ Exemples d'ensembles infinis : \mathbb{N} (entiers naturels), \mathbb{Z} (entiers relatifs), \mathbb{R} (nombres réels), $[0, 1]$ (intervalle) ; l'ensemble des squalettes d'arbres binaires complets est également infini.
- ▶ Une notion importante, notamment en théorie des probabilités, est celle d'ensemble **dénombrable** :

Définition

Un ensemble infini E est **dénombrable** s'il est possible de numéroter ses éléments au moyen des entiers naturels, sans en laisser de côté ; *i.e.* s'il existe une **bijection** entre \mathbb{N} et E .

- ▶ Exemples d'ensembles dénombrables : \mathbb{N} , \mathbb{Z} , \mathbb{Q} ; l'ensemble des *suites finies* d'entiers.
- ▶ Définitions alternatives (admises) : un ensemble infini E est dénombrable si et seulement si il existe une **surjection** de \mathbb{N} vers E ; ou, s'il existe une **injection** de E vers \mathbb{N} .

Probabilités discrètes

La notion importante est celle, abstraite, d'*espace de probabilités*

- ▶ **univers** : un ensemble Ω (qu'on va supposer *fini* ou *dénombrable*)

Probabilités discrètes

La notion importante est celle, abstraite, d'*espace de probabilités*

- ▶ **univers** : un ensemble Ω (qu'on va supposer *fini* ou *dénombrable*)
- ▶ les éléments de Ω sont parfois appelés *événements élémentaires*;

Probabilités discrètes

La notion importante est celle, abstraite, d'*espace de probabilités*

- ▶ **univers** : un ensemble Ω (qu'on va supposer *fini* ou *dénombrable*)
- ▶ les éléments de Ω sont parfois appelés *événements élémentaires* ;
- ▶ **événement** : on appelle événement, toute partie de Ω (*i.e.* un ensemble d'événements élémentaires) ;

Probabilités discrètes

La notion importante est celle, abstraite, d'*espace de probabilités*

- ▶ **univers** : un ensemble Ω (qu'on va supposer *fini* ou *dénombrable*)
- ▶ les éléments de Ω sont parfois appelés *événements élémentaires* ;
- ▶ **événement** : on appelle événement, toute partie de Ω (i.e. un ensemble d'événements élémentaires) ;
- ▶ **loi de probabilité sur Ω** : une fonction $\mathbb{P} : \text{Parties}(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$, qui doit satisfaire à certaines règles :
 - ▶ **positivité** : pour tout $A \subset \Omega$, $0 \leq \mathbb{P}(A) \leq 1$;
 - ▶ $\mathbb{P}(\Omega) = 1$;
 - ▶ **additivité** : quels que soient les événements A et B , si A et B sont disjoints ($A \cap B = \emptyset$), alors on a

$$\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B)$$

Probabilités discrètes

La notion importante est celle, abstraite, d'*espace de probabilités*

- ▶ **univers** : un ensemble Ω (qu'on va supposer *fini* ou *dénombrable*)
- ▶ les éléments de Ω sont parfois appelés *événements élémentaires* ;
- ▶ **événement** : on appelle événement, toute partie de Ω (i.e. un ensemble d'événements élémentaires) ;
- ▶ **loi de probabilité sur Ω** : une fonction $\mathbb{P} : \text{Parties}(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$, qui doit satisfaire à certaines règles :
 - ▶ **positivité** : pour tout $A \subset \Omega$, $0 \leq \mathbb{P}(A) \leq 1$;
 - ▶ $\mathbb{P}(\Omega) = 1$;
 - ▶ **additivité** : quels que soient les événements A et B , si A et B sont disjoints ($A \cap B = \emptyset$), alors on a

$$\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B)$$

- ▶ (en fait on demande une condition **plus forte**, la "sigma-additivité")

Sigma-additivité

La condition de sigma-additivité est une extension de celle d'additivité : la fonction \mathbb{P} , définie sur les partie de Ω , est sigma-additive, si

- ▶ pour tout entier $n \geq 0$, pour toute famille de n événements $(A_i)_{1 \leq i \leq n}$, si les A_i sont deux à deux disjoints, alors

$$\mathbb{P}(\cup_{i=1}^n A_i) = \sum_{i=1}^n \mathbb{P}(A_i)$$

Sigma-additivité

La condition de sigma-additivité est une extension de celle d'additivité : la fonction \mathbb{P} , définie sur les partie de Ω , est sigma-additive, si

- ▶ pour tout entier $n \geq 0$, pour toute famille de n événements $(A_i)_{1 \leq i \leq n}$, si les A_i sont deux à deux disjoints, alors

$$\mathbb{P}(\cup_{i=1}^n A_i) = \sum_{i=1}^n \mathbb{P}(A_i)$$

- ▶ pour toute famille *dénombrable* d'événements $(A_i)_{i \in \mathbb{N}}$, si les A_i sont deux à deux disjoints ($A_i \cap A_j = \emptyset$ si $i \neq j$), alors on a

$$\mathbb{P}(\cup_{i \in \mathbb{N}} A_i) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \mathbb{P}(A_i)$$

Sigma-additivité

La condition de sigma-additivité est une extension de celle d'additivité : la fonction \mathbb{P} , définie sur les partie de Ω , est sigma-additive, si

- ▶ pour tout entier $n \geq 0$, pour toute famille de n événements $(A_i)_{1 \leq i \leq n}$, si les A_i sont deux à deux disjoints, alors

$$\mathbb{P}(\cup_{i=1}^n A_i) = \sum_{i=1}^n \mathbb{P}(A_i)$$

- ▶ pour toute famille *dénombrable* d'événements $(A_i)_{i \in \mathbb{N}}$, si les A_i sont deux à deux disjoints ($A_i \cap A_j = \emptyset$ si $i \neq j$), alors on a

$$\mathbb{P}(\cup_{i \in \mathbb{N}} A_i) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \mathbb{P}(A_i)$$

- ▶ En fait, l'additivité (pour deux événements) entraîne l'additivité (pour n événements); et le cas de familles infinies dénombrables entraîne le cas de deux événements (preuves à suivre); **mais** le cas de deux événements ne suffit pas pour avoir le cas dénombrable (exercice).

Preuve : sigma-additivité \implies additivité

On suppose que la fonction \mathbb{P} est telle que, pour toute famille $(A_i)_{i \in \mathbb{N}}$ d'événements deux à deux disjoints, on ait $\mathbb{P}(\cup_{i \in \mathbb{N}} A_i) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \mathbb{P}(A_i)$; et on prouve l'additivité pour deux événements disjoints.

Preuve : sigma-additivité \implies additivité

On suppose que la fonction \mathbb{P} est telle que, pour toute famille $(A_i)_{i \in \mathbb{N}}$ d'événements deux à deux disjoints, on ait $\mathbb{P}(\cup_{i \in \mathbb{N}} A_i) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \mathbb{P}(A_i)$; et on prouve l'additivité pour deux événements disjoints.

Soient donc A et B deux événements disjoints; on pose $A_0 = A$, $A_1 = B$, et pour $i \geq 2$, $A_i = \emptyset$.

Preuve : sigma-additivité \implies additivité

On suppose que la fonction \mathbb{P} est telle que, pour toute famille $(A_i)_{i \in \mathbb{N}}$ d'événements deux à deux disjoints, on ait $\mathbb{P}(\cup_{i \in \mathbb{N}} A_i) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \mathbb{P}(A_i)$; et on prouve l'additivité pour deux événements disjoints.

Soient donc A et B deux événements disjoints; on pose $A_0 = A$, $A_1 = B$, et pour $i \geq 2$, $A_i = \emptyset$. Les A_i sont bien deux à deux disjoints, et on a $\cup_i A_i = A \cup B$, et $\mathbb{P}(A \cup B) = \lim_n \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) + \sum_{i=2}^n 0 = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B)$.

Preuve : additivité pour 2 \implies pour n

- ▶ Convenons d'appeler " n -additive" une fonction sur les parties de Ω , qui satisfait la condition d'additivité pour toutes les familles d'exactly n parties deux à deux disjointes.

Preuve : additivité pour 2 \implies pour n

- ▶ Convenons d'appeler " n -additive" une fonction sur les parties de Ω , qui satisfait la condition d'additivité pour toutes les familles d'exactly n parties deux à deux disjointes.
- ▶ On prouve que, si \mathbb{P} est 2-additive, alors pour tout $n \geq 0$, elle est également n -additive.

Preuve : additivité pour 2 \implies pour n

- ▶ Convenons d'appeler " n -additive" une fonction sur les parties de Ω , qui satisfait la condition d'additivité pour toutes les familles d'exactly n parties deux à deux disjointes.
- ▶ On prouve que, si \mathbb{P} est 2-additive, alors pour tout $n \geq 0$, elle est également n -additive.
- ▶ Par récurrence sur n : posons H_n , "toute fonction 2-additive est k -additive pour tout $2 \leq k \leq n$ ".

Preuve : additivité pour 2 \implies pour n

- ▶ Convenons d'appeler " n -additive" une fonction sur les parties de Ω , qui satisfait la condition d'additivité pour toutes les familles d'exactly n parties deux à deux disjointes.
- ▶ On prouve que, si \mathbb{P} est 2-additive, alors pour tout $n \geq 0$, elle est également n -additive.
- ▶ Par récurrence sur n : posons H_n , "toute fonction 2-additive est k -additive pour tout $2 \leq k \leq n$ ".
- ▶ H_2 est trivialement vraie (toute fonction 2-additive, est 2-additive).

Preuve : additivité pour 2 \implies pour n

- ▶ Convenons d'appeler " n -additive" une fonction sur les parties de Ω , qui satisfait la condition d'additivité pour toutes les familles d'exactly n parties deux à deux disjointes.
- ▶ On prouve que, si \mathbb{P} est 2-additive, alors pour tout $n \geq 0$, elle est également n -additive.
- ▶ Par récurrence sur n : posons H_n , "toute fonction 2-additive est k -additive pour tout $2 \leq k \leq n$ ".
- ▶ H_2 est trivialement vraie (toute fonction 2-additive, est 2-additive).
- ▶ Soit $n \geq 2$; supposons H_n vraie, et montrons H_{n+1} .

Preuve : additivité pour 2 \implies pour n

- ▶ Convenons d'appeler " n -additive" une fonction sur les parties de Ω , qui satisfait la condition d'additivité pour toutes les familles d'exactly n parties deux à deux disjointes.
- ▶ On prouve que, si \mathbb{P} est 2-additive, alors pour tout $n \geq 0$, elle est également n -additive.
- ▶ Par récurrence sur n : posons H_n , "toute fonction 2-additive est k -additive pour tout $2 \leq k \leq n$ ".
- ▶ H_2 est trivialement vraie (toute fonction 2-additive, est 2-additive).
- ▶ Soit $n \geq 2$; supposons H_n vraie, et montrons H_{n+1} .
- ▶ Soient A_1, A_2, \dots, A_{n+1} , $n + 1$ ensembles deux à deux disjoints ; il faut montrer $\mathbb{P}(\cup_{i=1}^{n+1} A_i) = \sum_{i=1}^{n+1} \mathbb{P}(A_i)$.

Preuve : additivité pour 2 \implies pour n

- ▶ Convenons d'appeler " n -additive" une fonction sur les parties de Ω , qui satisfait la condition d'additivité pour toutes les familles d'exactly n parties deux à deux disjointes.
- ▶ On prouve que, si \mathbb{P} est 2-additive, alors pour tout $n \geq 0$, elle est également n -additive.
- ▶ Par récurrence sur n : posons H_n , "toute fonction 2-additive est k -additive pour tout $2 \leq k \leq n$ ".
- ▶ H_2 est trivialement vraie (toute fonction 2-additive, est 2-additive).
- ▶ Soit $n \geq 2$; supposons H_n vraie, et montrons H_{n+1} .
- ▶ Soient A_1, A_2, \dots, A_{n+1} , $n + 1$ ensembles deux à deux disjointes; il faut montrer $\mathbb{P}(\cup_{i=1}^{n+1} A_i) = \sum_{i=1}^{n+1} \mathbb{P}(A_i)$.
- ▶ Comme \mathbb{P} est 2-additive, on a $\mathbb{P}(A_n \cup A_{n+1}) = \mathbb{P}(A_n) + \mathbb{P}(A_{n+1})$.

Preuve : additivité pour 2 \implies pour n

- ▶ Convenons d'appeler " n -additive" une fonction sur les parties de Ω , qui satisfait la condition d'additivité pour toutes les familles d'exactly n parties deux à deux disjointes.
- ▶ On prouve que, si \mathbb{P} est 2-additive, alors pour tout $n \geq 0$, elle est également n -additive.
- ▶ Par récurrence sur n : posons H_n , "toute fonction 2-additive est k -additive pour tout $2 \leq k \leq n$ ".
- ▶ H_2 est trivialement vraie (toute fonction 2-additive, est 2-additive).
- ▶ Soit $n \geq 2$; supposons H_n vraie, et montrons H_{n+1} .
- ▶ Soient A_1, A_2, \dots, A_{n+1} , $n + 1$ ensembles deux à deux disjoints ; il faut montrer $\mathbb{P}(\cup_{i=1}^{n+1} A_i) = \sum_{i=1}^{n+1} \mathbb{P}(A_i)$.
- ▶ Comme \mathbb{P} est 2-additive, on a $\mathbb{P}(A_n \cup A_{n+1}) = \mathbb{P}(A_n) + \mathbb{P}(A_{n+1})$.
- ▶ On pose, pour $1 \leq i \leq n - 1$, $B_i = A_i$; et $B_n = A_n \cup A_{n+1}$; comme \mathbb{P} est n -additive, on applique cette propriété aux B_i , et on conclut.

Retour sur la définition

- ▶ La règle de sigma-additivité est la plus complexe ; dans les cas où Ω est un ensemble *fini*, la règle plus simple d'**additivité** suffit : si A et B sont des événements et qu'on a $A \cap B = \emptyset$, alors $\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B)$ (qui s'étend alors à n'importe quel nombre fini n d'événements)

Retour sur la définition

- ▶ La règle de sigma-additivité est la plus complexe ; dans les cas où Ω est un ensemble *fini*, la règle plus simple d'**additivité** suffit : si A et B sont des événements et qu'on a $A \cap B = \emptyset$, alors $\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B)$ (qui s'étend alors à n'importe quel nombre fini n d'événements)
- ▶ Dans les cas d'un univers infini, il faudrait pour faire les choses proprement, manipuler des limites de sommes ; pour les cas dont on a besoin, on admettra que "les calculs se passent bien" (tout peut être rendu rigoureux)

Retour sur la définition

- ▶ La règle de sigma-additivité est la plus complexe ; dans les cas où Ω est un ensemble *fini*, la règle plus simple d'**additivité** suffit : si A et B sont des événements et qu'on a $A \cap B = \emptyset$, alors $\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B)$ (qui s'étend alors à n'importe quel nombre fini n d'événements)
- ▶ Dans les cas d'un univers infini, il faudrait pour faire les choses proprement, manipuler des limites de sommes ; pour les cas dont on a besoin, on admettra que "les calculs se passent bien" (tout peut être rendu rigoureux)
- ▶ **Remarque importante** : pour un univers donné, la notion de probabilité n'est pas intrinsèque, **elle dépend du choix** qu'on fait de la fonction de probabilité.

Retour sur la définition

- ▶ La règle de sigma-additivité est la plus complexe ; dans les cas où Ω est un ensemble *fini*, la règle plus simple d'**additivité** suffit : si A et B sont des événements et qu'on a $A \cap B = \emptyset$, alors $\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B)$ (qui s'étend alors à n'importe quel nombre fini n d'événements)
- ▶ Dans les cas d'un univers infini, il faudrait pour faire les choses proprement, manipuler des limites de sommes ; pour les cas dont on a besoin, on admettra que "les calculs se passent bien" (tout peut être rendu rigoureux)
- ▶ **Remarque importante** : pour un univers donné, la notion de probabilité n'est pas intrinsèque, **elle dépend du choix** qu'on fait de la fonction de probabilité.
- ▶ On note qu'il n'y a pas de règle qui parle d'indépendance ! La formule par le produit de probabilités va servir à *définir* l'indépendance.

Interprétation

Une interprétation possible de la définition d'un espace de probabilités est la suivante :

- ▶ on a défini l'ensemble des “résultats possibles” de l'expérience (les événements élémentaires) ;

Interprétation

Une interprétation possible de la définition d'un espace de probabilités est la suivante :

- ▶ on a défini l'ensemble des “résultats possibles” de l'expérience (les événements élémentaires) ;
- ▶ on imagine ensuite que “quelque chose” (ou “quelqu'un”) choisit un élément $x \in \Omega$ *au hasard, de telle sorte que chaque élément x a probabilité $\mathbb{P}(\{x\})$ d'être choisi* ;

Interprétation

Une interprétation possible de la définition d'un espace de probabilités est la suivante :

- ▶ on a défini l'ensemble des “résultats possibles” de l'expérience (les événements élémentaires) ;
- ▶ on imagine ensuite que “quelque chose” (ou “quelqu'un”) choisit un élément $x \in \Omega$ *au hasard, de telle sorte que chaque élément x a probabilité $\mathbb{P}(\{x\})$ d'être choisi* ;
- ▶ pour n'importe quel événement A , on considère alors que “l'événement A se produit” lorsque *le x choisi est dans A*

Interprétation

Une interprétation possible de la définition d'un espace de probabilités est la suivante :

- ▶ on a défini l'ensemble des “résultats possibles” de l'expérience (les événements élémentaires) ;
- ▶ on imagine ensuite que “quelque chose” (ou “quelqu'un”) choisit un élément $x \in \Omega$ *au hasard, de telle sorte que chaque élément x a probabilité $\mathbb{P}(\{x\})$ d'être choisi* ;
- ▶ pour n'importe quel événement A , on considère alors que “l'événement A se produit” lorsque *le x choisi est dans A*
- ▶ et donc, “les événements A et B se produisent tous les deux” correspond à la condition “ $x \in A$ et $x \in B$ ”, soit $x \in A \cap B$; et “l'un au moins des événements A et B se produit” correspond à la condition “ $x \in A$ ou $x \in B$ ”, soit $x \in A \cup B$.

Le problème de la modélisation

- ▶ Souvent, quand on veut faire un calcul de probabilité, on a en tête une situation donnée, présentant de l'incertitude, et qu'on souhaite modéliser (lancer d'un dé, sélection d'un individu dans une population, événement futur donc imprévisible).

Le problème de la modélisation

- ▶ Souvent, quand on veut faire un calcul de probabilité, on a en tête une situation donnée, présentant de l'incertitude, et qu'on souhaite modéliser (lancer d'un dé, sélection d'un individu dans une population, événement futur donc imprévisible).
- ▶ Il faut bien comprendre que **l'univers Ω , et la fonction de probabilité, qui permettent de modéliser la situation, ne sont pas définis de manière unique** ; même si, souvent, il y a un choix qui semble plus naturel que d'autres.

Le problème de la modélisation

- ▶ Souvent, quand on veut faire un calcul de probabilité, on a en tête une situation donnée, présentant de l'incertitude, et qu'on souhaite modéliser (lancer d'un dé, sélection d'un individu dans une population, événement futur donc imprévisible).
- ▶ Il faut bien comprendre que **l'univers Ω , et la fonction de probabilité, qui permettent de modéliser la situation, ne sont pas définis de manière unique** ; même si, souvent, il y a un choix qui semble plus naturel que d'autres.
- ▶ En revanche, si la situation modélisée est bien comprise, le résultat des calculs de probabilités qu'on va faire sur des événements définis en fonction du "monde modélisé", ne doit pas dépendre de la modélisation.

Le problème de la modélisation

- ▶ Souvent, quand on veut faire un calcul de probabilité, on a en tête une situation donnée, présentant de l'incertitude, et qu'on souhaite modéliser (lancer d'un dé, sélection d'un individu dans une population, événement futur donc imprévisible).
- ▶ Il faut bien comprendre que **l'univers Ω , et la fonction de probabilité, qui permettent de modéliser la situation, ne sont pas définis de manière unique** ; même si, souvent, il y a un choix qui semble plus naturel que d'autres.
- ▶ En revanche, si la situation modélisée est bien comprise, le résultat des calculs de probabilités qu'on va faire sur des événements définis en fonction du "monde modélisé", ne doit pas dépendre de la modélisation.
- ▶ Par exemple, dans **toutes** les modélisations de l'expérience qui consiste à lancer deux dés (cubiques) équilibrés et à regarder la somme des résultats,
 - ▶ l'événement "obtenir 12" aura probabilité $1/36$
 - ▶ l'événement "obtenir au moins 10" aura probabilité $1/6$
 - ▶ l'événement "obtenir un résultat pair" aura probabilité $1/2$
 - ▶ (on peut définir une fonction de probabilité sur les mêmes