

# Probabilités, Statistiques, Combinatoire

Philippe Duchon

Université de Bordeaux – Licence Informatique

2018-2019

## Previously, on PSC...

- ▶ le vocabulaire des probabilités (univers, événement, loi de probabilités...)
- ▶ les définitions essentielles (axiomes d'une loi de probabilités)
- ▶ début d'exploration de "ce que ça veut dire"

# Interprétation

Une interprétation possible de la définition d'un espace de probabilités est la suivante :

- ▶ on a défini l'ensemble des “résultats possibles” de l'expérience (les événements élémentaires) ;

# Interprétation

Une interprétation possible de la définition d'un espace de probabilités est la suivante :

- ▶ on a défini l'ensemble des “résultats possibles” de l'expérience (les événements élémentaires) ;
- ▶ on imagine ensuite que “quelque chose” (ou “quelqu'un”) choisit un élément  $x \in \Omega$  *au hasard, de telle sorte que chaque élément  $x$  a probabilité  $\mathbb{P}(\{x\})$  d'être choisi* ;

# Interprétation

Une interprétation possible de la définition d'un espace de probabilités est la suivante :

- ▶ on a défini l'ensemble des “résultats possibles” de l'expérience (les événements élémentaires) ;
- ▶ on imagine ensuite que “quelque chose” (ou “quelqu'un”) choisit un élément  $x \in \Omega$  *au hasard, de telle sorte que chaque élément  $x$  a probabilité  $\mathbb{P}(\{x\})$  d'être choisi* ;
- ▶ pour n'importe quel événement  $A$ , on considère alors que “l'événement  $A$  se produit” lorsque *le  $x$  choisi est dans  $A$*

# Interprétation

Une interprétation possible de la définition d'un espace de probabilités est la suivante :

- ▶ on a défini l'ensemble des “résultats possibles” de l'expérience (les événements élémentaires) ;
- ▶ on imagine ensuite que “quelque chose” (ou “quelqu'un”) choisit un élément  $x \in \Omega$  *au hasard, de telle sorte que chaque élément  $x$  a probabilité  $\mathbb{P}(\{x\})$  d'être choisi* ;
- ▶ pour n'importe quel événement  $A$ , on considère alors que “l'événement  $A$  se produit” lorsque *le  $x$  choisi est dans  $A$*
- ▶ et donc, “les événements  $A$  et  $B$  se produisent tous les deux” correspond à la condition “ $x \in A$  et  $x \in B$ ”, soit  $x \in A \cap B$  ;  
et “l'un au moins des événements  $A$  et  $B$  se produit” correspond à la condition “ $x \in A$  ou  $x \in B$ ”, soit  $x \in A \cup B$ .

# Interprétation

Une interprétation possible de la définition d'un espace de probabilités est la suivante :

- ▶ on a défini l'ensemble des "résultats possibles" de l'expérience (les événements élémentaires) ;
- ▶ on imagine ensuite que "quelque chose" (ou "quelqu'un") choisit un élément  $x \in \Omega$  *au hasard, de telle sorte que chaque élément  $x$  a probabilité  $\mathbb{P}(\{x\})$  d'être choisi* ;
- ▶ pour n'importe quel événement  $A$ , on considère alors que "l'événement  $A$  se produit" lorsque *le  $x$  choisi est dans  $A$*
- ▶ et donc, "les événements  $A$  et  $B$  se produisent tous les deux" correspond à la condition " $x \in A$  et  $x \in B$ ", soit  $x \in A \cap B$  ; et "l'un au moins des événements  $A$  et  $B$  se produit" correspond à la condition " $x \in A$  ou  $x \in B$ ", soit  $x \in A \cup B$ .
- ▶ (*A priori*, l'espace de probabilités  $\Omega$  prévu pour simuler une expérience donnée, ne permet pas de simuler la répétition de cette expérience ; en revanche, on peut concevoir un nouvel espace pour l'expérience répétée 2 fois, 3 fois... $k$  fois...une infinité de fois.)

## Quelques conséquences des définitions

- ▶ **probabilité d'un événement impossible** : on a forcément  $\mathbb{P}(\emptyset) = 0$

**Preuve** : pour n'importe quel événement  $A$ , on a  $A \cap \emptyset = \emptyset$  ; donc par additivité,  $\mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(\emptyset) = \mathbb{P}(A)$ , ce qui implique  $\mathbb{P}(\emptyset) = 0$ .

## Quelques conséquences des définitions

- ▶ **probabilité d'un événement impossible** : on a forcément  $\mathbb{P}(\emptyset) = 0$

**Preuve** : pour n'importe quel événement  $A$ , on a  $A \cap \emptyset = \emptyset$  ; donc par additivité,  $\mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(\emptyset) = \mathbb{P}(A)$ , ce qui implique  $\mathbb{P}(\emptyset) = 0$ .

- ▶ **monotonie** : “ $A$  entraîne  $B$ ” se traduit par  $A \subset B$  ; en posant  $C = B \setminus A$ , on a par additivité,  $\mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(C)$  et donc on a bien  $\mathbb{P}(B) \geq \mathbb{P}(A)$

## Quelques conséquences des définitions

- ▶ **probabilité d'un événement impossible** : on a forcément  $\mathbb{P}(\emptyset) = 0$

**Preuve** : pour n'importe quel événement  $A$ , on a  $A \cap \emptyset = \emptyset$  ; donc par additivité,  $\mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(\emptyset) = \mathbb{P}(A)$ , ce qui implique  $\mathbb{P}(\emptyset) = 0$ .

- ▶ **monotonie** : “ $A$  entraîne  $B$ ” se traduit par  $A \subset B$  ; en posant  $C = B \setminus A$ , on a par additivité,  $\mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(C)$  et donc on a bien  $\mathbb{P}(B) \geq \mathbb{P}(A)$
- ▶ **probabilité d'une union** : en toute généralité, on a

$$\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B).$$

(preuve : en TD)

## Quelques conséquences des définitions

- ▶ **probabilité d'un événement impossible** : on a forcément  $\mathbb{P}(\emptyset) = 0$

**Preuve** : pour n'importe quel événement  $A$ , on a  $A \cap \emptyset = \emptyset$ ; donc par additivité,  $\mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(\emptyset) = \mathbb{P}(A)$ , ce qui implique  $\mathbb{P}(\emptyset) = 0$ .

- ▶ **monotonie** : “ $A$  entraîne  $B$ ” se traduit par  $A \subset B$ ; en posant  $C = B \setminus A$ , on a par additivité,  $\mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(C)$  et donc on a bien  $\mathbb{P}(B) \geq \mathbb{P}(A)$
- ▶ **probabilité d'une union** : en toute généralité, on a

$$\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B).$$

(preuve : en TD)

- ▶  $\mathbb{P}(B \setminus A) = \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B)$ ; en particulier, si  $A \subset B$ ,  $\mathbb{P}(B \setminus A) = \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A)$  (preuve : en TD)

## Quelques conséquences des définitions

- ▶ **probabilité d'un événement impossible** : on a forcément  $\mathbb{P}(\emptyset) = 0$

**Preuve** : pour n'importe quel événement  $A$ , on a  $A \cap \emptyset = \emptyset$  ; donc par additivité,  $\mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(\emptyset) = \mathbb{P}(A)$ , ce qui implique  $\mathbb{P}(\emptyset) = 0$ .

- ▶ **monotonie** : “ $A$  entraîne  $B$ ” se traduit par  $A \subset B$  ; en posant  $C = B \setminus A$ , on a par additivité,  $\mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(C)$  et donc on a bien  $\mathbb{P}(B) \geq \mathbb{P}(A)$
- ▶ **probabilité d'une union** : en toute généralité, on a

$$\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B).$$

(preuve : en TD)

- ▶  $\mathbb{P}(B \setminus A) = \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B)$  ; en particulier, si  $A \subset B$ ,  $\mathbb{P}(B \setminus A) = \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A)$  (preuve : en TD)
- ▶ Cas particulier : si  $B = \Omega$ ,  $B \setminus A$  est le **complémentaire** de  $A$ , noté  $\bar{A}$  ; et on a  $\mathbb{P}(\bar{A}) = 1 - \mathbb{P}(A)$ .

## Quelques exemples

(Au final, le choix de l'univers n'est pas canonique : on pourrait toujours choisir un autre ensemble pour modéliser une expérience. . . et parfois c'est même plus pratique de choisir un ensemble "riche")

- ▶ **Lancer d'un dé équilibré** : on peut prendre  $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ , et, pour tout  $A \subset \Omega$ ,  $\mathbb{P}(A) = \#A/6$ .

## Quelques exemples

(Au final, le choix de l'univers n'est pas canonique : on pourrait toujours choisir un autre ensemble pour modéliser une expérience. . . et parfois c'est même plus pratique de choisir un ensemble "riche")

- ▶ **Lancer d'un dé équilibré** : on peut prendre  $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ , et, pour tout  $A \subset \Omega$ ,  $\mathbb{P}(A) = \#A/6$ .
- ▶ **Tirage à pile ou face avec une pièce équilibrée** : on peut prendre  $\Omega = \{\text{pile}, \text{face}\}$ , avec  $\mathbb{P}(\{\text{pile}\}) = \mathbb{P}(\{\text{face}\}) = 1/2$ .

## Quelques exemples

(Au final, le choix de l'univers n'est pas canonique : on pourrait toujours choisir un autre ensemble pour modéliser une expérience. . . et parfois c'est même plus pratique de choisir un ensemble "riche")

- ▶ **Lancer d'un dé équilibré** : on peut prendre  $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ , et, pour tout  $A \subset \Omega$ ,  $\mathbb{P}(A) = \#A/6$ .
- ▶ **Tirage à pile ou face avec une pièce équilibrée** : on peut prendre  $\Omega = \{\text{pile}, \text{face}\}$ , avec  $\mathbb{P}(\{\text{pile}\}) = \mathbb{P}(\{\text{face}\}) = 1/2$ .
- ▶ **Tirage deux fois, ou trois fois, à pile ou face** : on peut prendre pour  $\Omega$ , les séquences de longueur 2, ou 3, à valeur dans  $\{P, F\}$  : par exemple,  $\Omega_2 = \{(P, P), (P, F), (F, P), (F, F)\}$  (avec quelle loi de probabilité?)

## Quelques exemples

(Au final, le choix de l'univers n'est pas canonique : on pourrait toujours choisir un autre ensemble pour modéliser une expérience. . . et parfois c'est même plus pratique de choisir un ensemble "riche")

- ▶ **Lancer d'un dé équilibré** : on peut prendre  $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ , et, pour tout  $A \subset \Omega$ ,  $\mathbb{P}(A) = \#A/6$ .
- ▶ **Tirage à pile ou face avec une pièce équilibrée** : on peut prendre  $\Omega = \{\text{pile}, \text{face}\}$ , avec  $\mathbb{P}(\{\text{pile}\}) = \mathbb{P}(\{\text{face}\}) = 1/2$ .
- ▶ **Tirage deux fois, ou trois fois, à pile ou face** : on peut prendre pour  $\Omega$ , les séquences de longueur 2, ou 3, à valeur dans  $\{P, F\}$  : par exemple,  $\Omega_2 = \{(P, P), (P, F), (F, P), (F, F)\}$  (avec quelle loi de probabilité?)
- ▶ **Tirage à pile ou face avec une pièce déséquilibrée** : par exemple,  $\Omega = \{P, F\}$  avec  $\mathbb{P}(\{P\}) = 0.6$  et  $\mathbb{P}(\{F\}) = 0.4$ .

## Décrire une loi de probabilités

Pour décrire de manière complète une loi de probabilités  $\mathbb{P}$ , il faut *a priori* décrire  $\mathbb{P}(A)$  pour *toute* partie  $A$  de  $\Omega$ . ..(ça fait beaucoup ! et en plus il faut satisfaire les axiomes !)

Le théorème suivant nous permet de ne décrire que l'information minimale (et naturelle) : la probabilité de chaque singleton.

### Théorème

Soit  $\Omega$  un ensemble fini ou dénombrable, et soit  $p : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^+$  une fonction telle que l'on ait

$$\sum_{x \in \Omega} p(x) = 1.$$

Alors il existe une **unique** loi de probabilités  $\mathbb{P}$  sur  $\Omega$  telle que l'on ait, pour tout  $x \in \Omega$ ,  $\mathbb{P}(\{x\}) = p(x)$ ; et cette probabilité est définie, pour toute partie  $A \subset \Omega$ , par

$$\mathbb{P}(A) = \sum_{x \in A} p(x).$$

## Preuve (dans le cas fini)

- **unicité** : si on a, pour tout  $x$ ,  $\mathbb{P}(\{x\}) = p(x)$ , alors, pour tout  $A \subset \Omega$ , si on note  $x_1, \dots, x_k$  les éléments de  $A$  (avec  $k = \#A$ ), on a, par additivité (en posant  $A_i = \{x_i\}$ ) :

$$\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^k A_i\right) = \sum_{i=1}^k p(x_i)$$

(i.e., la probabilité de tout ensemble en découle)

## Preuve (dans le cas fini)

- ▶ **unicité** : si on a, pour tout  $x$ ,  $\mathbb{P}(\{x\}) = p(x)$ , alors, pour tout  $A \subset \Omega$ , si on note  $x_1, \dots, x_k$  les éléments de  $A$  (avec  $k = \#A$ ), on a, par additivité (en posant  $A_i = \{x_i\}$ ) :

$$\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^k A_i\right) = \sum_{i=1}^k p(x_i)$$

(i.e., la probabilité de tout ensemble en découle)

- ▶ **existence** : il suffit de vérifier que la fonction  $\mathbb{P}$  ainsi définie, est bien une fonction de probabilité ;

## Preuve (dans le cas fini)

- ▶ **unicité** : si on a, pour tout  $x$ ,  $\mathbb{P}(\{x\}) = p(x)$ , alors, pour tout  $A \subset \Omega$ , si on note  $x_1, \dots, x_k$  les éléments de  $A$  (avec  $k = \#A$ ), on a, par additivité (en posant  $A_i = \{x_i\}$ ) :

$$\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^k A_i\right) = \sum_{i=1}^k p(x_i)$$

(i.e., la probabilité de tout ensemble en découle)

- ▶ **existence** : il suffit de vérifier que la fonction  $\mathbb{P}$  ainsi définie, est bien une fonction de probabilité ;
- ▶ par exemple, pour l'additivité : si  $A = \{x_1, \dots, x_k\}$  et  $B = \{x_{k+1}, \dots, x_{k+l}\}$  sont disjoints, on vérifie qu'on a bien, en posant  $C = A \cup B$ ,

$$\mathbb{P}(C) = \sum_{i=1}^{k+l} p(x_i) = \sum_{i=1}^k p(x_i) + \sum_{i=k+1}^{k+l} p(x_i) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B)$$

## Preuve (dans le cas fini)

- ▶ **unicité** : si on a, pour tout  $x$ ,  $\mathbb{P}(\{x\}) = p(x)$ , alors, pour tout  $A \subset \Omega$ , si on note  $x_1, \dots, x_k$  les éléments de  $A$  (avec  $k = \#A$ ), on a, par additivité (en posant  $A_i = \{x_i\}$ ) :

$$\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^k A_i\right) = \sum_{i=1}^k p(x_i)$$

(i.e., la probabilité de tout ensemble en découle)

- ▶ **existence** : il suffit de vérifier que la fonction  $\mathbb{P}$  ainsi définie, est bien une fonction de probabilité ;
- ▶ par exemple, pour l'additivité : si  $A = \{x_1, \dots, x_k\}$  et  $B = \{x_{k+1}, \dots, x_{k+l}\}$  sont disjoints, on vérifie qu'on a bien, en posant  $C = A \cup B$ ,

$$\mathbb{P}(C) = \sum_{i=1}^{k+l} p(x_i) = \sum_{i=1}^k p(x_i) + \sum_{i=k+1}^{k+l} p(x_i) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B)$$

- ▶ Les preuves dans le cas où  $\Omega$  est dénombrable, demandent de manipuler des **séries** : on admet.

## Extension : “proba. proportionnelle à...”

Une extension très utile du théorème précédent : on a des “poids”  $p(x)$  pour tout  $x \in \Omega$ , qui sont des nombres positifs ou nuls, mais on n’a pas forcément  $\sum_{x \in \Omega} p(x) = 1$ .

## Extension : “proba. proportionnelle à...”

Une extension très utile du théorème précédent : on a des “poids”  $p(x)$  pour tout  $x \in \Omega$ , qui sont des nombres positifs ou nuls, mais on n'a pas forcément  $\sum_{x \in \Omega} p(x) = 1$ .

Dans ce cas, on peut **quand même** se servir des poids pour définir une loi de probabilités : on pose  $C = \sum_{x \in \Omega} p(x)$ , et, pour toute partie  $A \subset \Omega$ ,

$$\mathbb{P}(A) = \frac{1}{C} \sum_{x \in A} p(x).$$

## Extension : “proba. proportionnelle à...”

Une extension très utile du théorème précédent : on a des “poids”  $p(x)$  pour tout  $x \in \Omega$ , qui sont des nombres positifs ou nuls, mais on n’a pas forcément  $\sum_{x \in \Omega} p(x) = 1$ .

Dans ce cas, on peut **quand même** se servir des poids pour définir une loi de probabilités : on pose  $C = \sum_{x \in \Omega} p(x)$ , et, pour toute partie  $A \subset \Omega$ ,

$$\mathbb{P}(A) = \frac{1}{C} \sum_{x \in A} p(x).$$

(Dans le cas où  $\Omega$  est **dénombrable**, ça marche aussi, mais à condition qu’on ait  $C < \infty$  : la série doit être convergente.)

## Loi uniforme sur un ensemble fini

(On suppose ici que l'univers  $\Omega$  est **fini**.)

Parmi les lois de probabilités sur un tel ensemble, la **loi uniforme** est la seule qui accorde la même probabilité à tous les singletons, *i.e.* pour tout  $x \in \Omega$ ,  $p(x) = 1/\#\Omega$ .

### Définition

La loi uniforme  $\mathbb{P}_U$  sur  $\Omega$  est définie par : pour toute partie  $A \subset \Omega$ ,

$$\mathbb{P}_U(A) = \frac{\#A}{\#\Omega}.$$

- ▶ C'est la loi des "tirages équitables".

## Loi uniforme sur un ensemble fini

(On suppose ici que l'univers  $\Omega$  est **fini**.)

Parmi les lois de probabilités sur un tel ensemble, la **loi uniforme** est la seule qui accorde la même probabilité à tous les singletons, *i.e.* pour tout  $x \in \Omega$ ,  $p(x) = 1/\#\Omega$ .

### Définition

La loi uniforme  $\mathbb{P}_U$  sur  $\Omega$  est définie par : pour toute partie  $A \subset \Omega$ ,

$$\mathbb{P}_U(A) = \frac{\#A}{\#\Omega}.$$

- ▶ C'est la loi des "tirages équitables".
- ▶ C'est ce qu'on entend par "dé équilibré" (univers : les entiers de 1 à 6), "[jeu de cartes] bien mélangé" (univers : les ordres possibles sur le paquet de cartes, *i.e.* les permutations sur un ensemble à 32, ou 52, ou 78 éléments), , "choisir uniformément" parmi un ensemble fini...

## Un exemple d'utilisation de la loi uniforme

- ▶ Expérience : on joue 10 fois d'affilée à Pile ou Face, et on note la séquence de résultats.

## Un exemple d'utilisation de la loi uniforme

- ▶ Expérience : on joue 10 fois d'affilée à Pile ou Face, et on note la séquence de résultats.
- ▶ On modélise cette expérience avec l'univers  $\Omega = \{P, F\}^{10}$  (de cardinal  $2^{10} = 1024$ ), avec la *loi uniforme* : chaque événement élémentaire  $s$  (séquence binaire de longueur 10) a un poids  $p(s) = 1/1024$ .

## Un exemple d'utilisation de la loi uniforme

- ▶ Expérience : on joue 10 fois d'affilée à Pile ou Face, et on note la séquence de résultats.
- ▶ On modélise cette expérience avec l'univers  $\Omega = \{P, F\}^{10}$  (de cardinal  $2^{10} = 1024$ ), avec la *loi uniforme* : chaque événement élémentaire  $s$  (séquence binaire de longueur 10) a un poids  $p(s) = 1/1024$ .
- ▶ Quelle est la probabilité, sur les 10 tirages, de ne pas avoir obtenu deux tirages de Pile consécutifs ? (on n'exclut pas les Face consécutifs, seulement les Pile)

## Un exemple d'utilisation de la loi uniforme

- ▶ Expérience : on joue 10 fois d'affilée à Pile ou Face, et on note la séquence de résultats.
- ▶ On modélise cette expérience avec l'univers  $\Omega = \{P, F\}^{10}$  (de cardinal  $2^{10} = 1024$ ), avec la *loi uniforme* : chaque événement élémentaire  $s$  (séquence binaire de longueur 10) a un poids  $p(s) = 1/1024$ .
- ▶ Quelle est la probabilité, sur les 10 tirages, de ne pas avoir obtenu deux tirages de Pile consécutifs ? (on n'exclut pas les Face consécutifs, seulement les Pile)
- ▶  $N/1024$ , où  $N$  est le nombre de séquences binaires de longueur 10 (sur l'alphabet  $\{P, F\}$  qui n'ont pas deux  $P$  consécutifs...

## Un exemple d'utilisation de la loi uniforme

- ▶ Expérience : on joue 10 fois d'affilée à Pile ou Face, et on note la séquence de résultats.
- ▶ On modélise cette expérience avec l'univers  $\Omega = \{P, F\}^{10}$  (de cardinal  $2^{10} = 1024$ ), avec la *loi uniforme* : chaque événement élémentaire  $s$  (séquence binaire de longueur 10) a un poids  $p(s) = 1/1024$ .
- ▶ Quelle est la probabilité, sur les 10 tirages, de ne pas avoir obtenu deux tirages de Pile consécutifs ? (on n'exclut pas les Face consécutifs, seulement les Pile)
- ▶  $N/1024$ , où  $N$  est le nombre de séquences binaires de longueur 10 (sur l'alphabet  $\{P, F\}$  qui n'ont pas deux  $P$  consécutifs. . .
- ▶ Ici,  $N$  est le terme  $F_{10}$  de la suite définie par :  $F_0 = 1$ ,  $F_1 = 2$ , et pour  $k \geq 2$ ,  $F_k = F_{k-1} + F_{k-2}$  (suite de Fibonacci), ici  $F_{10} = 144$ , donc une probabilité de  $144/1024 = 9/64 \simeq 0.14$ .

## Un exemple d'utilisation de la loi uniforme

- ▶ Expérience : on joue 10 fois d'affilée à Pile ou Face, et on note la séquence de résultats.
- ▶ On modélise cette expérience avec l'univers  $\Omega = \{P, F\}^{10}$  (de cardinal  $2^{10} = 1024$ ), avec la *loi uniforme* : chaque événement élémentaire  $s$  (séquence binaire de longueur 10) a un poids  $p(s) = 1/1024$ .
- ▶ Quelle est la probabilité, sur les 10 tirages, de ne pas avoir obtenu deux tirages de Pile consécutifs ? (on n'exclut pas les Face consécutifs, seulement les Pile)
- ▶  $N/1024$ , où  $N$  est le nombre de séquences binaires de longueur 10 (sur l'alphabet  $\{P, F\}$  qui n'ont pas deux  $P$  consécutifs. . .
- ▶ Ici,  $N$  est le terme  $F_{10}$  de la suite définie par :  $F_0 = 1$ ,  $F_1 = 2$ , et pour  $k \geq 2$ ,  $F_k = F_{k-1} + F_{k-2}$  (suite de Fibonacci), ici  $F_{10} = 144$ , donc une probabilité de  $144/1024 = 9/64 \simeq 0.14$ .
- ▶ (Quelle est la probabilité de n'obtenir ni deux Pile consécutifs, ni deux Face consécutifs ?)

# Probabilité conditionnelle