

Probabilités, Statistiques, Combinatoire

Philippe Duchon

Université de Bordeaux – Licence Informatique

2018-2019

Retour sur les probabilités conditionnelles

- ▶ Dans énormément de problèmes, ce qui est décrit naturellement, ce ne sont pas des probabilités “pures”, mais des probabilités conditionnelles.

Retour sur les probabilités conditionnelles

- ▶ Dans énormément de problèmes, ce qui est décrit naturellement, ce ne sont pas des probabilités “pures”, mais des probabilités conditionnelles.
- ▶ Il est important de **repérer** ces situations dans la description de l'énoncé !

Retour sur les probabilités conditionnelles

- ▶ Dans énormément de problèmes, ce qui est décrit naturellement, ce ne sont pas des probabilités “pures”, mais des probabilités conditionnelles.
- ▶ Il est important de **repérer** ces situations dans la description de l'énoncé !
- ▶ Une erreur fréquente, et grave : il ne faut pas confondre $\mathbb{P}(A \cap B)$ (“probabilité pure”) et $\mathbb{P}_B(A)$ (probabilité conditionnelle) !

Retour sur les probabilités conditionnelles

- ▶ Dans énormément de problèmes, ce qui est décrit naturellement, ce ne sont pas des probabilités “pures”, mais des probabilités conditionnelles.
- ▶ Il est important de **repérer** ces situations dans la description de l'énoncé !
- ▶ Une erreur fréquente, et grave : il ne faut pas confondre $\mathbb{P}(A \cap B)$ (“probabilité pure”) et $\mathbb{P}_B(A)$ (probabilité conditionnelle) !
- ▶ En particulier, si on connaît $\mathbb{P}(B)$, $\mathbb{P}_B(A)$, et $\mathbb{P}_{\overline{B}}(A)$ (par exemple), on peut déterminer toutes les probabilités ne faisant intervenir que A et B (et leurs complémentaires) – même pas besoin de décrire explicitement un espace de probabilités.

Retour sur les probabilités conditionnelles

- ▶ Dans énormément de problèmes, ce qui est décrit naturellement, ce ne sont pas des probabilités “pures”, mais des probabilités conditionnelles.
- ▶ Il est important de **repérer** ces situations dans la description de l'énoncé !
- ▶ Une erreur fréquente, et grave : il ne faut pas confondre $\mathbb{P}(A \cap B)$ (“probabilité pure”) et $\mathbb{P}_B(A)$ (probabilité conditionnelle) !
- ▶ En particulier, si on connaît $\mathbb{P}(B)$, $\mathbb{P}_B(A)$, et $\mathbb{P}_{\overline{B}}(A)$ (par exemple), on peut déterminer toutes les probabilités ne faisant intervenir que A et B (et leurs complémentaires) – même pas besoin de décrire explicitement un espace de probabilités.
- ▶ Un outil très utile : la *formule des probabilités totales*

Formule des probabilités totales

- Si on connaît $\mathbb{P}(B)$ et $\mathbb{P}_B(A)$, on peut en déduire $\mathbb{P}(A \cap B)$:
$$\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(B)\mathbb{P}_B(A).$$

Formule des probabilités totales

- ▶ Si on connaît $\mathbb{P}(B)$ et $\mathbb{P}_B(A)$, on peut en déduire $\mathbb{P}(A \cap B)$:
 $\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(B)\mathbb{P}_B(A)$.
- ▶ On peut aussi calculer $\mathbb{P}(\overline{B}) = 1 - \mathbb{P}(B)$, et si on connaît $\mathbb{P}_{\overline{B}}(A)$, on peut en déduire $\mathbb{P}(A \cap \overline{B})$: $\mathbb{P}(A \cap \overline{B}) = \mathbb{P}(\overline{B})\mathbb{P}_{\overline{B}}(A)$.

Formule des probabilités totales

- ▶ Si on connaît $\mathbb{P}(B)$ et $\mathbb{P}_B(A)$, on peut en déduire $\mathbb{P}(A \cap B)$:
 $\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(B)\mathbb{P}_B(A)$.
- ▶ On peut aussi calculer $\mathbb{P}(\overline{B}) = 1 - \mathbb{P}(B)$, et si on connaît $\mathbb{P}_{\overline{B}}(A)$, on peut en déduire $\mathbb{P}(A \cap \overline{B})$: $\mathbb{P}(A \cap \overline{B}) = \mathbb{P}(\overline{B})\mathbb{P}_{\overline{B}}(A)$.
- ▶ Or A est l'union disjointe de $A \cap B$ et $A \cap \overline{B}$, donc
 $\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(A \cap B) + \mathbb{P}(A \cap \overline{B})$.

Formule des probabilités totales

- ▶ Si on connaît $\mathbb{P}(B)$ et $\mathbb{P}_B(A)$, on peut en déduire $\mathbb{P}(A \cap B)$:
 $\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(B)\mathbb{P}_B(A)$.
- ▶ On peut aussi calculer $\mathbb{P}(\overline{B}) = 1 - \mathbb{P}(B)$, et si on connaît $\mathbb{P}_{\overline{B}}(A)$, on peut en déduire $\mathbb{P}(A \cap \overline{B})$: $\mathbb{P}(A \cap \overline{B}) = \mathbb{P}(\overline{B})\mathbb{P}_{\overline{B}}(A)$.
- ▶ Or A est l'union disjointe de $A \cap B$ et $A \cap \overline{B}$, donc
 $\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(A \cap B) + \mathbb{P}(A \cap \overline{B})$.
- ▶ On en déduit la **formule des probabilités totales** :

$$\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(B)\mathbb{P}_B(A) + \mathbb{P}(\overline{B})\mathbb{P}_{\overline{B}}(A)$$

Formule généralisée

Au lieu de B et $\overline{B}$, on peut aussi écrire une formule avec un nombre quelconque d'événements $B_1, B_2, \dots, B_k$ qui **partitionnent** l'univers Ω :

Si les B_i sont deux à deux disjoints, **et** que leur union est $\bigcup_{i=1}^k B_i = \Omega$, **alors** on a pour tout événement A ,

$$\mathbb{P}(A) = \sum_{i=1}^k \mathbb{P}(B_i) \mathbb{P}_{B_i}(A)$$

Indépendance

- **Vu en TD** : quand on a $\mathbb{P}_B(A) = \mathbb{P}(A)$, on dit que A est indépendant de B (le fait que B se produise, n'influence pas les chances que A se produise)

Indépendance

- ▶ **Vu en TD** : quand on a $\mathbb{P}_B(A) = \mathbb{P}(A)$, on dit que A est **indépendant de B** (le fait que B se produise, n'influence pas les chances que A se produise)
- ▶ En fait la condition se réécrit d'une manière symétrique : cela correspond à la condition $\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)$ **qu'on prend comme définition** (pas besoin que B soit de probabilité non nulle)

Indépendance

- ▶ **Vu en TD** : quand on a $\mathbb{P}_B(A) = \mathbb{P}(A)$, on dit que A est **indépendant de B** (le fait que B se produise, n'influence pas les chances que A se produise)
- ▶ En fait la condition se réécrit d'une manière symétrique : cela correspond à la condition $\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)$ **qu'on prend comme définition** (pas besoin que B soit de probabilité non nulle)
- ▶ Sous cette forme, l'indépendance devient une relation symétrique : **si A est indépendant de B , alors B est indépendant de A** ; on dit plus simplement que A et B sont **indépendants**.

Indépendance

- ▶ **Vu en TD** : quand on a $\mathbb{P}_B(A) = \mathbb{P}(A)$, on dit que A est **indépendant de B** (le fait que B se produise, n'influence pas les chances que A se produise)
- ▶ En fait la condition se réécrit d'une manière symétrique : cela correspond à la condition $\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)$ **qu'on prend comme définition** (pas besoin que B soit de probabilité non nulle)
- ▶ Sous cette forme, l'indépendance devient une relation symétrique : **si A est indépendant de B , alors B est indépendant de A** ; on dit plus simplement que **A et B sont indépendants**.
- ▶ **Vu également en TD** : si A est indépendant de B , alors il est également indépendant de $\overline{B}$ (et, par symétrie, il en est de même pour $\overline{A}$).

Indépendance : remarques

- ▶ **Important** : la notion d'indépendance n'implique pas de relation causale ; il arrive qu'on *découvre*, par le calcul, que deux événements sont indépendants

Indépendance : remarques

- ▶ **Important** : la notion d'indépendance n'implique pas de relation causale ; il arrive qu'on *découvre*, par le calcul, que deux événements sont indépendants
- ▶ **Exemple** : quand on lance deux dés identiques, les événements “le premier dé donne 1” et “la somme des dés donne 7” sont indépendants (pourtant, la valeur du premier dé a une influence sur le fait que la somme fasse 7 ; d'ailleurs si on remplace 7 par une autre somme, les événements ne sont plus indépendants).

Indépendance : remarques

- ▶ **Important** : la notion d'indépendance n'implique pas de relation causale ; il arrive qu'on *découvre*, par le calcul, que deux événements sont indépendants
- ▶ **Exemple** : quand on lance deux dés identiques, les événements “le premier dé donne 1” et “la somme des dés donne 7” sont indépendants (pourtant, la valeur du premier dé a une influence sur le fait que la somme fasse 7 ; d'ailleurs si on remplace 7 par une autre somme, les événements ne sont plus indépendants).
- ▶ Avec la définition par produit de probabilités, un événement de probabilité 0 ou 1 est indépendant de lui-même (en fait, il est indépendant de **tout** événement).

Indépendance de plus de deux événements

- ▶ On a vu la notion de **deux événements indépendants** ; la question est de savoir s'il y a une bonne généralisation : “ A, B, C sont indépendants” ; “ $A_1, \dots, A_k$ sont indépendants”.

Indépendance de plus de deux événements

- ▶ On a vu la notion de **deux événements indépendants** ; la question est de savoir s'il y a une bonne généralisation : " A, B, C sont indépendants" ; " $A_1, \dots, A_k$ sont indépendants".
- ▶ Les choses ne sont pas si simples ! Prenons l'exemple du lancer de deux dés, et trois événements A, B, C :
 - ▶ A : le premier dé donne 1 ;
 - ▶ B : le deuxième dé donne 6 ;
 - ▶ C : la somme des deux dés vaut 7.

Indépendance de plus de deux événements

- ▶ On a vu la notion de **deux événements indépendants** ; la question est de savoir s'il y a une bonne généralisation : “ A, B, C sont indépendants” ; “ $A_1, \dots, A_k$ sont indépendants”.
- ▶ Les choses ne sont pas si simples ! Prenons l'exemple du lancer de deux dés, et trois événements A, B, C :
 - ▶ A : le premier dé donne 1 ;
 - ▶ B : le deuxième dé donne 6 ;
 - ▶ C : la somme des deux dés vaut 7.
- ▶ On constate facilement que chacun a probabilité $1/6$, et que les paires sont formées d'événements indépendants : A et B , A et C , B et C sont à chaque fois indépendants.

Indépendance de plus de deux événements

- ▶ On a vu la notion de **deux événements indépendants** ; la question est de savoir s'il y a une bonne généralisation : “ A, B, C sont indépendants” ; “ $A_1, \dots, A_k$ sont indépendants”.
- ▶ Les choses ne sont pas si simples ! Prenons l'exemple du lancer de deux dés, et trois événements A, B, C :
 - ▶ A : le premier dé donne 1 ;
 - ▶ B : le deuxième dé donne 6 ;
 - ▶ C : la somme des deux dés vaut 7.
- ▶ On constate facilement que chacun a probabilité $1/6$, et que les paires sont formées d'événements indépendants : A et B , A et C , B et C sont à chaque fois indépendants.
- ▶ Ce qu'on constate, c'est que ces 3 événements sont **deux à deux indépendants** (quelques soient les 2 parmi 3 qu'on prend, ils sont indépendants).

Indépendance de plus de deux événements

- ▶ On a vu la notion de **deux événements indépendants** ; la question est de savoir s'il y a une bonne généralisation : “ A, B, C sont indépendants” ; “ $A_1, \dots, A_k$ sont indépendants”.
- ▶ Les choses ne sont pas si simples ! Prenons l'exemple du lancer de deux dés, et trois événements A, B, C :
 - ▶ A : le premier dé donne 1 ;
 - ▶ B : le deuxième dé donne 6 ;
 - ▶ C : la somme des deux dés vaut 7.
- ▶ On constate facilement que chacun a probabilité $1/6$, et que les paires sont formées d'événements indépendants : A et B , A et C , B et C sont à chaque fois indépendants.
- ▶ Ce qu'on constate, c'est que ces 3 événements sont **deux à deux indépendants** (quelques soient les 2 parmi 3 qu'on prend, ils sont indépendants).
- ▶ Pour autant, $A \cap B \cap C$ a probabilité $1/36$, et pas $1/6^3 \dots$

Indépendance : cas général

La “bonne” généralisation de la notion d’indépendance, c’est de généraliser la formule par produit de probabilités pour **toute** intersection (finie) :

Définition : indépendance

k événements, $A_1, \dots, A_k$, sont **indépendants** (ou “globalement indépendants”) si, pour toute partie de l’ensemble d’indices $I \subset [[1, k]]$, on a

$$\mathbb{P}(\cap_{i \in I} A_i) = \prod_{i \in I} \mathbb{P}(A_i)$$

(Si on prend une *infinité* d’événements, on demande “seulement” la formule produit pour les ensembles I *finis*)

Indépendance : cas général

La “bonne” généralisation de la notion d'indépendance, c'est de généraliser la formule par produit de probabilités pour **toute** intersection (finie) :

Définition : indépendance

k événements, $A_1, \dots, A_k$, sont **indépendants** (ou “globalement indépendants”) si, pour toute partie de l'ensemble d'indices $I \subset [[1, k]]$, on a

$$\mathbb{P}(\cap_{i \in I} A_i) = \prod_{i \in I} \mathbb{P}(A_i)$$

(Si on prend une *infinité* d'événements, on demande “seulement” la formule produit pour les ensembles I *finis*)

En particulier, pour trois événements A, B, C , on demande

- ▶ $\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)$: A et B sont indépendants
- ▶ $\mathbb{P}(A \cap C) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(C)$: A et C sont indépendants
- ▶ $\mathbb{P}(B \cap C) = \mathbb{P}(B)\mathbb{P}(C)$: B et C sont indépendants
- ▶ **et** $\mathbb{P}(A \cap B \cap C) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)\mathbb{P}(C)$

Conditionnements successifs

- $(\Omega, \mathbb{P})$ un espace de probabilités fixé ; $A, B, C \dots$ des événements
- ▶ On a vu que $\mathbb{P}_B$ désigne une vraie fonction de probabilité sur Ω , a priori différente de $\mathbb{P}$: $(\Omega, \mathbb{P}_B)$ représente l'expérience de départ **si on suppose que B se produit**.

Conditionnements successifs

- $(\Omega, \mathbb{P})$ un espace de probabilités fixé ; $A, B, C \dots$ des événements
- ▶ On a vu que $\mathbb{P}_B$ désigne une vraie fonction de probabilité sur Ω , a priori différente de $\mathbb{P}$: $(\Omega, \mathbb{P}_B)$ représente l'expérience de départ **si on suppose que B se produit**.
 - ▶ Dans $(\Omega, \mathbb{P}_B)$, on peut aussi conditionner par un événement $C \dots$ pour obtenir encore une nouvelle probabilité, qu'on peut noter temporairement $(\mathbb{P}_B)_C$

Conditionnements successifs

$(\Omega, \mathbb{P})$ un espace de probabilités fixé ; $A, B, C \dots$ des événements

- ▶ On a vu que $\mathbb{P}_B$ désigne une vraie fonction de probabilité sur Ω , a priori différente de $\mathbb{P}$: $(\Omega, \mathbb{P}_B)$ représente l'expérience de départ **si on suppose que B se produit**.
- ▶ Dans $(\Omega, \mathbb{P}_B)$, on peut aussi conditionner par un événement $C \dots$ pour obtenir encore une nouvelle probabilité, qu'on peut noter temporairement $(\mathbb{P}_B)_C$
- ▶ Calculons : comment s'exprime $(\mathbb{P}_B)_C(A)$?

Conditionnements successifs

$(\Omega, \mathbb{P})$ un espace de probabilités fixé ; $A, B, C \dots$ des événements

- ▶ On a vu que $\mathbb{P}_B$ désigne une vraie fonction de probabilité sur Ω , a priori différente de $\mathbb{P}$: $(\Omega, \mathbb{P}_B)$ représente l'expérience de départ **si on suppose que B se produit**.
- ▶ Dans $(\Omega, \mathbb{P}_B)$, on peut aussi conditionner par un événement $C \dots$ pour obtenir encore une nouvelle probabilité, qu'on peut noter temporairement $(\mathbb{P}_B)_C$
- ▶ Calculons : comment s'exprime $(\mathbb{P}_B)_C(A)$?
- ▶ **Conséquence** : conditionner par B , puis par C , c'est équivalent à conditionner par $B \cap C$; et c'est donc équivalent à conditionner par C , puis par B .

Espaces produits

- ▶ On a souvent besoin de modéliser des expériences complexes :
“on lance deux dés”, “on tire une carte, puis on lance un dé”,
“on tire à pile ou face, puis si on a obtenu Pile, on lance un dé ; si on a obtenu Face, on lance deux dés”

Espaces produits

- ▶ On a souvent besoin de modéliser des expériences complexes :
“on lance deux dés”, “on tire une carte, puis on lance un dé”,
“on tire à pile ou face, puis si on a obtenu Pile, on lance un dé ; si on a obtenu Face, on lance deux dés”
- ▶ La construction d’“espace de probabilités produit” permet de construire de “gros” espaces à partir de “petits”, quand on a besoin d’indépendance.

Espaces produits

- ▶ On a souvent besoin de modéliser des expériences complexes : “on lance deux dés”, “on tire une carte, puis on lance un dé”, “on tire à pile ou face, puis si on a obtenu Pile, on lance un dé ; si on a obtenu Face, on lance deux dés”
- ▶ La construction d’“espace de probabilités produit” permet de construire de “gros” espaces à partir de “petits”, quand on a besoin d’indépendance.
- ▶ **Point de départ** : j’ai un espace $(\Omega_1, \mathbb{P}_1)$ qui permet de modéliser une certaine expérience, et un autre espace $(\Omega_2, \mathbb{P}_2)$ qui permet de modéliser une autre expérience. Dans Ω_1 , j’ai un événement A_1 qui décrit le “succès” de l’expérience 1 ; dans Ω_2 , j’ai un événement A_2 qui décrit le “succès” de l’expérience 2.

Espaces produits

- ▶ On a souvent besoin de modéliser des expériences complexes : “on lance deux dés”, “on tire une carte, puis on lance un dé”, “on tire à pile ou face, puis si on a obtenu Pile, on lance un dé ; si on a obtenu Face, on lance deux dés”
- ▶ La construction d’“espace de probabilités produit” permet de construire de “gros” espaces à partir de “petits”, quand on a besoin d’indépendance.
- ▶ **Point de départ** : j’ai un espace $(\Omega_1, \mathbb{P}_1)$ qui permet de modéliser une certaine expérience, et un autre espace $(\Omega_2, \mathbb{P}_2)$ qui permet de modéliser une autre expérience. Dans Ω_1 , j’ai un événement A_1 qui décrit le “succès” de l’expérience 1 ; dans Ω_2 , j’ai un événement A_2 qui décrit le “succès” de l’expérience 2.
- ▶ Comme A_1 et A_2 “vivent” dans des univers différents, je n’ai pas d’événement “les deux expériences réussissent” (ça n’a pas de sens de regarder $A_1 \cap A_2$). . .

Espace produit : définition

- ▶ $(\Omega_1, \mathbb{P}_1)$ premier espace : on suppose que pour chaque $x \in \Omega_1$, $\mathbb{P}_1(\{x\}) = p_1(x)$.

Espace produit : définition

- ▶ $(\Omega_1, \mathbb{P}_1)$ premier espace : on suppose que pour chaque $x \in \Omega_1$, $\mathbb{P}_1(\{x\}) = p_1(x)$.
- ▶ $(\Omega_2, \mathbb{P}_2)$, second espace : pour chaque $y \in \Omega_2$, $\mathbb{P}_2(\{y\}) = p_2(y)$.

Espace produit : définition

- ▶ $(\Omega_1, \mathbb{P}_1)$ premier espace : on suppose que pour chaque $x \in \Omega_1$, $\mathbb{P}_1(\{x\}) = p_1(x)$.
- ▶ $(\Omega_2, \mathbb{P}_2)$, second espace : pour chaque $y \in \Omega_2$, $\mathbb{P}_2(\{y\}) = p_2(y)$.
- ▶ On définit l'espace produit $\Omega = \Omega_1 \times \Omega_2$ (produit cartésien), avec comme une probabilité $\mathbb{P}$ définie également par des poids : pour tout $(x, y) \in \Omega$,

$$\mathbb{P}(\{(x, y)\}) = q(x, y), \text{ avec } q(x, y) = p_1(x) \cdot p_2(y)$$

Espace produit : définition

- ▶ $(\Omega_1, \mathbb{P}_1)$ premier espace : on suppose que pour chaque $x \in \Omega_1$, $\mathbb{P}_1(\{x\}) = p_1(x)$.
- ▶ $(\Omega_2, \mathbb{P}_2)$, second espace : pour chaque $y \in \Omega_2$, $\mathbb{P}_2(\{y\}) = p_2(y)$.
- ▶ On définit l'espace produit $\Omega = \Omega_1 \times \Omega_2$ (produit cartésien), avec comme une probabilité $\mathbb{P}$ définie également par des poids : pour tout $(x, y) \in \Omega$,

$$\mathbb{P}(\{(x, y)\}) = q(x, y), \text{ avec } q(x, y) = p_1(x) \cdot p_2(y)$$

- ▶ **Interprétation** : si $A_1 \subset \Omega_1$ et $A_2 \subset \Omega_2$ sont des événements dans chaque espace, leurs “équivalents” dans Ω sont $A'_1 = A_1 \times \Omega_2 \subset \Omega$, et $A'_2 = \Omega_1 \times A_2 \subset \Omega$; on a bien

$$\mathbb{P}(A'_1) = \mathbb{P}_1(A_1) \text{ et } \mathbb{P}(A'_2) = \mathbb{P}_2(A_2)$$

Espace produit : définition

- ▶ $(\Omega_1, \mathbb{P}_1)$ premier espace : on suppose que pour chaque $x \in \Omega_1$, $\mathbb{P}_1(\{x\}) = p_1(x)$.
- ▶ $(\Omega_2, \mathbb{P}_2)$, second espace : pour chaque $y \in \Omega_2$, $\mathbb{P}_2(\{y\}) = p_2(y)$.
- ▶ On définit l'espace produit $\Omega = \Omega_1 \times \Omega_2$ (produit cartésien), avec comme une probabilité $\mathbb{P}$ définie également par des poids : pour tout $(x, y) \in \Omega$,

$$\mathbb{P}(\{(x, y)\}) = q(x, y), \text{ avec } q(x, y) = p_1(x) \cdot p_2(y)$$

- ▶ **Interprétation** : si $A_1 \subset \Omega_1$ et $A_2 \subset \Omega_2$ sont des événements dans chaque espace, leurs “équivalents” dans Ω sont $A'_1 = A_1 \times \Omega_2 \subset \Omega$, et $A'_2 = \Omega_1 \times A_2 \subset \Omega$; on a bien

$$\mathbb{P}(A'_1) = \mathbb{P}_1(A_1) \text{ et } \mathbb{P}(A'_2) = \mathbb{P}_2(A_2)$$

- ▶ **mais** dans Ω , on a des événements $A'_1 \cap A'_2$, $A'_1 \cup A'_2 \dots$

Espace produit : définition

- ▶ $(\Omega_1, \mathbb{P}_1)$ premier espace : on suppose que pour chaque $x \in \Omega_1$, $\mathbb{P}_1(\{x\}) = p_1(x)$.
- ▶ $(\Omega_2, \mathbb{P}_2)$, second espace : pour chaque $y \in \Omega_2$, $\mathbb{P}_2(\{y\}) = p_2(y)$.
- ▶ On définit l'espace produit $\Omega = \Omega_1 \times \Omega_2$ (produit cartésien), avec comme une probabilité $\mathbb{P}$ définie également par des poids : pour tout $(x, y) \in \Omega$,

$$\mathbb{P}(\{(x, y)\}) = q(x, y), \text{ avec } q(x, y) = p_1(x) \cdot p_2(y)$$

- ▶ **Interprétation** : si $A_1 \subset \Omega_1$ et $A_2 \subset \Omega_2$ sont des événements dans chaque espace, leurs “équivalents” dans Ω sont $A'_1 = A_1 \times \Omega_2 \subset \Omega$, et $A'_2 = \Omega_1 \times A_2 \subset \Omega$; on a bien

$$\mathbb{P}(A'_1) = \mathbb{P}_1(A_1) \text{ et } \mathbb{P}(A'_2) = \mathbb{P}_2(A_2)$$

- ▶ **mais** dans Ω , on a des événements $A'_1 \cap A'_2$, $A'_1 \cup A'_2 \dots$
- ▶ **Remarque** : A'_1 est automatiquement indépendant de A'_2 (l'espace produit modélise les deux expériences **indépendamment** l'une de l'autre)

Quelques problèmes de modélisation/calcul

- ▶ On dispose de trois jetons de couleur : un a deux côtés blancs, un a deux côtés noirs, et un a un côté blanc et un côté noir. On tire un des trois jetons de manière aléatoire uniforme, et on le pose d'un côté aléatoire uniforme.
 - ▶ Quelle est la probabilité que le jeton choisi ait ses deux faces de la même couleur ?
 - ▶ Quelle est la probabilité que la face cachée soit blanche ?
 - ▶ La face visible est blanche ; quelle est la probabilité que la face cachée soit blanche ?

Quelques problèmes de modélisation/calcul

- ▶ On dispose de trois jetons de couleur : un a deux côtés blancs, un a deux côtés noirs, et un a un côté blanc et un côté noir. On tire un des trois jetons de manière aléatoire uniforme, et on le pose d'un côté aléatoire uniforme.
 - ▶ Quelle est la probabilité que le jeton choisi ait ses deux faces de la même couleur ?
 - ▶ Quelle est la probabilité que la face cachée soit blanche ?
 - ▶ La face visible est blanche ; quelle est la probabilité que la face cachée soit blanche ? (on cherche une probabilité conditionnelle)

Modélisation/calcul : Monty Hall

Ce problème se présente comme un jeu télévisé. Le candidat a face à lui trois portes fermées, dont une cache un cadeau de valeur et les deux autres un prix sans valeur. Les règles du jeu sont les suivantes :

1. Le candidat désigne une porte de son choix.
2. Le présentateur du jeu, qui sait quelle porte cache le cadeau de valeur, ouvre alors une porte, qui ne peut pas être celle montrée par le candidat, et derrière laquelle se trouve un cadeau sans valeur (s'il a le choix, il choisit au hasard).
3. Le candidat doit alors choisir définitivement une des portes restantes (soit celle qu'il avait désignée, soit la troisième porte), et il partira avec le cadeau qu'elle cache.

Le candidat peut-il adopter une stratégie "intelligente" pour maximiser ses chances d'obtenir le cadeau de valeur, ou est-ce qu'il n'a aucune prise sur ses chances ? S'il dispose d'une stratégie meilleure que les autres, quelle est-elle, et quelles sont alors ses chances d'obtenir le cadeau de valeur ?